

Implementación de software para la Enseñanza de Ecuaciones en Diferencias con valores iniciales

*Valdez Luis Ernesto, Juarez Gustavo Adolfo, Navarro Silvia Inés,
Barros Luis Edgardo*

Resumen

La propuesta realizada para la enseñanza de las ecuaciones en diferencias (EED) a través de la nota Ecuaciones en Diferencias del año 2005, incorpora un desarrollo en forma estructurada de las mismas, permitiendo dar otro enfoque teórico y formal, siendo utilizado en las asignaturas del Profesorado y Licenciatura en Matemáticas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Catamarca. Desde la perspectiva de los avances tecnológicos dados por las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC's) que se ponen en evidencia por nuevos software, y que a su vez favorecen el desarrollo de las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC's) mediante la tarea de transferencia desde la enseñanza de las EED y el aporte desde la Programación Científica, permitiendo actualizar el software desarrollado en 1997 y utilizado en asignaturas optativas, para mejorar la presentación y manejo de pantalla, en la resolución de Problemas con valor inicial discretos (PVID) con EED de primer y segundo orden con coeficientes constantes, Sistemas de ecuaciones en diferencias (SEED) y Ecuaciones logísticas. Como resultado se presenta el software **Ecuaciones en diferencias** desarrollado íntegramente con el lenguaje de programación Microsoft Visual Basic 6.

Introducción

La presentación de las EED, mediante un desarrollo estructurado, no como frecuentemente se realiza en textos de análisis numérico donde su carácter es solo instrumental, permitió dar otro enfoque teórico y formal a las mismas. A ello se agrega las aplicaciones, sustancialmente aportadas desde la Biomatemática, y justificadas por Maynard Smith en su trabajo Ideas Matemáticas en Biología, donde observa a la reproducción con generaciones separadas y no separadas, como determinante en el tratamiento discreto o continuo de la modelización matemática

dinámica, para utilizar EED o Ecuaciones Diferenciales. De esto surgió la necesidad de estudiar la estabilidad de sucesiones soluciones de PVID, mediante un primer software realizado en el lenguaje de programación estructurado TRUE Basic, en 1997, y que fuera actualizado en el mismo lenguaje en 2005, agregando en él, SEED con dos y tres incógnitas con coeficientes constantes, y variando tipos de ecuaciones logísticas. Este software permitió realizar modelados de especies, solas o en competencias, y realizar el estudio de la estabilidad de las soluciones de estas ecuaciones, en el dictado de una asignatura Optativa para Biólogos. Aquí pretendemos presentar como resultado de una tarea de transferencia desde la enseñanza de las EED y el aporte desde la Programación Científica, la implementación del software que mejora la presentación y manejo de pantalla, en la resolución de PVID con EED de primer y segundo orden con coeficientes constantes, SEED y ecuaciones logísticas. Así el resultado es el software **Ecuaciones en diferencias** desarrollado íntegramente con el lenguaje de programación Microsoft Visual Basic 6.

Objetivos

- Difundir el estudio de las ecuaciones en diferencias en los profesorados en matemáticas mediante la implementación de un software, a fin de mostrar su carácter de herramienta en las matemáticas aplicadas.
- Aportar al desarrollo de software para implementar en la enseñanza aplicada de la matemática mediante modelos matemáticos dinámicos discretos.
- Fomentar la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación como una herramienta didáctica en el aprendizaje de los alumnos que cursen los profesorados de matemática.
- Propiciar el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC's) como herramientas que permitan favorecer el desarrollo de las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC's), a fin de tratar de orientar a las primeras en su carácter formativo para lograr la adquisición de conocimiento mediante la exploración.

Ecuaciones en Diferencias

Antes de adentrarnos en el desarrollo propio del trabajo, nos permitiremos comentar brevemente el contenido temático del software: *las ecuaciones en diferencias*, es decir, la teoría de referencia.

Las sucesiones recurrentes, son sucesiones en las cuales, cada término de la sucesión se obtiene a partir de algún o algunos términos anteriores de tal sucesión. De esta manera tenemos una igualdad en donde participan términos de una sucesión que no es conocida con lo cuál tal expresión es un ecuación donde la incógnita es una sucesión, que se denomina *ecuación en diferencias* (EED).

Si partimos del nombre y su forma histórica, las ecuaciones en diferencias hacen mención a la diferencia existente entre términos de la sucesión. De esta forma es fácil; advertir que este es el tratamiento discreto que tiene una ecuación variacional, que en forma continua, es una ecuación diferencial.

Por la inmediatez que tiene su enseñanza, pues solo requiere de un manejo algebraico, y no de una introducción al cálculo como es el caso de las ecuaciones diferenciales, y por otro lado, porque se continúa en el camino desde lo discreto a lo continuo. Es por todo esto que seguimos en la propuesta de iniciar el estudio variacional de modelos matemáticos discreto, y con ello de las EED.

Más aun, iniciando con las EED lineales con coeficientes constantes de primer y segundo orden, del tipo. Para constantes, a, b, d las ecuaciones son:

$x_{n+1} - ax_n = b$ donde $a \neq 0$ y $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = d$ donde $b \neq 0$, se estudia la solución general y las soluciones particulares, de cada ecuación, aplicando como método de resolución el de coeficientes indeterminados.

Problemas con valores iniciales

El conjunto solución de una EED de primer orden depende de una constante y se lo denomina la solución general. Determinar una solución, se logra conociendo un valor para la constante de la solución general, con lo cuál tal solución se denomina *solución particular*. Otro modo es fijar el valor inicial de la sucesión solución de la ecuación. De esta manera una ecuación junto al valor inicial, forman un PVID.

Por ejemplo:
$$\begin{cases} x_{n+1} - 4x_n = 5 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Es un PVID formado por una EED lineal de primer orden y un valor inicial.

La idea puede extenderse a EED lineales de orden mayor, para las cuales la solución general depende de tantas constantes como es el orden de la ecuación, y el PVID se forma con la EED lineal de un orden dado y tantos valores iniciales como el orden.

Sistemas de ecuaciones en diferencias.

Se entiende por un sistema de dos ecuaciones en diferencias (SEED) lineales de primer orden en dos sucesiones con coeficientes constantes a la expresión:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1 x_n + b_1 y_n + c_1 \\ y_{n+1} = a_2 x_n + b_2 y_n + c_2 \end{cases}$$

Si los coeficientes c_1 , c_2 son nulos el sistema se dice homogéneo. Si además los coeficientes a_i por un lado y los b_j por otro suman uno, el sistema se dice cerrado, y esto es propio a los problemas de poblaciones cerradas.

En forma análoga se define un sistema de tres ecuaciones en diferencias lineales de primer orden en tres sucesiones con coeficientes constantes.

Ecuaciones Logísticas

Un problema típico de una variación en un fenómeno, es el estudio de la estabilidad, es decir, analizar si existe un número al cual tienden todos los términos de la sucesión.

Este número puede o no existir, y en ciertos casos puede definirse un modelo en donde el valor de equilibrio de la sucesión determina el carácter estable de la sucesión. Un ejemplo importante es:

Dada una sucesión y el valor de equilibrio se forma la ecuación no lineal de primer orden, a partir de la suposición de que el crecimiento relativo de la sucesión es proporcional a la diferencia de tal sucesión respecto a ese valor de equilibrio.

Esto es, dada la sucesión x_n con equilibrio en el valor x_{Eq} , esto es $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_{Eq}$,

se propone que la tasa de variación relativa es proporcional a la diferencia respecto al valor de equilibrio, es decir:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \propto (x_{Eq} - x_n) \quad \text{ó} \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = c (x_{Eq} - x_n)$$

Llamando c a la constante de proporcionalidad. Esto se reescribe:

$$x_{n+1} = c(x_{Eq} - x_n)x_n + x_n$$

Es decir que los términos de la sucesión varían de acuerdo a su término anterior y a la diferencia del valor de equilibrio y el término anterior.

Puede escribirse también como $x_{n+1} = [c(x_{Eq} - x_n) + 1]x_n = c(x_{Eq} + 1)x_n - cx_n^2$

Esta ecuación en diferencias es de primer orden, cuadrática, con coeficientes constantes, y posee como dato el valor de equilibrio. Se denomina *ecuación logística*. Para diferenciar con la ecuación diferencial logística, la denominaremos *ecuación logística discreta*.

Según el supuesto que permitió definir a esta ecuación logística, es posible mostrar que la solución tiene un crecimiento desde el valor inicial, siempre que el valor inicial es menor a la mitad del valor de equilibrio, y al llegar a un cierto valor se desacelera para continuar creciendo lentamente para aproximarse a el valor de equilibrio.

Si el valor inicial es mayor que la mitad del valor de equilibrio, la sucesión solución crece desaceleradamente.

Más preciso, si el valor inicial es mayor que el valor de equilibrio, la sucesión solución decrece hasta este valor.

Como vimos la ecuación logística es una ecuación cuadrática de primer orden:

$x_{n+1} = ax_n - bx_n^2$. Aquí el valor de equilibrio está implícito.

Una tercera variante está en la denominada *ecuación logística normalizada*, es decir, donde los valores de la sucesión solución varían entre cero y uno para condición inicial ya conveniente. Esta ecuación es: $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$

En cualquiera de los casos tales ecuaciones junto al valor inicial forman el PVID que resuelve el Software Ecuación en Diferencia.

Estudio de la estabilidad de soluciones de Ecuaciones en Diferencias con software en Lenguaje Estructurado.

Antes revisemos los conceptos de estabilidad de soluciones de PVID.

Mencionaremos acerca del comportamiento de las sucesiones soluciones de las EED de segundo orden con coeficientes constantes $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = d$, con $b \neq 0$. Para ello en primer lugar consideramos la ecuación homogénea asociada.

Veremos que independientemente de los valores iniciales x_0 y x_1 , de la sucesión tal

solución tiende a cero según las raíces características.¹

Teorema 1: Sea la ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$. Sean ρ_1 y ρ_2 son las raíces características asociadas a la ecuación y ligamos. $\rho = \max(|\rho_1|, |\rho_2|)$, entonces la sucesión solución x_n converge a cero independientemente de los valores iniciales x_0 y x_1 , si y solo si $\rho < 1$.

Teorema 2: Si las raíces satisfacen $|\rho_1| > |\rho_2|$ y $|\rho_1| \leq 0$ ó ρ_1 es un número complejo no real, entonces la solución oscila alrededor del valor de equilibrio.

Teorema 3: Cualquier solución de la ecuación $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = d$ converge si y solo si los coeficientes de la ecuación característica satisfacen la relación: $|a| - 1 < b < 1$.

Aplicando estos enunciados, se puede escribir las proposiciones en términos de los coeficientes a y b , de la siguiente manera:

- I) Una solución de una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes que tiene un valor de equilibrio, oscila alrededor del valor de equilibrio si el discriminante $D = a^2 - b$ es negativo, o bien si no lo es y a es positivo, excepto en algunos casos en que toma valores iniciales especiales que hacen que las constantes C_1 ó C_2 resulten nulas.
- II) Todas las soluciones de una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes que tiene un valor de equilibrio son convergentes

¹ Si $A+A+b \neq 0$ y la solución tiene un valor de equilibrio, este es, $\frac{d}{1+a+b}$.

al valor de equilibrio si y solo si los coeficientes satisfacen la desigualdad:

$$|a| - 1 < b < 1$$

La proposición II) es la condición de estabilidad para las ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

La modelización matemática de fenómenos dinámicos puede plantearse en forma discreta mediante las ecuaciones en diferencias, siendo su importancia cuando estas responden a una tendencia a determinados valores sobre los que se puede mencionar que existe una estabilidad. Así, el estudio de la estabilidad de las soluciones de PVID fue realizado mediante software, creando un programa en lenguaje estructurado, siendo el mismo TRUE Basic. Este trabajo, realizado en 1997, tuvo la presentación que se indica en la figura 1, y en su menú muestra los trabajos que realiza (figura 2), tanto en forma algebraica (figura 3) como en forma grafica (figura 4), con las limitaciones que la tecnología ofrecía para aquella época.

Posteriormente, en 2002 se actualizó el software extendiendo los cálculos a sistemas de tres ecuaciones en diferencias con tres sucesiones incógnitas, y otras variantes de las ecuaciones logísticas (figuras 5 y 6).

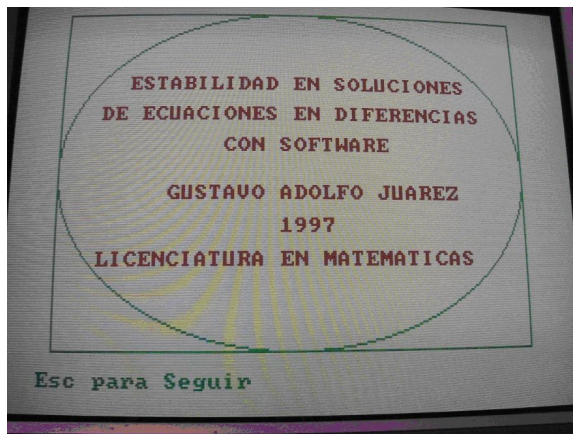


Figura 1: página de presentación del primer software para EED en TRUE Basic.

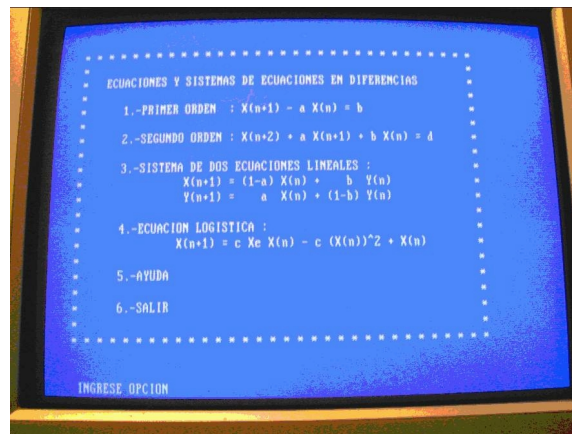


Figura 2: Menú de trabajo del primer software.

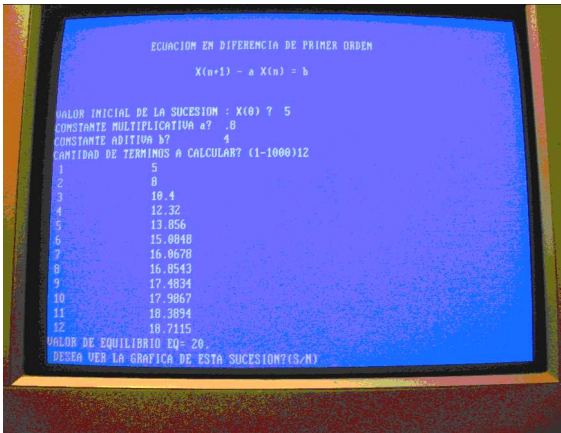


Figura 3: Resolución algebraica de un PVID de primer orden.

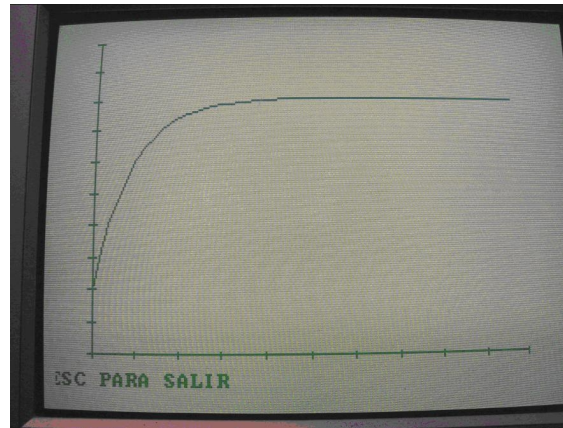


Figura 4: Resolución grafica de un PVID de primer orden.

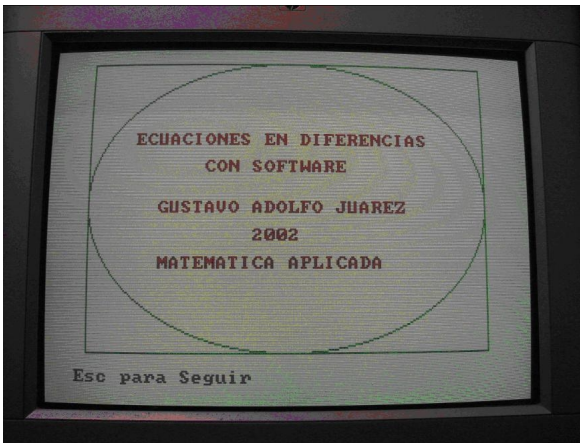


Figura 5: pagina de presentación del segundo software para EED en TRUE Basic.



Figura 6: Menú de trabajo del segundo software

Implementación del software Ecuaciones en Diferencia.

Desde la perspectiva de los avances tecnológicos dados por las TIC que se ponen en evidencia por nuevos software, y que a su vez favorecen el desarrollo de las TAC mediante la tarea de transferencia desde la enseñanza de las EED y el aporte desde la Programación Científica, permiten actualizar el Software Ecuaciones en Diferencia para mejorar la presentación y manejo de pantalla, tanto en la resolución de PVID con EED de primer y segundo orden con coeficientes constantes, como en sistemas de ecuaciones en diferencias y ecuaciones logísticas. Como resultado de este aporte se tiene la nueva versión cuya página de presentación se observa en la (figura 7).

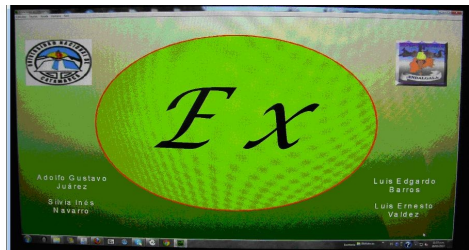


Figura 7: Página de inicio del nuevo software

Descripción del software Ecuaciones en Diferencias

El software “Ecuaciones en diferencias” fue desarrollado íntegramente con el lenguaje de programación Microsoft Visual Basic 6 con la siguiente estructuración:

1. Un formulario mdiForm (Formulario visdata) con el nombre de “Menu.frm”, que sirve como base de manejo del software con un área de ventana secundaria donde se mostrarán las otras ventanas (cálculos, gráfica y textos) y en el que se incorporó el siguiente menú en general:

a. Cálculos:

- i. Ecuaciones en diferencias de primer orden
- ii. Ecuaciones en diferencias de segundo orden
- iii. Sistemas de ecuaciones lineales
- iv. Ecuación logística

1. Ecuación logística
2. Ecuación logística normalizada

b. Teorías:

Libro de Ecuaciones en Diferencias: permite visualizar los distintos capítulos del libro en formato PDF “Ecuaciones en diferencias” de autoría de Gustavo Juárez y Silvia Navarro.

c. Ayuda con un sub menú Acerca de...

d. Ventana la que permite organizar las ventanas abiertas de tres formas distintas:

- i. Mosaico vertical.
- ii. Mosaico horizontal.
- iii. Cascada.

e. Salir: permite salir del software.

Su estructuración general fue realizada con subprogramas. Los textos que se utilizan en el software tienen el formato de PDF y de RTF.

Algunos ejemplos con el asistente

Para ilustrar el manejo del Software vamos a desarrollar algunos ejemplos citados en el texto de referencia.

Ejemplo Ilustrativo 1: A partir de la EED $x_{n+2} - 1,1x_{n+1} + bx_n = 4$, con las condiciones iniciales $x_0 = 6, x_1 = 8$, estudiar el comportamiento de las sucesiones del PVID, cuando el coeficiente b toma los valores: 0.9 ; 0.6 ; 0.4 y 0.3025.

Solución: En las figuras 8 a 12 se observan la pantalla de trabajo y las graficas de las cuatro sucesiones solicitadas.

Ecuaciones en Diferencias - [Ecuaciones en diferencias de 2º orden]

Cálculos Teorías Ayuda Ventana Salir

Ecuaciones en diferencias de segundo orden

Ecuación

$$x_{n+2} - 1.1 x_{n+1} + 0.9 x_n = 4$$

1º término de la sucesión: $x_0 = 6$

2º término de la sucesión: $x_1 = 8$

Cantidad de términos: 20

Respuestas

Raíz x1 = $0,550 + 1,195i$

Raíz x2 = $0,550 - 1,195i$

Valor de equilibrio $x_n^\infty = 5,0$

n	x_n
0	6,000000
1	8,000000
2	7,400000
3	4,940000
4	2,774000
5	2,695400

Teorías

ECUACIÓN EN DIFERENCIA DE SEGUNDO ORDEN

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = d$$

Donde $b \neq 0$

Al ingresar las constantes de la ecuación se calcula el valor de equilibrio y se resuelve la ecuación característica, a los fines de poder analizar la estabilidad de la sucesión solución. Recordemos que de las raíces características se determina el tipo de estabilidad. Tal valor de equilibrio es

$$x_n^\infty = \frac{d}{1+a+b}$$

En efecto:

1) Si de las raíces características aquella cuyo valor absoluto es mayor que el de las demás es negativa o compleja, entonces la sucesión oscila alrededor del valor

Figura 8: Pantalla de trabajo con los coeficientes ingresados y la respuesta dada de los términos y raíces características del Ejemplo ilustrativo 1. A la derecha un tutorial.

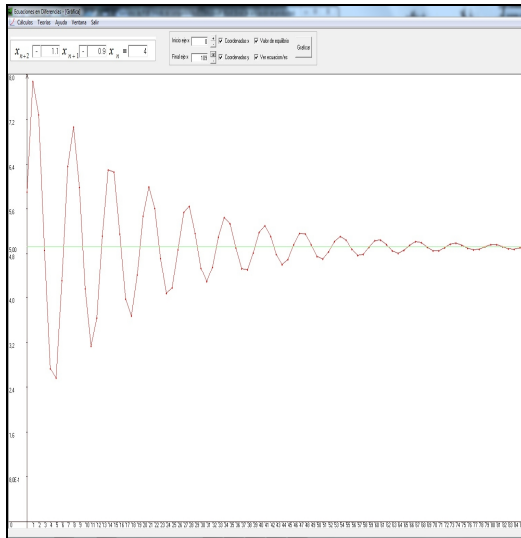


Figura 9: Grafica de la solución del PVID con $b=0.9$

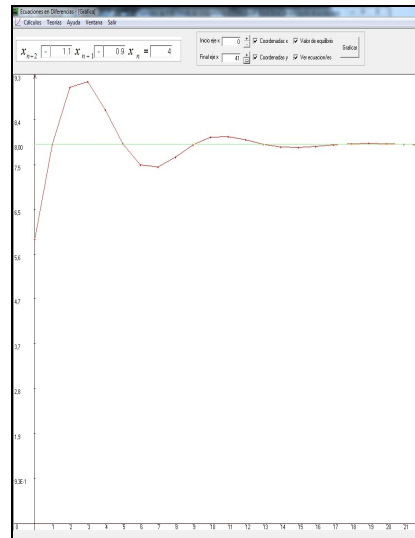


Figura 10: Grafica de la solución del PVID con $b=0.6$

Si bien en todos los casos se cumple la condición **II**), puede observarse que a medida que disminuye b , el valor de equilibrio aumenta, además se reduce la intensidad de la oscilación permitiendo que en el valor de $b = 0.3025$ desaparezca la oscilación. En efecto, se logra el valor de equilibrio con sólo un crecimiento, que es suave cuando se alcanza dicho valor. En realidad ese valor es particular, pues allí se verifica la nulidad del discriminante de la ecuación característica.

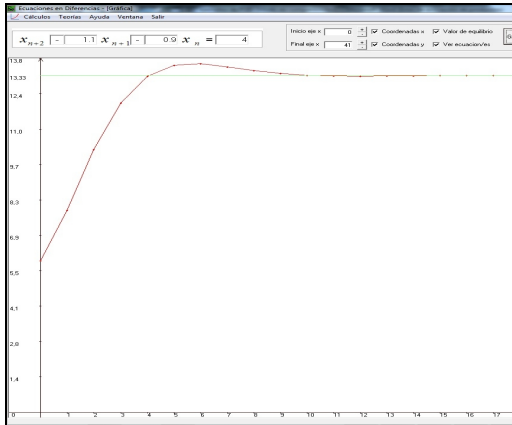


Figura 11: Gráfica de la solución del PVID con $b=0.4$

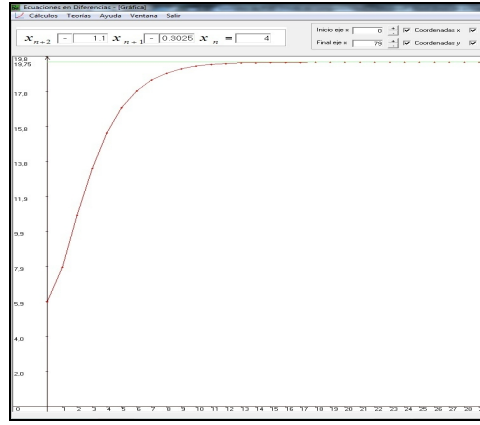


Figura 12: Gráfica de la solución del PVID con $b=0.3025$

Por otro lado el valor de equilibrio para cada sucesión es. 5; 8; 13.333 y 19.753086, respectivamente. Otro cálculo realizado es el de las raíces características, y resultan complejas para las tres primeras, mientras que la cuarta es nula.

Ejemplo Ilustrativo 2: Estudiar el comportamiento de la solución de la ecuación en diferencias $x_{n+2} + 1.8x_{n+1} + 0.81x_n = 8$, con las condiciones iniciales

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 4.$$

Solución: En las figuras 13 y 14 se observa el desarrollo del PVID propuesto.

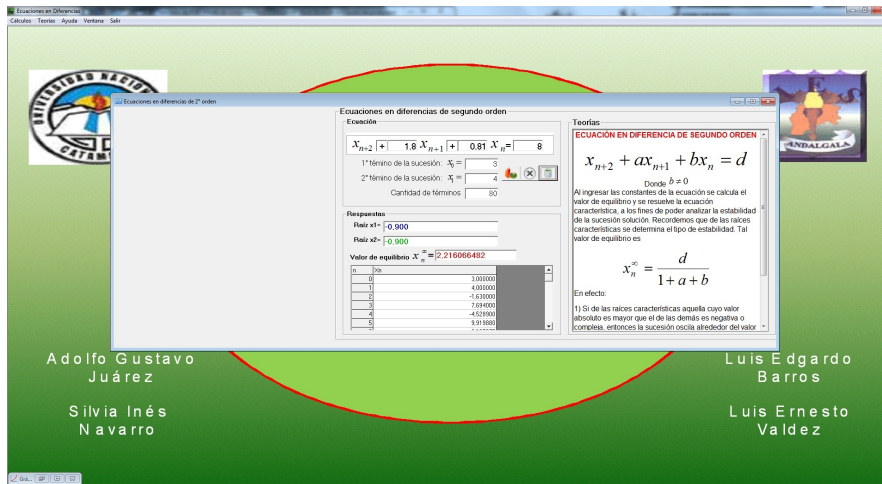


Figura 13: Pantalla de trabajo con los coeficientes ingresados y la respuesta dada de los términos y raíces características del Ejemplo ilustrativo 2. A la derecha un tutorial.

Aquí se verifica la nulidad del discriminante, con lo cuál las raíces son iguales, observándose un muy particular comportamiento: la oscilación comienza siendo divergente y luego de tomar una oscilación máxima procede a converger al valor de equilibrio. Así la condición **II)** se satisface.

En cuanto a las raíces características son reales e iguales a -0.9 ; y el valor de equilibrio es de aproximadamente 2.21606 valor al cuál se arriba alrededor de 200 iteraciones.

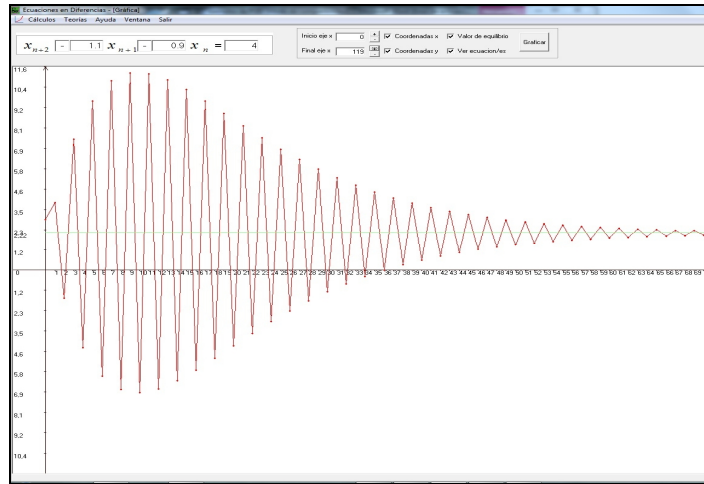


Figura 14: Gráfica de la solución del PVID del Ejemplo ilustrativo 2

Ejemplo Ilustrativo 3: Consideremos una población inicial de cuatro ejemplares que crece a ritmo acelerado en un principio para luego reducir su intensidad de crecimiento hasta alcanzar el valor estable de 80 individuos. Plantearemos el modelo logístico discreto, en donde la constante a de la tasa de crecimiento sea 0.01, es decir:

$$\begin{cases} N_{t+1} = 1.8N_t - 0.01N_t^2 \\ N_0 = 4 \end{cases}$$

Correspondiente al modelo logístico, cuyo PVID es:
$$\begin{cases} N_{t+1} = (1 + Ka)N_t - aN_t^2 \\ N_0 = C \end{cases}$$

La tasa de crecimiento es a y el valor de equilibrio se indica con K , también conocido como *capacidad de carga*, y significa el valor de equilibrio que alcanza la sucesión. El desarrollo del modelo logístico lo apreciamos en la figura 15.

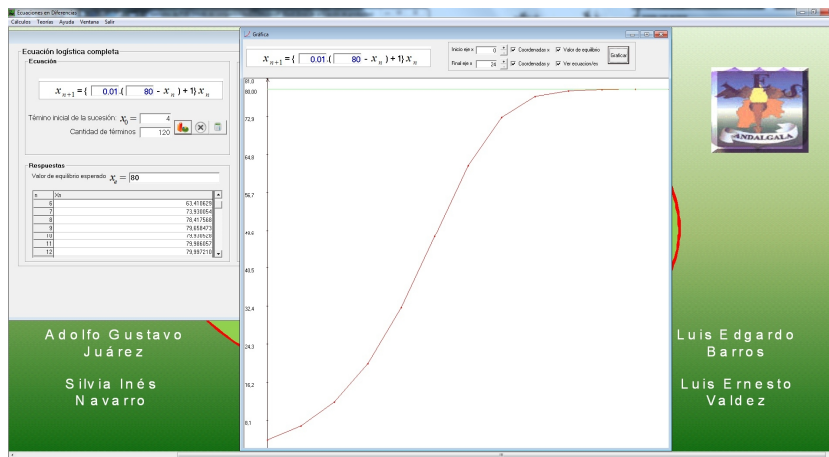


Figura 15: Gráfica de la solución del PVID del Ejemplo ilustrativo 3

Conclusiones:

El estudio de las Ecuaciones en Diferencias lineales con coeficientes constantes de primer y segundo orden, seguido de sistemas de ecuaciones en diferencias lineales con dos y tres ecuaciones y sucesiones incógnitas; y de las cuadráticas de primer orden denominadas logísticas, junto a sus soluciones algebraica y gráfica, presentadas en el texto de referencia de autoría, fue elaborado siguiendo resultados del software creado inicialmente con lenguaje de programación estructurado True Basic. Luego de una década y media, se lo actualiza con la tecnología vigente a un nuevo lenguaje: Visual Basic; pretendiendo continuar asistiendo al alumnado en la búsqueda de conclusiones a problemas de aplicación de diferentes ciencias en donde los modelos dinámicos discretos hacen posible representar fenómenos determinísticos, alcanzando objetivos de difusión y enseñanza de un tema que es poco frecuente en planes de estudio de formaciones de profesorado en Matemáticas. Como resultado se cuenta con la participación en la formación en seminarios u optativas en carreras de Física y Biología, y en Matemáticas con las aplicaciones inmediatas de matemática financiera y biología matemática, en Asignaturas como Biomatemática y Modelos Matemáticos. Por otro lado la participación de la Cátedra de Programación Científica permite alcanzar el objetivo del desarrollo del software y utilización de las TIC's en la enseñanza de temas de Matemática Aplicada aportando

a la implementación de una herramienta de transferencia tecnológica en el proceso de Aprendizaje y adquisición de conocimiento (TAC), en particular de los modelos matemáticos dinámicos discretos.

Referencias:

- Takahashi T. (1990). Ecuaciones en Diferencias con aplicaciones. Editorial Grupo Ed. Iberoamericana.
- Smith M. (1977). Ideas Matemáticas en Biología. Compañía Editorial Continental.
- Bassanezi C. R. (2002). Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. Editora Contexto.
- Kemeny J.G., Kurtz T. E. (1985). TRUE Basic. The Structured Language System for the Future. Addison -Wesley Publishing Company Inc.
- Juárez G., Navarro S. (2005). Ecuaciones en Diferencias con aplicaciones en modelos en sistemas dinámicos. Editorial Sarquís. Catamarca.
- Juárez G., Navarro S. (2005). Ecuaciones en Diferencias con aplicaciones en modelos en sistemas dinámicos. Curso para Alumnos. Reunión Anual UMA. Salta.
- Juárez G., Navarro S. (2004). Ecuaciones Logísticas discreta y continua. Comunicación REM. Reunión Anual Unión Matemática Argentina. Neuquén.
- Juárez G., Navarro S., Berrondo L. (2005). Las ecuaciones en diferencias en la formación matemática. Comunicación REM. Reunión Anual UMA. Salta.
- Juárez G., Navarro S. (2011). Problemas discretos con valores iniciales. Revista de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. Volumen 26 – N° 2. pp. 3-13.
- Valdez, Luis Ernesto. 2009. Matemática Financiera. Ed. Científica Universitaria. Catamarca.

Valdez Luis Ernesto. Instituto Superior Andalgalá – Catamarca.

Juarez Gustavo Adolfo. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – UNCa.

juarez.catamarca@gmail.com

Navarro Silvia Inés. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – UNCa.

Barros Luis Edgardo. Instituto Superior Andalgalá – Catamarca.

