Revista Sociedad y Economía. Número 10, abril de 2006, págs. 123 a 155

Fundamentos microeconómicos de la macroeconomía del crecimiento desbalanceado

Leonardo Raffo López*

Resumen

En este artículo se reconstruye el modelo de crecimiento desbalanceado de Baumol. La revisión de sus proposiciones fundamentales mediante una nueva versión del modelo que incorpora el análisis de la demanda, devela que no es cierto que en el modelo de productividad desbalanceada los outputs del sector "no progresivo" tiendan a declinar en el tiempo. La solución del problema de control óptimo consustancial al modelo, revela que los resultados de libre mercado no son óptimos en el sentido de Pareto: La intervención del Estado es esencial no sólo para internalizar las externalidades negativas en el consumo, sino también para corregir la ineficiencia dinámica coligada al crecimiento desequilibrado de las productividades.

Abstract

This paper intends to reformulate the famous Baumol's macroeconomics model of unbalanced growth. The inspection of its basic tenets using a new version of the model that includes the demand side of analysis shows that it is unfounded to say that there is a tendency for the outputs of the "nonprogressive" sector to dwindle progressively in time. The solution of the optimum control problem for the model reveals that free market solutions are not Pareto optima. The government intervention is essential to match negative consumption's externalities created by increasing urbanisation, but also to correct the dynamic inefficiency induced by the unbalanced growth of productivity..

Palabras clave: Crecimiento desbalanceado, cambio estructural, enfermedad de costos, urbanización, externalidades en el consumo, ineficiencia dinámica.

Clasificacíon JEL: O11, O12, O14, 018, 041.

* Economista. Estudiante de la Maestría en Economía Aplicada de la Universidad del Valle, profesor en el Departamento de Economía y miembro del grupo de Crecimiento y Desarrollo Económico de esa Universidad. Correo electrónico leoraff@yahoo.es.

> Revisionism usually supplies whatever excitement there is to be found in writings on dogmengeschichte.
>
> William Baumol (1979). “Say's (At least) Eight Laws, or what Say and James Mill Really have Meant”

El propósito de este trabajo es exponer la microeconomía básica implícita en el famoso modelo macroeconómico de crecimiento desbalanceado de William Baumol (1967) con el objeto de elucidar la interpretación correcta de las 4 proposiciones establecidas en el artículo original, así como modelar el papel de las externalidades negativas producidas por el crecimiento desequilibrado en las ciudades. En particular, interesa aclarar las predicciones del modelo alrededor de los procesos de cambio estructural,[1] cuyo estudio ha recobrado gran interés recientemente a partir de los trabajos de Kongsamut, Rebelo y Xie (2001); Föllmi y Zweimüller (2002), y F Ngai L.R. y C.A. Pissarides (2004), donde se dan las pautas de lo que conjeturo, constituye un nuevo programa de investigación en la teoría del crecimiento económico enfocado en el estudio de trayectorias de crecimiento balanceado con cambio estructural.[2] Se trata entonces de un esfuerzo *de aclaración por medio de la reformulación* (Kuhn 1971, p. 65) cuya recompensa es mejorar la comprensión del planteamiento de Baumol, el cual es considerado en la literatura de crecimiento económico como el primer intento sistemático de abordar el análisis de los procesos de cambio estructural en el tiempo, de modo que una revisión exhaustiva del mismo proporciona elementos claves en la investigación de los fenómenos que gobiernan esos procesos.

Para ello, se retoma su modelo en la primera sección. En la segunda sección se discuten los alcances y limitaciones de las proposiciones establecidas. Luego se expone una versión alternativa del modelo en la que se desarrolla el análisis de la demanda, inexistente en el artículo original de 1967 y se definen proposiciones sobre los procesos de cambio estructural. A continuación se resuelve el problema de control óptimo intrínseco al modelo, proponiendo un nuevo modelo en el que se introducen externalidades negativas en el consumo derivadas del crecimiento desbalanceado y se endogeniza el avance tecnológico en el sector progresivo. Con esto último se pretende modelar aquellas externalidades negativas que aquejan a

1 Por cambio estructural entiendo los cambios progresivos y sostenidos en las proporciones en que se distribuye el producto y el empleo entre sectores a lo largo del tiempo.

2 Para una semblanza sobre este nuevo programa de investigación en la teoría del crecimiento económico ver Raffo (2004). La pregunta de investigación *seminal* fue concebida por Kongasamut, Rebelo y Xie (2001): “is there a growth model that is consistent with the Kaldor facts and the massive reallocation experienced in the U. S. During the last century? (Kogsamut 2001, p. 3).

las grandes ciudades como consecuencia de la llamada *enfermedad de los costos*, que es la fuerza económica que motiva el crecimiento desigual de los sectores y el crecimiento desordenado e insostenible de muchas ciudades. Esto va con el espíritu del trabajo de Baumol, que era aproximarse a la comprensión de las crisis urbanas esclareciendo las principales fuerzas económicas que explican el crecimiento desbalanceado. Finalmente se derivan conclusiones sobre las predicciones fundamentales.

El modelo de Baumol[3]

En su artículo de 1967 Baumol expone un modelo macroeconómico sencillo que permite avanzar en la comprensión de lo que, según él, constituye uno de los mecanismos económicos capaces de romper cualquier barrera que pueda erigirse para su supresión: se trata del incremento progresivo y acumulativo de los costos reales[4] incurridos en la oferta de una gran variedad de servicios económicos como el gobierno municipal, la educación, las artes, los restaurantes, y actividades de ocio. (Baumol 1967, p. 415). Tal mecanismo, supuestamente inherente a la estructura tecnológica de las actividades en que se gesta, fue denominado por Baumol enfermedad de los costos (*cost disease*).

Supuestos

La premisa esencial del modelo es que las actividades económicas pueden ser agrupadas no del todo arbitrariamente en dos tipos: actividades tecnológicamente progresivas en las que las innovaciones, la acumulación de capital, y las economías de gran escala hacen que se presente un crecimiento acumulativo en el producto por hora de trabajo, y actividades que, por su propia naturaleza, permiten únicamente esporádicos incrementos en la productividad (ibíd*.,* pp. 415-416). Mientras las primeras corresponden a la producción de manufacturas (sector 2 en el modelo de Baumol), las segundas corresponden a la producción de servicios (sector 1 en el modelo de Baumol). Con esto, Baumol pretende hacer hincapié en que esta clasificación no es una “cuestión fortuita determinada por las particularidades de su historia, sino más bien una manifestación de la estructura tecnológica de las actividades, la cual determina si la productividad del trabajo crece lentamente o rápidamente” (ibíd., p. 416). En este sentido, la fuente de dicha diferenciación sería el rol jugado por el trabajo en el proceso de producción: Si bien en las actividades tecnológicamente progresivas el trabajo actúa como un

3 Esta sección se limita a exponer el modelo original de Baumol tal como el mismo lo hizo en su artículo de 1967.

4 Como se analizará luego, aquí Baumol interpreta los “costos reales” de tales actividades terciarias como el costo de oportunidad de las mismas en términos de las demás actividades - actividades tecnológicamente progresivas en su modelo.

"instrumento" requerido para transformar la materia prima en bienes terminados, en las actividades no progresivas el trabajo es en sí mismo prácticamente el producto final, y la calidad del producto se juzga directamente por la calidad del trabajo realizado. Claro ejemplo del primer tipo de actividades son los diversos tipos de manufacturas existentes, y de las del segundo tipo lo son, entre otros, la educación, las artes, los restaurantes y las actividades de esparcimiento.

Adicionalmente, se plantean otras tres premisas de las cuales sólo una es indispensable. Las otras dos según el propio Baumol constituyen supuestos simplificadores. Se supone que los salarios nominales de los dos sectores de la economía suben y bajan juntos, esto es, que existe un único mercado laboral que funciona en condiciones competitivas garantizando la movilidad intersectorial de la mano de obra. Éste supuesto se considera relevante a diferencia de los dos restantes, por lo que de su presencia depende el cumplimiento de las predicciones del modelo. También se asume que todos los gastos distintos a los costos laborales pueden ser ignorados. Por último, se supone que los salarios nominales crecen tanto como la productividad por hora en el sector en el que aquella está creciendo.

Planteamiento

Las funciones de producción de los sectores no progresivo y progresivo se expresan respectivamente por

$$Y_{1t} = aL_{1t} \qquad (1)$$

$$Y_{2t} = bL_{2t}e^{rt} \qquad (2)$$

Donde Y_{1t} y Y_{2t} representan los niveles de producción del sector no progresivo (servicios) y el sector progresivo (manufacturas) respectivamente, L_{1t} y L_{2t} representan las cantidades de trabajo empleado en los sectores. La productividad media del trabajo en el sector no progresivo es constante e igual a a,mientras que la del sector progresivo crece acumulativamente en el tiempo a una tasa constante r.[5]

Los salarios nominales son iguales entre sectores y crecen también exponencialmente (en consonancia con la productividad del sector 2).

$$W_t = We^{rt}. \qquad (3)$$

Aquí W es una constante arbitraria que representa en el salario nominal en el

[5] Note que por el supuesto de funciones de producción lineales las productividades medias del trabajo son idénticas a las productividades marginales.

momento *t=0.*

Proposición 1*: el costo por unidad de output en el sector 1,* C_{1t} *, crecerá sin límite, mientras que* C_{2t} *, el costo unitario en el sector 2 , se mantendrá constante.*

Prueba:

$$C_{1t} = W_t L_{1t} / Y_{1t} = We^{rt} L_{1t} / aL_{1t} = We^{rt} / a$$

$$C_{2t} = W_t L_{2t} / Y_{2t} = We^{rt} L_{2t} / aL_{2t} e^{rt} = W / b$$

Los costos *relativos* se comportarán de esta manera es decir, los del sector no progresivo creciendo y los del sector progresivo disminuyendo independientemente de la definición del salario nominal, que en este caso viene dada por (3) (ibíd., p. 418).

Como $C_{1t} / C_{2t} = \left(\left(L_{1t} / Y_{1t}\right) / \left(L_{2t} / Y_{2t}\right)\right) = be^{rt} / a.$

Queda claro que el costo relativo del bien 1 tiende a crecer sin límite en el tiempo.

Según Baumol, si la elasticidad precio de demanda para los dos bienes es unitaria o al menos no muy inelástica y los precios en condiciones de competencia son proporcionales a los costos, entonces la demanda del bien 1 debe declinar en el tiempo, a pesar de que los gastos monetarios relativos de los bienes se mantengan constantes. Se tiene

$$\frac{C_{1t} Y_{1t}}{C_{2t} Y_{2t}} = \frac{We^{rt} L_{1t}}{We^{rt} L_{2t}} = \frac{L_{1t}}{L_{2t}} = A$$, en donde *A* es una constante. Así mismo,

$Y_{1t} / Y_{2t} = aL_{1t} / bL_{2t} e^{rt} = aA / be^{rt}$, que tiende a cero con el paso del tiempo.

Proposición 2:[6] *En el modelo de productividad desbalanceada los output del sector no progresivo, cuyas demandas no son altamente inelásticas, tienden a declinar en el tiempo.*

Ahora supóngase, como se hace en el artículo original de Baumol, que la magnitud de los output de los dos sectores es mantenida constante *ad hoc*, a pesar del cambio en sus costos relativos, tal vez a través de una política gubernamental de subsidios aplicada al sector no progresivo por el gobierno. En ese caso, se tendría,

$$(b/a) Y_{1t} / Y_{2t} = L_{1t} / L_{2t} e^{rt} = K,$$

6 No se presenta formalmente la prueba, como hace el mismo Baumol.

En donde $(a/b)K$ representa la constante a la que se fija la tasa de output a través de la política prescrita.[7]

Sea $L = L_{1t} + L_{2t}$ la oferta de trabajo total. Se sigue entonces de la expresión anterior que

$$L_{1t} = (L - L_{1t})Ke^{rt} \quad \text{o} \quad L_{1t} = LKe^{rt}/(1 + Ke^{rt}) \qquad (4) \qquad \text{y}$$

$$L_{2t} = L - L_{1t} = L/(1 + Ke^{rt}) \qquad (5)$$

Y se tiene que:

$$\lim_{t\to\infty} L_1 = L \text{ , y } \lim_{t\to\infty} L_2 = 0 \text{ .}$$

Proposición 3: *Si la tasa de output de los sectores se mantiene constante, una parte creciente de la mano de obra total tiene que ser transferida al sector no progresivo a medida que transcurre el tiempo, y la cantidad de trabajo asignada al sector progresivo tiende paulatinamente a cero.*

Finalmente, Baumol prueba que en el caso de aplicar tal suerte de políticas, la tasa de crecimiento de la economía tiende irremediablemente a cero en el tiempo. Definiendo como índice del producto total a un promedio ponderado de los output de los sectores se obtiene

$$I_t = B_1Y_{1t} + B_2Y_{2t} = B_1aL_{1t} + B_2bL_{2t}e^{rt},$$

De modo que con (4) y (5):

$$I = L(KB_1a + B_2b)e^{rt}/(1 + Ke^{rt}) = \mathrm{R}e^{rt}/(1 + Ke^{rt}), \text{ en donde } R = L(KB_1a + B_2b) \text{ .}$$

De aquí se deduce que:

$(dI/dt)/I = r/(1 + Ke^{rt})$, Lo que claramente decrece hasta cero con el tiempo.

7 Baumol no precisa formalmente como logra esto el gobierno mediante subsidios. De hecho, en su modelo no se modela al sector público.

Alcance y limitaciones de las proposiciones

No interesa discutir los supuestos del modelo sino su consistencia interna. Por ello se desglosan y discuten las cuatro proposiciones planteadas, aunque no se darán lecturas definitivas de las mismas sino hasta la siguiente sección, cuando se exponga la versión microfundamentada del modelo.

La primera proposición resulta ser en si misma clara y verdadera, aunque contrariamente a lo afirmado por Baumol si parece depender de la hipótesis específica establecida sobre los salarios nominales, por lo que el tercer supuesto no sería simplemente un comodín para resolver el modelo. Puede verse rápidamente que si se acoge la hipótesis antagónica de que el crecimiento de los salarios nominales va a la par del de la productividad del sector no progresivo y siendo así, se mantiene inalterado, entonces no se cumpliría la proposición, obteniéndose que el costo unitario en el sector no progresivo se mantiene constante, mientras el del sector progresivo disminuye sin límite. Recuérdese que no interesa discutir aquí la validez de esta suposición o cualquier otra, pero lo cierto es que de relajarse el supuesto explícito en (3) ya no sería posible inferir tal afirmación.

Lo que sí es inquebrantable es el corolario de la proposición: En efecto, independientemente de la hipótesis específica de crecimiento exponencial en los salarios nominales (ecuación (3)), el *costo relativo* del sector progresivo sube sin límite. Aunque en este punto se ha recreado otra discusión planteada originalmente por Joan Robinson 2 años después de la publicación del artículo, la cual fue motivada por la afirmación de Baumol en la introducción de su artículo sobre el “prácticamente inevitable incremento acumulativo y progresivo en los *costos reales* incurridos al ofrecer los bienes del sector no progresivo”. Según Mrs. Robinson (1969) es incorrecto hablar de costos reales, porque a pesar de que el costo nominal del sector 2 crece (como lo hace el costo relativo) el salario nominal de los trabajadores también lo hace (por hipótesis), manteniéndose constante su poder adquisitivo. Al respecto, Baumol replicó que por costo unitario *real* de un servicio entendía su *costo de oportunidad* (esto es, la cantidad de unidades del otro bien a la que se debe renunciar por producir una unidad de servicios). (Baumol 1969). Esta última es, sin duda, la interpretación correcta de la definición de costos reales que opera en la proposición 1.

La segunda proposición es quizá la más importante pero a la vez menos precisa de entre las cuatro proposiciones, puesto que su cumplimiento y comprensión depende ante todo del comportamiento de la demanda, que en buena medida se deja de lado en el artículo original. Como se verá en lo siguiente, la proposición *en sí* es incorrecta, puesto que no es necesariamente cierto que e*n el modelo de productividad desbalanceada los output del sector no progresivo, cuyas demandas no son altamente inelásticas, tienden a declinar en el tiempo*.

Es una verdad evidente que en una economía competitiva caracterizada por el vaciamiento de los mercados en la que los precios se ajustan de acuerdo a las fuerzas de la competencia, el *output relativo* del sector 1 tiende a disminuir en el tiempo si las demandas de los bienes no son muy inelásticas, debido al crecimiento exponencial de la productividad en las actividades progresivas; y esto puede corroborarse dividiendo (1) sobre (2) si se logra probar que la cantidad relativa de mano de obra empleada en el sector 1 es constante. Pero esto no significa que los output del sector no progresivo tiendan a desaparecer como plantea Baumol (1967)-, ya que si el salario nominal crece exponencialmente en el tiempo y las demandas de los bienes son lo suficientemente elásticas con respecto a la renta, entonces las demandas y por ende las producciones de los dos bienes al menos se mantienen constantes en el tiempo, a no ser de que la elasticidad precio de demanda al igual que la elasticidad de sustitución de los bienes fuese tan alta como para que los efectos renta en el consumo del bien cuyo precio sube en el tiempo (el de las actividades no progresivas) fuera mas que compensado. En tal caso, la producción del bien 1 sí estaría condenada a extinguirse en el tiempo. Sin embargo, este caso prácticamente excepcional es inconsistente con el corolario de la proposición, que establece que las participaciones del gasto por sectores (en términos monetarios) son constantes en el tiempo, y por ende debe descartarse. El problema es que Baumol no es claro a la hora de definir el tipo de elasticidades que poseen las dos clases de bienes, y esto le impide desarrollar una teoría de la estructura del gasto para su modelo. He ahí la importancia de desarrollar explícitamente el lado de la demanda, y en particular, de analizar el comportamiento de las participaciones monetarias del gasto en el tiempo. Aquí se constata la relevancia de poseer una teoría general de la dinámica de la estructura de gasto, que permita hacer inferencias contundentes sobre los procesos de cambio estructural en los modelos de crecimiento económico de más de un sector productivo.[8]

Así, lo que predice en realidad el modelo de Baumol es que el *output relativo* del bien 1 disminuye, en tanto que la cantidad de producción de este se mantiene constante en el tiempo. Porque si la demanda de los bienes no es inelástica con respecto a sus precios, entonces al subir exponencialmente el precio relativo del bien 1 hay un efecto que hace que disminuya relativamente su demanda, mientras que el incremento exponencial en el salario impulsa otro efecto en el sentido contrario exactamente en la misma proporción del primero, que hace que se incremente la demanda permitiendo que las participaciones del gasto (en términos monetarios) o los gastos relativos no cambien, tal como lo establece el corolario de

8 Tal teoría ha venido desarrollándose en el marco de una investigación sobre los procesos de cambio estructural y el crecimiento económico que se adelanta en el Grupo de Crecimiento Económico y Desarrollo de la Universidad del Valle. V..

la proposición.[9] Es clave comprender que a pesar de que los efectos sustitución constituyen fuerzas que tienden a deprimir la demanda de 1, no logran ser mas fuertes que los efectos renta impulsados por el crecimiento en los salarios, y que este hecho es consistente con el hecho de que las participaciones monetarias del gasto se mantienen constantes a lo largo del tiempo. La idea crucial aquí es que si las participaciones del gasto se mantienen constantes en el tiempo es porque la elasticidad ingreso de demanda de los dos bienes al igual que la elasticidad de sustitución es unitaria. En efecto, puede probarse que si la elasticidad de sustitución en el consumo es unitaria, una condición suficiente para que no haya cambio estructural y así las participaciones monetarias del gasto sean constantes es que la elasticidad ingreso de demanda de los bienes sea unitaria. (Raffo 2004, 2005). En vista de esto, con una elasticidad-renta unitaria en el consumo de 1, y una elasticidad de sustitución unitaria en el consumo, no hay razones para que la producción de ambos bienes disminuya en el tiempo, a pesar de que el output relativo de 1 efectivamente disminuya progresivamente.[10] Por lo tanto si se afirma como lo hace Mara Harvey (1998, p. 11) que sólo se tienen las siguientes dos alternativas para explicar el verdadero sentido económico de la proposición 2: a) que Y_{1t} varía a la misma velocidad de C_{1t} pero en sentido opuesto y que Y_{2t} se mantiene constante. b) que Y_{1t} es constante y Y_{2t} crece al mismo ritmo de C_{1t}. La alternativa correcta es la segunda, como acertadamente ella misma concluye. Desde luego, para que esta interpretación tenga sentido debe cumplirse necesariamente el supuesto de crecimiento exponencial en el salario nominal. Razón por la que, de nuevo, como en el caso de la primera proposición, este supuesto contrariamente a lo previsto por el propio Baumol no es contingente, sino necesario. De hecho, más que una premisa es un resultado obligado en condiciones de competencia perfecta, como se verá en la siguiente sección.

El otro corolario de la proposición es que la cantidad relativa de mano de obra en el sector 1 se mantiene constante. Esto se deduce de manera inmediata de la constancia del gasto relativo de 1, ya que tal como se observa en la nota 10, $\frac{C_{1t}Y_{1t}}{C_{2t}Y_{2t}} = \frac{L_{1t}}{L_{2t}} = A$. En efecto, puede probarse que en presencia de pleno empleo, las participaciones de la mano obra empleada en cada sector (con respecto a la mano de obra total) se mantienen constantes sí y sólo si la estructura

9 Note que $\frac{C_{1t}Y_{1t}}{C_{2t}Y_{2t}} = \frac{We^{rt}L_{1t}}{We^{rt}L_{2t}} = \frac{L_{1t}}{L_{2t}} = A$ es constante sí y sólo si $\frac{C_{1t}Y_{1t}}{I_t}$, y $\frac{C_{2t}Y_{2t}}{I_t}$ son constantes. (Donde I es un índice del producto total).

10 En la siguiente sección se prueba lo anterior con la versión alternativa del modelo en la cual se supone que las preferencias de los consumidores implican elasticidades renta y de sustitución unitarias. La elasticidad de sustitución unitaria garantiza que las variaciones en los precios no induzcan cambio estructural, mientras que la unicidad de la elasticidad-ingreso garantiza que no hay cambio estructural impulsado por variaciones en los salarios o en el ingreso per cápita.

del gasto también lo hace.[11]

La tercera proposición no plantea ninguna discusión que la pueda invalidar. Es absolutamente claro que si la tasa de output de los dos sectores fuese mantenida constante “artificialmente” a través de la intervención del Estado en la economía, la mano de obra tiende en el tiempo a ser absorbida en su totalidad por el sector no progresivo. La pregunta que surge en esta parte es ¿cuál es la tasa óptima de output que debe establecer un planificador central para maximizar el bienestar? O en otras palabras, ¿cuáles son las tasas de crecimiento óptimas en el empleo y la producción de cada sector? Para responder a esta pregunta, que por cierto resulta ser fundamental de acuerdo con el propósito del trabajo de Baumol (1967), en la cuarta parte de este artículo se plantea y se resuelve el problema de optimización intertemporal consustancial al modelo que tendría que afrontar un planificador central si se quieren hallar las sendas óptimas del empleo y la producción sectoriales. Los resultados pueden mostrar qué tan lejos están las asignaciones de mercado de ser eficientes en el tiempo, y de qué manera debe intervenir el estado para aplacar el impacto del crecimiento desbalanceado presente en las grandes ciudades. ¿Es el crecimiento balanceado la mejor alternativa posible en un mundo de productividad desbalanceada?

La cuarta proposición tampoco plantea duda alguna, aunque Baumol no demuestra realmente que si *el gobierno intenta sostener crecimiento balanceado, entonces la tasa de crecimiento del output disminuye con respecto a la tasa de crecimiento de la mano de obra*. Esto se debe a que su prueba resulta ser poco general al suponer que la mano de obra no crece. Sin embargo suponiendo que la mano de obra crece a una tasa constante, puede probarse que Baumol estaba en lo correcto.[12]

11 En otras palabras, en ese tipo de modelos de equilibrio general de varios sectores con competencia perfecta, las transformaciones en las participaciones del gasto en términos monetarios están íntimamente ligadas a las transformaciones de las proporciones de mano de obra empleada por sectores. Por ello el cambio estructural se expresa como los cambios progresivos de las participaciones del gasto y de la mano de obra que se presentan a lo largo del tiempo. Note que también se tiene que $\frac{C_1Y_1}{C_2Y_2}=\frac{We^{rt}L_{1t}}{We^{rt}L_{2t}}=\frac{L_{1t}}{L_{2t}}=A$ es constante sí y sólo si $\frac{L_{1t}}{L_t}$, y $\frac{L_{2t}}{L_t}$ son constantes. Ver Raffo (2005) donde en el contexto de un modelo de crecimiento exógeno de tres sectores se analizan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de cambio estructural, definiendo este último como los cambios progresivos en las participaciones del gasto y el empleo por sectores (en términos monetarios).

12 Ver Harvey (1998).

Una nueva versión del modelo de Baumol

En esta sección se expone una nueva versión del modelo de Baumol en la que se incluyen las preferencias de los trabajadores. Esto permite desarrollar el lado de la demanda y da bases para inferir la correcta interpretación de las proposiciones establecidas originalmente por Baumol.

Supuestos

Se parte exactamente de la misma estructura productiva concebida por Baumol. A diferencia del planteamiento original, no se establece *a priori* ningún supuesto sobre los salarios nominales, sino que su determinación se deduce del problema de maximización de las empresas para cada una de las industrias, en el contexto de una economía caracterizada por la existencia de un único mercado laboral que funciona perfectamente.[13] Por otra parte, se supone que los trabajadores tienen preferencias del tipo Cobb-Douglas que, como es bien sabido, son homotéticas e implican la existencia de elasticidad de sustitución unitaria en el consumo, así como la presencia de funciones de demanda con elasticidades-precio y de ingreso unitarias. Por último, se supone que hay competencia perfecta en los dos sectores y en la economía en su conjunto

Planteamiento

Sean (6) y (7) las funciones de producción respectivas de los dos sectores

$$Y_{1t} = aL_{1t} \qquad (6)$$
$$Y_{2t} = b^* L_{2t} \quad , \qquad (7)$$

Donde como antes Y_{1t} y Y_{2t} representan los niveles de producción del sector no progresivo (servicios) y el sector progresivo (manufacturas) respectivamente, L_{1t} y L_{2t} representan las cantidades de trabajo utilizado en los sectores. La productividad media del trabajo en el sector no progresivo es constante e igual a a mientras que la del sector progresivo es b^* definida como

13 Algunos autores como J.W. Birch y C.A. Cramer afirman que lo que garantiza que los salarios estén determinados por el comportamiento de la productividad del sector progresivo es un efecto de difusión de los mismos entre los dos sectores que depende de la proporción de la mano obra asignada al sector progresivo. Éste es llamado *efecto de proporción de la mano de obra*; Wage diffusion will only be effective if enough demonstration of that wage level exists in the labor market. The demonstrative effect is measured in our model by the labor proportion effect. (J.W. Birch y C.A. Cramer 1968, p. 394).

$$b^* = be^{rt}, \qquad (8)$$

En donde r es la tasa de crecimiento constante de la productividad.

La ecuación de pleno empleo exige que la oferta de trabajo - perfectamente inelástica al salario real - sea asignada exhaustivamente entre los dos sectores.

$$\bar{L} = L_{1t} + L_{2t}. \qquad (9)$$

Las preferencias del trabajador representativo son

$$u(c_{1t}, c_{2t}) = Zc_{1t}^{\alpha_1} c_{2t}^{\alpha_2} \qquad (10)$$

Donde c_1 y c_2 representan las cantidades consumidas por cada trabajador de servicios y manufacturas, respectivamente; como es usual α_1 y α_2 son las participaciones constantes del gasto en los bienes 1 y 2 respectivamente. Se tiene, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Z es un parámetro positivo que afecta positivamente la utilidad y depende negativamente de las externalidades negativas producidas por el crecimiento desequilibrado en las ciudades. Los consumidores suponen que Z es constante y no son capaces de detectar de qué depende.

Por último, en equilibrio debe tenerse que la oferta y la demanda de los mercados se igualan, aunque como se sabe - por la ley de Walras - basta con verificar que un solo mercado se clarifica para garantizar que el mercado restante también lo hace. Se establece que

$$p_t Y_{1t} = p_t c_{1t} \bar{L} \qquad (11) \quad \text{y}$$
$$Y_{2t} = c_{2t} \bar{L} \qquad (12)$$

Donde p_t es el precio relativo de las manufacturas con respecto a los servicios. El precio nominal de las manufacturas se ha normalizado a uno, razón por la que el precio relativo de los servicios coincide con su precio nominal.

Producción

Bajo el supuesto de que existe un número grande de firmas que maximizan beneficios para los dos sectores, el valor de la productividad marginal del trabajo debe igualarse al salario nominal en las dos industrias, para que los beneficios de las firmas sean cero y se produzcan cantidades positivas de los dos bienes.[14] Esto

[14] Como se suponen preferencias estrictamente convexas se obvia la posibilidad de soluciones de esquina en equilibrio general. Por eso no es necesario incorporar programación matemática en el modelo.

es,

$$ap_t = W_t \quad \text{, y} \quad b^* = W_t \quad . \qquad (13)$$

La eficiencia productiva exige que los salarios de los dos sectores se igualen y, en consecuencia, se tiene que $p_t = \frac{b^*}{a}$. Nótese que utilizando (8) se tiene

$$p_t = \frac{be^{rt}}{a} \quad , \qquad (14)$$

resultado que muestra claramente que $\lim_{t\to\infty} p = \infty$. Además con (13) el salario nominal para ambos sectores queda

$$W_t = be^{rt} \qquad (15),$$

Y puede plantearse la siguiente proposición:

Proposición 4 (Proposición 1 de Baumol replanteada): El costo por unidad de output en el sector 1, C_{1t}, crecerá sin límite, mientras que C_{2t}, el costo unitario en el sector 2 , se mantendrá constante e igual a 1.[15]

Prueba:

$$C_{1t} = W_t L_{1t} / Y_{1t} = be^{rt} L_{1t} / aL_{1t} = be^{rt} / a$$
$$C_{2t} = W_t L_{2t} / Y_{2t} = be^{rt} L_{2t} / bL_{2t} e^{rt} = 1.$$

Proposición 5: *el costo relativo de 1 en términos de 2 al igual que su precio relativo crecerá sin límite en el tiempo.*

Prueba:

$$C_{1t} / C_{2t} = \left(\left(L_{1t} / Y_{1t} \right) / \left(L_{2t} / Y_{2t} \right) \right) = be^{rt} / a = p_t$$

De (6) y (7) en (9) se halla la frontera de posibilidades de producción.

$$Y_{2t} = b^* \bar{L} - \frac{b^*}{a} Y_{1t} \quad .$$

Note que, a medida que transcurre el tiempo, tanto el intercepto de la ordenada (en la gráfica) como la pendiente, o sea la tasa marginal de transformación crecen sin límite por el crecimiento exponencial de la productividad del sector 2. En el gráfico 1 puede observarse esto.

15 Note que los costos unitarios se denotan con la letra C mayúscula, mientras que el consumo por trabajador se denota en minúsculas.

Consumo

El problema del consumidor representativo es:

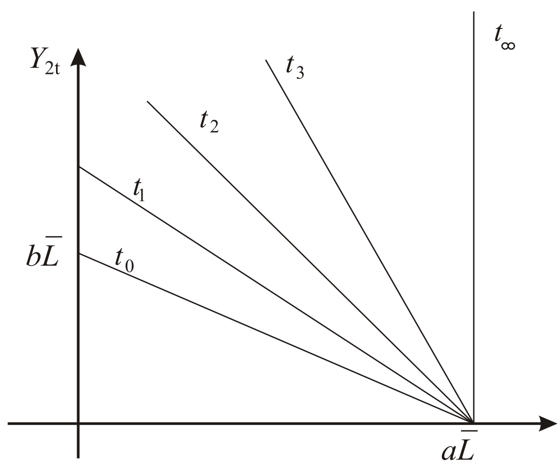
$$\text{Max} \quad u(c_{1t}, c_{2t}) = Zc_{1t}^{\alpha_1} c_{2t}^{\alpha_2} \qquad (16)$$

$$\text{s.a.. } W_t = p_t c_{1t} + c_{2t}$$

Resolviendo se obtiene:

$$p_t = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{c_{2t}}{c_{1t}} \qquad (17)$$

GRÁFICO 1



Fuente: Elaborado con la base de datos del autor

Solución

Interesa hallar una expresión de las participaciones relativas del gasto en equilibrio general. De (11) sobre (12) utilizando (17) y teniendo presente que $Y_{1t} = c_{1t}\bar{L}$, y $Y_{2t} = c_{2t}\bar{L}$, se tiene

$$\frac{p_t Y_{1t}}{Y_{2t}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \qquad (17)$$

Con (6), (7) y (14) se tiene:

$$\frac{L_{1t}}{L_{2t}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \qquad (18)$$

Resultado que es consistente con el hallado en el modelo original, y que verifica que la cantidad relativa de trabajo asignado es idéntica al monto de gasto relativo (en términos monetarios). En equilibrio ambos son constantes y equivalen a los pesos relativos del gasto en el consumo. Esto es equivalente a decir que tanto las participaciones del gasto en términos monetarios como las proporciones de mano de empleada son constantes e idénticas a los coeficientes α_1 y α_2 de la función de utilidad.[16] Dividiendo a ambos lados de (18) por p_t y utilizando (14) se tiene

$$Y_{1t}/Y_{2t} = aL_{1t}/bL_{2t}e^{rt} = a(\alpha_1/\alpha_2)/be^{rt} \qquad (20)$$

Que tiende a cero con el paso del tiempo.

Proposición 6 (Proposición 2 de Baumol corregida): *En el modelo de productividad desbalanceada el output relativo del sector no progresivo, cuya demanda tiene elasticidad-precio y elasticidad-ingreso unitaria, tiende a declinar en el tiempo.*

Prueba: *De (20), tomando límite cuando t tiende a infinito se tiene*

$$\lim_{t\to\infty}(Y_{1t}/Y_{2t}) = \lim_{t\to\infty}(aL_{1t}/bL_{2t}e^{rt}) = \lim_{t\to\infty} a(\alpha_1/\alpha_2)/be^{rt} = 0.$$

De (17) se tiene que la línea de expansión de consumo expresada en términos agregados viene dada por

$$Y_{2t} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} p_t Y_{1t} \qquad (17).$$

La intersección de la línea de expansión de consumo y la frontera de posibilidades de producción para un periodo específico permite obtener las cantidades producidas y consumidas de equilibrio de los dos bienes.

$$Y_{1t} = a\alpha_1 \bar{L} \qquad (21)$$

$$Y_{2t} = b^*\alpha_2 \bar{L} \qquad (22)$$

$$c_{1t} = a\alpha_1 \qquad (23)$$

$$c_{2t} = b^*\alpha_2 \qquad (24)$$

16 Se tiene que $\frac{pY_{1t}}{W_t} = \alpha_1$, y $\frac{Y_{2t}}{W_t} = \alpha_2$.

Se ve claramente que la producción en el sector de servicios es estacionaria y depende de forma directamente proporcional de la productividad en ese sector, de la proporción de gasto orientada hacia ese tipo de bienes, así como de la mano de obra total. En cambio, la producción de manufacturas crece exponencialmente en el tiempo a la misma tasa que la productividad en ese sector, dependiendo también de la proporción del gasto en ese tipo de bienes y de la mano de obra total. La gráfica No 2 ilustra esto. Se muestran los equilibrios sucesivos para distintos momentos en el tiempo.[17]

Ahora de (6) y (21) y de (7) y (22) se hallan los niveles de empleo de equilibrio general en los sectores de servicios y manufacturas respectivamente,

$$L_{1t} = \alpha_1 \overline{L} \qquad (25)$$

$$L_{2t} = \alpha_2 \overline{L} \qquad (26)$$

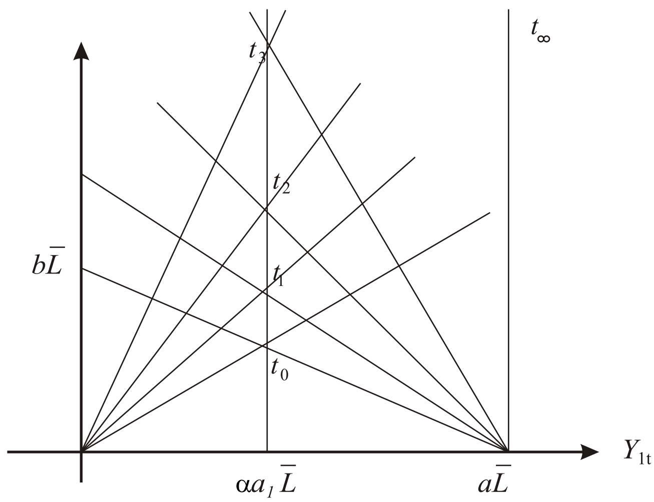
Que son también estacionarios y dependen tanto de las participaciones del gasto en los bienes respectivos como de la mano de obra total.

Proposición 7: *La estructura del consumo y del empleo expresada por las participaciones de gasto y del empleo por sectores respectivamente son constantes y dependen de las preferencias de los consumidores.*

Prueba: *Con funciones de utilidad Cobb-Dougkas la estructura del gasto corresponde a las potencias del consumo de los bienes en la función de utilidad. Es decir,* $\frac{p_t c_{1t}}{W_t} = \alpha_1$ *, y que* $\frac{c_{2t}}{W_t} = \alpha_2$. *Además, de (25) y (26) se deduce que y que* $\frac{L_{1t}}{\overline{L}} = \alpha_1$ *, de modo que* $\frac{p_t c_{1t}}{W_t} = \frac{L_{1t}}{\overline{L}} = \alpha_1$ *y* $\frac{c_{2t}}{W_t} = \frac{L_{2t}}{\overline{L}} = \alpha_2$.

[17] Note que a medida que el tiempo transcurre la pendiente de la línea de expansión de consumo que es proporcional al precio de los servicios crece también exponencialmente.

GRÁFICO 2



Fuente: Elaborado con la base de datos del autor.

Por la Proposición 6 no hay cambio estructural. Se corrobora aquí que una condición suficiente para la ausencia de cambio estructural en el caso de elasticidad de sustitución unitaria es la existencia de elasticidad-ingreso unitaria, más exactamente, la presencia de preferencias homotéticas que garantizan que no se cumple la ley de Engel en el tiempo. La Proposición 6, además, es consecuente con la ecuación (19), que también puede concebirse como otra forma de expresar tanto la estructura de la demanda como la estructura de empleo.

Proposición 8*:* *En equilibrio, los* niveles de *empleo, y el nivel de output del sector no progresivo son estacionarios, mientras que el precio relativo de 1 crece exactamente en la misma proporción del output del sector 2.*

Prueba: *De las ecuaciones (14) y (21)-(26).*

Es justamente en el sentido de la proposición 7 que debe entenderse la constancia del valor de los montos relativos del gasto en los dos bienes.[18]

[18] En la última subsección de esta parte se analiza con profundidad este resultado al discernir sobre la inexistencia cambio estructural en el modelo de crecimiento desbalanceado.

Crecimiento balanceado impuesto

Si por cualquier política determinada *ad hoc* el gobierno decide imponer crecimiento balanceado se tiene[19]

$$(b/a)Y_{1t}/Y_{2t} = L_{1t}/L_{2t}e^{rt} = K \qquad (27)$$

Donde *representa la constante a la que se fija la tasa de output a partir de un momento determinado.*

Con (9) utilizando (27) se llega, al igual que en el modelo original, a que:

$$L_{1t} = (L - L_{1t})Ke^{rt} \text{ o } L_{1t} = LKe^{rt}/(1 + Ke^{rt}) \quad (28) \text{ y}$$

$$L_{2t} = L - L_{1t} = L/(1 + Ke^{rt}) \qquad (29)$$

Y en consecuencia:

$$\lim_{t\to\infty} L_1 = L \quad , \text{ y } \quad \lim_{t\to\infty} L_2 = 0 \quad .$$

Proposición 9: *Si la tasa de output de los sectores se mantiene constante, una parte creciente de la mano de obra total tiene que ser transferida al sector no progresivo y la cantidad de trabajo asignada al sector progresivo tiende paulatinamente a cero.*

Prueba: *De (28) y (29) calculando límites cuando t tiende a infinito.*

También puede probarse que en este caso la tasa de crecimiento de la economía tiende irremediablemente a cero en el tiempo si se define como índice del producto total a un promedio ponderado de los output de los sectores.[20] Tomando como ponderadores a las participaciones del gasto α_1 y α_2,

$$I_t = \alpha_1 Y_{1t} + \alpha_2 Y_{2t} = \alpha_1 a L_{1t} + \alpha_2 b L_{2t} e^{rt} \qquad (30)$$

De modo que con (28) y (29):

$$I = L(K\alpha_1 a + \alpha_2 b)e^{rt}/(1 + Ke^{rt}) = \mathrm{R}e^{rt}/(1 + Ke^{rt})$$

[19] Siguiendo al propio Baumol obvio la exposición del mecanismo fiscal mediante el cual el gobierno logra esto. Aunque la endogenización de este resultado incorporando al sector público puede ser materia de un próximo trabajo.

[20] Puede probarse utilizando los mismos ponderadores que, en condiciones de mercado, la tasa de crecimiento del producto agregado tiende a *r* en el tiempo.

Donde:

$$R = L\left(K\alpha_1 a + \alpha_2 b\right) \quad .$$

De donde se deduce como en el modelo original que:

$$\left(dI/dt\right)/I = r/\left(1 + Ke^{rt}\right),$$

Que claramente decrece hasta cero con el tiempo.[21]

Cambio estructural

Como ya se estableció en la Proposición 7, en este modelo no se genera endógenamente ningún proceso de cambio estructural en el tiempo. La expresión de esto en el modelo se declaró en la Proposición 8 diciendo que e*n equilibrio, los* niveles de *empleo, y el nivel de output del sector no progresivo son estacionarios, mientras que el precio relativo de 1 crece exactamente en la misma proporción del output del sector 2.* ¿Pero, que explica éste conjunto de resultados interdependientes?

En otra parte, (Raffo 2004, 2005), he argumentado y probado para el caso de un modelo de crecimiento exógeno de tres sectores que una condición necesaria y suficiente para la existencia de cambio estructural en el caso de elasticidad de sustitución unitaria es la existencia de preferencias no homotéticas (las cuales garantizan la presencia de la ley de Engel) conjugada con la incidencia de un *mecanismo activador* de dicha ley, entendido éste último como un proceso dinámico por el lado de la producción generalmente la acumulación (o crecimiento)de algún stock que permite el crecimiento en el tiempo del ingreso per-cápita. Como en el modelo de Baumol el salario crece a una tasa constante en condiciones de mercado, se deduce que si no hay cambio estructural es porque no se cumple la ley de Engel: la elasticidad ingreso de demanda para los dos bienes es unitaria.

[21] Una cuestión importante aquí es la manera como se valora la producción agregada. La cuestión de la pertinencia de un determinado ponderador de la producción por sectores, o lo que es equivalente, el problema de la definición de un determinado índice de precios para deflactar el producto real total, es ineludible, ya que del procedimiento para valorar la producción total depende la obtención de una determinada tasa de crecimiento de la economía. La elección de Baumol es satisfactoria: como sólo hay dos sectores que crecen desequilibradamente, no es conveniente utilizar los precios corrientes como ponderadores de las producciones sectoriales, máxime cuando el precio relativo relevante crece sin límite en el tiempo. En cambio, la utilización de dos ponderadores constantes sí permite captar el efecto cantidades en la producción agregada.
Puede demostrarse que si la producción agregada se mide como los productos por sectores multiplicados por sus respectivos precios corrientes, la tasa de crecimiento de la economía en condiciones de mercado es siempre *r,* y sorprendentemente sería también *r* si el gobierno interviene para mantener constante la proporción de productos de los sectores, Y_{1t}/Y_{2t} .

Proposición 9: *En el modelo de Baumol no hay cambio estructural porque la elasticidad ingreso de demanda para los dos bienes es unitaria.*

Prueba: *Se sabe que directamente de su definición* α_2 *puede expresarse como* $\alpha_2 = \frac{c_{2t}}{W_t}$.

Diferenciando se tiene:

$d\alpha_2 = \frac{dc_{2t}}{W_t} - \frac{c_{2t}}{W_t^2} dW_t$ *. Expresando esta desigualdad en desviaciones porcentuales y con un poco de álgebra se llega a que:*

$$\frac{d\alpha_2}{\alpha_2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{dc_{2t}}{dW_t}\frac{W_t}{c_{2t}} \geq 1, \text{ y, así mismo, } \frac{d\alpha_2}{\alpha_2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{dc_{2t}}{dW_t}\frac{W_t}{c_{2t}} \leq 1 .$$

Donde los términos a la derecha de las equivalencias representan la elasticidad ingreso de demanda del bien 2.

A partir del anterior diferencial, teniendo en cuenta que $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$ *y que, en consecuencia,* $d\alpha_1 = -d\alpha_2$ *, se tiene que:*

$$d\alpha_1 = -\frac{dc_{2t}}{W_t} + \frac{c_{2t}}{W_t^2} dW_t \text{ , Con un poco de álgebra}$$

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{dc_{2t}}{dW_t}\frac{W_t}{c_{2t}} \leq 1, y \quad \frac{d\alpha_1}{\alpha_2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{dc_{2t}}{dW_t}\frac{W_t}{c_{2t}} \geq 1.$$

Control óptimo: una primera aproximación sencilla

En esta sección se presenta un primer intento de modelar el problema de optimización dinámica implícito en el modelo de Baumol. Por simplicidad no se considera la aplicación de ninguna política fiscal por parte del gobierno. Un próximo trabajo debe abordar el modelo dinámico completo, incluyendo la presencia de tributación en este caso a las actividades que generan externalidades negativas, o sea al sector 2 así como la implementación de un subsidio al sector 1. Por ahora, conviene concentrarse en la internalización de las externalidades por parte de un dictador benevolente en cabeza del gobierno local, sin considerar explícitamente la política fiscal.

El gobierno local como planificador social benevolente sabe que para maximizar el bienestar de los habitantes de la ciudad deben tenerse en cuenta no solamente los niveles de utilidad obtenidos por las personas que viven en el presente sino también los de los descendientes de los habitantes actuales que residirán en el futuro en la ciudad. Sabe también que el rápido crecimiento de las actividades industriales conjugado con el aumento del tamaño poblacional en las zonas urbanas genera una serie de externalidades negativas que afectan el nivel de vida de los ciudadanos. La contaminación, los problemas de orden público, la congestión de las redes viales intraurbanas, entre otros, son fenómenos socioeconómicos que alcanzan grandes proporciones para la sociedad en su conjunto cuando la oferta de ciertos servicios como el gobierno municipal, la educación y las artes, así como el desarrollo de una infraestructura operativa y moderna son en su mayor parte relativamente incipientes. En consecuencia, es razonable suponer que tales externalidades son una función decreciente de la tasa relativa del output de las actividades progresivas con respecto a la de las actividades de servicios. Pero, es el efecto de este crecimiento desproporcionado conjugado con un determinado tamaño poblacional lo que realmente produce las externalidades, porque su intensidad es proporcional a la densidad urbana existente. Además, como los efectos del crecimiento poblacional *ceteris paribus* el output relativo- son producidos y a la vez sufridos por los habitantes de las grandes urbes, es lógico suponer que los costos externos crezcan más rápidamente que el tamaño de la población quizá aproximadamente como el cuadrado del número de habitantes (Baumol 1967, p. 424).

Por ejemplo, considérese la cantidad de mugre que cae en la casa de un residente urbano típico como resultado de la polución del aire, y supóngase que esta es igual a *kn* donde *n* es el número de residentes en el área. Como el número de hogares en el área, *an*, es aproximadamente proporcional al tamaño poblacional, la caída de hollín debe ser igual a la cantidad de hollín por hogar multiplicado por el número de hogares $kn \cdot an = akn^2$. (ibíd.).[22]

Las externalidades se definen en consonancia con lo anterior por la siguiente función, la cual define un índice de externalidades que afecta el nivel de utilidad de los ciudadanos. Se tiene:

$$Z_t = g((Y_{2t}/Y_{1t}), \overline{L}), \text{ con } \quad \frac{\partial g}{\partial (Y_{2t}/Y_{1t})} < 0 \text{ y } \quad \frac{\partial g}{\partial \overline{L}} = -2g((Y_{2t}/Y_{1t}), \overline{L}) < 0$$

En donde la primera derivada capta el efecto parcial del crecimiento desbalanceado sobre el índice de externalidades y la segunda captura el efecto parcial más que proporcional (*a la Baumol*) de la población como externalidad. El signo negativo de las derivadas parciales se debe a que se trata de externalidades negativas. Note que de (10) Z afecta la función de utilidad del agente representativo, pero para él aquel es simplemente un parámetro que se supone constante. Porque el efecto de la externalidad para cualquier consumidor en particular es imperceptible, no siendo así para el planificador central, quien logra dimensionar el impacto social de tales fenómenos no captados por el sistema de

22 Traducción del autor.

precios de la economía de mercado. Una forma funcional que expresa correctamente el índice de externalidades es

$$Z_t = (Y_{1t}/Y_{2t})^{-\beta}\,\overline{L}^{2} \quad \text{, donde se supone que} \quad 0<\beta<\alpha_2 .$$ [23]

Como la clarificación de los mercados exige que $Y_{1t} = c_{1t}\overline{L}$ así como $Y_{2t} = c_{2t}\overline{L}$, la ecuación anterior puede expresarse como

$$Z_t = c_{2t}{}^{-\beta} c_{1t}{}^{\beta}\,\overline{L}^{-2} \qquad (31)$$

Por otra parte, en este caso el progreso tecnológico, al igual que en el modelo de Baumol, es sólo posible en el sector de manufacturas (sector2). Sin embargo, como un planificador puede incidir de diversas maneras en el ritmo al cual la acumulación del stock de progreso técnico o productividad - en este caso b^* - se produce, ahora se supone que éste es endógeno. El planificador central decide qué parte de la producción de bienes progresivos (manufacturas) se destina a consumo y qué parte se invierte en stock de progreso técnico o productividad de ese sector. Adicionalmente, se supone que la función de utilidad instantánea es logarítmica y por eso la elasticidad de sustitución intertemporal es unitaria.

$$v(c_{1t}, c_{2t}) = \log\left(Z_t c_{1t}{}^{\alpha_1} c_{2t}{}^{\alpha_2}\right) \qquad (32)$$

El problema es, pues,

$$\text{Max } U(c_{1t}, c_{2t}) = \int_0^{\infty} \left[\log\left(Z_t c_{1t}{}^{\alpha_1} c_{2t}{}^{\alpha_2}\right)\right] e^{-\rho t} dt \qquad (33)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a. } \; & Y_{1t} = aL_{1t} \\
& Y_{2t} = b^* L_{2t} \\
& \overline{L} = L_{1t} + L_{2t} \\
& Y_{1t} = c_{1t}\overline{L} \\
& Y_{2t} = c_{2t}\overline{L} + \dot{b}^*_t \\
& Z = c_{2t}{}^{-\beta} c_{1t}{}^{\beta}\,\overline{L}^{-2} \\
& b^*(0) = b > 0, \;\; c_2(0) = c_{20} > 0, \;\; \text{y} \;\; c_1(0) = c_{10} > 0,
\end{aligned}$$

[23] Este supuesto sobre los parámetros, como puede ser verificado por los lectores más curiosos en lo que sigue, es importante porque permite que las externalidades alteren el impacto del consumo de cada uno de los bienes sobre la utilidad del dictador benevolente y por ende las preferencias, sin modificar su escala. Por ello, no es necesario aplicar ninguna transformación monótona del índice luego de sustituir la siguiente ecuación, que es (31), en éste. No obstante, puede prescindirse de éste supuesto siempre y cuando luego de sustituir (31) se aplique una transformación monótona a la función de utilidad para poder seguir trabajando sobre la misma escala pero bajo otras preferencias, es decir, bajo otro tipo de ordenamiento de las cestas de consumo.

En donde ρ es la tasa de descuento de la utilidad futura. Las demás variables coinciden con las que se definieron antes. En este problema las variables de control son los niveles de consumo de los dos bienes y la variable de estado es b^*, el stock de productividad del trabajo en el sector progresivo.

Agrupando las condiciones de equilibrio de los dos mercados en unidades de bienes del sector progresivo queda

$$p_t c_{1t} \bar{L} + c_{2t} \bar{L} + \dot{b}^*_t = p_t a L_{1t} + b^* L_{2t}$$

Como la eficiencia productiva exige que $p_t = \frac{b^*}{a}$, la expresión anterior queda

$$p_t c_{1t} \bar{L} + c_{2t} \bar{L} + \dot{b}^*_t = b^* \bar{L}$$

Si se define el stock de productividad b^* en términos por trabajador como $\hat{b}^* = b^*/\bar{L}$, se obtiene el siguiente balance macroeconómico:

$$p_t c_{1t} + c_{2t} + \dot{\hat{b}}^*_t = \hat{b}^* L^{24} \qquad (34)$$

Aquí el término que aparece en el miembro derecho de la ecuación corresponde a la producción agregada de la economía valorada en unidades de bienes progresivos.

Teniendo en cuenta que el planificador central internaliza las externalidades, el problema puede reformularse como

$$U(c_{1t}, c_{2t}) = \int_0^\infty \left[\log\left(L^{-2} c_{1t}^{\alpha_1+\beta} c_{2t}^{\alpha_2-\beta}\right)\right] e^{-\rho t} dt \qquad (35)$$

$$\text{s.a. } p_t c_{1t} + c_{2t} + \dot{\hat{b}}^*_t = \hat{b}^* L$$
$$\hat{b}^*(0) = \hat{b}$$

Las condiciones de primer orden derivadas de optimizar el Hamiltoniano son:

$$\left[L^{-2} c_{1t}^{\alpha_1+\beta} c_{2t}^{\alpha_2-\beta}\right]^{-1} e^{-\rho t} (\alpha_1 + \beta) L^{-2} c_{1t}^{\alpha_1+\beta-1} c_{2t}^{\alpha_2-\beta} - \mu_t p_t = 0 \qquad (36)$$

$$\left[L^{-2} c_{1t}^{\alpha_1+\beta} c_{2t}^{\alpha_2-\beta}\right]^{-1} e^{-\rho t} (\alpha_2 - \beta) L^{-2} c_{1t}^{\alpha_1+\beta} c_{2t}^{\alpha_2-\beta-1} - \mu_{tt} = 0 \qquad (37)$$

$$\mu_t L = -\dot{\mu}_t \qquad (38)$$

[24] En lo que sigue se define $\bar{L} = L$ para simplificar la notación. Lo fundamental es tener presente que la mano de obra total es constante. Por eso, $\frac{\dot{b}^*_t}{L} = \dot{\hat{b}}^*_t$.

Donde μ_t es el multiplicador de Lagrange del Hamiltoniano, que debe interpretarse como el precio sombra del stock de productividad por trabajador. La condición de transversalidad es

$$\lim_{t\to\infty} \hat{b}^*_t \ \mu_t = 0 \tag{39}$$

Despejando μ_t de (37) y reemplazando en (34) se obtiene la condición de eficiencia en el consumo de los dos bienes:

$$p_t = \frac{(\alpha_1 + \beta)}{(\alpha_2 - \beta)} \frac{c_{2t}}{c_{1t}} \tag{40}$$

De (38) se deduce que la tasa de crecimiento del precio sombra del stock de productividad por trabajador es menor que cero e igual al negativo de la mano de obra total. Ésta última corresponde a la productividad marginal del stock de productividad por trabajador de la economía, y en equilibrio es idéntica a la tasa de retorno del mismo. Es decir, si r_t^b es la tasa de retorno de mercado del stock de productvidad, se tiene:

$$L = r_t^b \tag{41}$$

y la trayectoria del precio sombra del stock de productividad por trabajador es:

$$\mu(t) = \mu_0 e^{-Lt} \quad \text{, con } \mu(0) = \mu_0 > 0 \tag{42}$$

Ahora, dinamizando (40) se obtiene:

$$\frac{\dot{p}_t}{p_t} + \frac{\dot{c}_{1t}}{c_{1t}} = \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} \quad ,$$

que establece que el valor de los niveles de consumo en unidades de bienes del sector progresivo debe crecer equilibradamente.Con la expresión de equilibrio del precio se tiene

$$\frac{\dot{b}^*_t}{b^*_t} + \frac{\dot{c}_{1t}}{c_{1t}} = \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} \text{ , ó , } \frac{\dot{\hat{b}}^*_t}{\hat{b}^*_t} + \frac{\dot{c}_{1t}}{c_{1t}} = \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} \tag{43}$$

Así mismo, dinamizando (36) y (37), utilizando (38) y la expresión de equilibrio del precio, se llega respectivamente a

$$\frac{\dot{c}_{1t}}{c_{1t}} = L - \rho - \frac{\dot{b}^*_t}{b^*_t} \ , \tag{36′}$$ y

$$\frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} = L - \rho \tag{37′}$$

De esta última expresión se obtiene la trayectoria del consumo por trabajador del bien 2.

$$c_2(t) = c_{20} e^{(L-\rho)t} \qquad (44)$$

Por otra parte, de (34), utilizando (40) y (43) con un poco de algebra se llega a una ecuación diferencial de grado 1 con término variable en función del tiempo, cuya solución permite obtener la trayectoria del stock de productividad.

$$L = \rho . \frac{-c_{20} e^{(L-\rho)t}}{(\alpha_2 - \beta)} = \dot{\hat{b}}*_t - \hat{b}*_t \cdot L \qquad (45)$$

La solución es

$$\hat{b}*(t) = \left[\hat{b}*_0 - \frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)} \right] e^{Lt} + \frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)} \qquad (46) \quad \text{que implica}$$

$$b*(t) = \left[b - \frac{c_{20} L}{\rho(\alpha_2 - \beta)} \right] e^{Lt} + \frac{c_{20} L}{\rho(\alpha_2 - \beta)} \qquad (47) \quad \text{y}$$

$$p(t) = \left[b/a - \frac{c_{20} L/a}{\rho(\alpha_2 - \beta)} \right] e^{Lt} + \frac{c_{20} L/a}{\rho(\alpha_2 - \beta)} \qquad (48)$$

utilizando estos resultados en (28) se halla la trayectoria del consumo por trabajador en el bien 1:

$$c_1(t) = \frac{(\alpha_1 + \beta) c_{20} e^{(L-\rho)t}}{\left[(\alpha_2 - \beta)(b/a) - \frac{c_{20} L/a}{\rho} \right] e^{Lt} + \frac{c_{20} L/a}{\rho}} \qquad (49)$$

Estas expresiones develan que tanto el consumo en ambos bienes como el precio del bien 1, y el stock de productividad tienden a crecer en el tiempo de acuerdo con (31), siempre que $L > \rho$.¡Sin embargo, estas aún no son las expresiones definitivas! Pues, falta utilizar la condición de transversalidad, que como se sabe es fundamental: formalmente es lo que permite cerrar el modelo; más exactamente, es lo que permite determinar un nivel de bondad fijo en un problema con tiempo ilimitado (Ruiz 2005). Económicamente es lo que garantiza que "al final de los tiempos" el stock de productividad acumulado sea nulo o carente de valor. En este caso, el cumplimiento de la condición de transversalidad exige, de acuerdo con las trayectorias encontradas, que $b = \frac{c_{20} L}{\rho(\alpha_2 - \beta)}$.[25]

[25] Ver prueba en el Apéndice.

La consecuencia inmediata de esto es que no debe acumularse stock de productividad en el sector que produce manufacturas, y por ende el precio del bien 1 debe ser también constante en el tiempo. Además, con este último resultado y (43), queda claro que la única forma de garantizar el cumplimiento de la ecuación de balance macroeconómico (34) es, haciendo $L = \rho$. En tal caso, la tasa de crecimiento del consumo de los dos bienes se anula y lo mismo sucede con las cantidades producidas de éstos. Por lo tanto la senda óptima corresponde a la trayectoria de crecimiento balanceado en la que la variable de estado al igual que las variables de control se mantiene constantes en el tiempo. La ecuación (34) queda simplemente.

$$b = (b/a)c_{10} + c_{20} \qquad (34')$$

Los niveles estacionarios de todas las variables son sus niveles iniciales y la asignación de recursos óptima dinámicamente desde el punto de vista social, corresponde a la solución de una economía centralizada estática en la que hay externalidades. Así, usando la condición de eficiencia en el consumo se pueden hallar los valores específicos estacionarios del modelo de acuerdo con sus parámetros estructurales. Se obtiene

$$\mu(t) = \mu_0 e^{-\rho t} \qquad (42')$$

$$c_2 = b(\alpha_2 - \beta)\ ^{26} \qquad (44')$$

$$\hat{b}^* = \hat{b}^*_0 \qquad (46')$$

$$b^* = b \qquad (47')$$

$$p = b/a \qquad (48')$$

$$c_1 = a(\alpha_1 + \beta) \qquad (49')$$

$$Y_1 = a(\alpha_1 + \beta)L \qquad (50)$$

$$Y_2 = b(\alpha_2 - \beta)L \qquad (51)$$

$$L_1 = (\alpha_1 + \beta) \qquad (52)$$

$$L_2 = (\alpha_2 - \beta) \qquad (53)$$

[26] Note que este resultado también se deduce de $\left[b = \frac{c_{20} L}{\rho(\alpha_2 - \beta)} \right]$ con $L = \rho$

La estructura de la economía de la manera como se definió antes viene dada por:

$$\frac{p_t c_{1t}}{I_t} = \frac{L_{tt}}{L} = \alpha_1 + \beta \qquad (54)$$

$$\frac{c_{2t}}{I_t} = \frac{L_{2t}}{L} = \alpha_2 - \beta \qquad (55)$$

Por último, sustituyendo las trayectorias del consumo de los dos bienes en la función de utilidad intertemporal puede probarse que la utilidad es limitada e igual a:

$$U_s(c_{1t}, c_{2t}) = \frac{1}{\rho} \log\left[L^{-2} \left(a(\alpha_1 + \beta)\right)^{\alpha_1+\beta} \left(b(\alpha_2 - \beta)\right)^{\alpha_2-\beta}\right]^{27} \qquad (56)$$

Los resultados aclaran los efectos dinámicos de la llamada *enfermedad de los costos* descubierta por Baumol en su famoso artículo de 1967. El crecimiento desbalanceado en las ciudades impulsado por el crecimiento acumulativo desigual de las productividades del trabajo no solamente sube dramáticamente el costo de las mercancías producidas en las actividades no progresivas, sino que también puede crear un problema de ineficiencia dinámica al producir una sobreacumulación del stock de productividad de los sectores progresivos, la cual reduce el consumo y el bienestar de las generaciones futuras. Este problema se expresaría en la violación de la condición de transversalidad exigida para resolver el problema de control con un horizonte infinito. Pero, si los agentes no son "miopes" y realizan optimización intertemporal como en el caso de la solución competitiva de equilibrio general intertemporal cuyos resultados se presentan luego del siguiente párrafo o en el caso de la solución de planificación central que se acaba de exponer, esta ineficiencia dinámica desaparece gracias al necesario cumplimiento de la condición de transversalidad.

Por otra parte, las externalidades negativas sobre el consumo originadas por la enfermedad de los costos son de naturaleza estática tal como pensaba Baumol. Su internalización trae consigo un efecto fijo a lo largo del tiempo sobre la asignación del consumo, y por ende sobre la de la producción y el empleo, que induce a un mayor consumo relativo de los bienes producidos por el sector no progresivo durante todo el tiempo. Este efecto es proporcional a la elasticidad del índice de externalidades con respecto a la brecha de producción de los dos tipos de sectores, β. Así se haya supuesto mano de obra constante, se puede constatar (haciendo estática comparativa a partir de la ecuación (56), que el otro efecto propio de la externalidad, que sería el del impacto negativo del nivel de población en el consumo, únicamente afecta el bienestar social, pero no las asignaciones de

[27] El subíndice *s* permite recordar que este es el nivel de utilidad social obtenido por el planificador central.

mercado del gasto. Ahora bien, si se resolviera el problema intertemporal de la economía descentralizada suponiendo que los agentes están dotados con una racionalidad sustantiva que les permite tener un espectro de elección intertemporal y no simplemente el espectro "miope" de la optimización estática se llegaría a unos resultados idénticos a los obtenidos en la sección anterior (sección 3), en la nueva versión estática del modelo que se propuso, salvo porque ahora el stock de productividad sería constante en el tiempo e igual a su nivel inicial, y, en consecuencia, también lo sería la producción de bienes progresivos así como su consumo. Por lo tanto, en este caso, como era de esperarse, la estructura de la economía implica que una mayor porción del gasto total en relación con los resultados de la solución de planificación central se asigna al consumo de manufacturas (α_2 y no $\alpha_2 - \beta$) y una menor al consumo de servicios (α_1 y no $\alpha_1 + \beta$) porque, aún con una racionalidad que permite realizar optimización intertemporal, los agentes no captan el efecto de las externalidades negativas en el consumo. Los resultados fundamentales del equilibrio competitivo bajo los supuestos de partida de la presente sección serían, entonces, las siguientes versiones de (42), (44), (46)-(56):

$$\mu(t) = \mu_0 e^{-\rho t} \qquad (42^*)$$

$$c_2 = b\alpha_2 \qquad (44^*)$$

$$\hat{b}^* = \hat{b}^*_0 \qquad (46^*)$$

$$b^* = b \qquad (47^*)$$

$$p = b / a \qquad (48^*)$$

$$c_1 = a\alpha_1 \qquad (49^*)$$

$$Y_1 = \alpha_1 L \qquad (50^*)$$

$$Y_2 = b\alpha_2 L \qquad (51^*)$$

$$L_1 = \alpha_1 L \qquad (52^*)$$

$$L_2 = \alpha_2 L \qquad (53^*)$$

$$\frac{c_{1t}}{I_t} = \frac{L_{tt}}{L} = \alpha_1 \qquad (54^*) \quad \text{y}$$

$$\frac{p_{2t} c_{2t}}{I_t} = \frac{L_{2t}}{L} = \alpha_2 \qquad (55^*)$$

$$U(c_{1t}, c_{2t}) = \frac{1}{\rho} \log \left[L^{-2} (a\alpha_1)^{\alpha_1 + \beta} (b\alpha_2)^{\alpha_2 - \beta} \right] \qquad (56^*)$$

Como era de esperarse, comparando (56) y (56*) puede probarse que la utilidad social es mayor que la utilidad de la solución de mercado, ya que $(\alpha_1 + \beta)^{\alpha_1+\beta}(\alpha_2 - \beta)^{\alpha_2-\beta} > (\alpha_1)^{\alpha_1+\beta}(\alpha_2)^{\alpha_2-\beta}$, para cualquier combinación de valores admisibles de los parámetros.

Las inferencias anteriores permiten señalar algunas consideraciones fundamentales para el diseño de políticas de desarrollo urbano. Las políticas óptimas para corregir los problemas inherentes a los mercados urbanos no deben basarse simplemente en la fijación de una tasa constante de cantidades producidas para los dos tipos de sectores existentes a través de un subsidio, por ejemplo sin tratar de incentivar el crecimiento de la productividad en los sectores históricamente poco productivos. Puesto que, como fue detectado por Baumol en particular al desarrollar la proposición 3 del modelo original, tal solución conduciría inexorablemente no sólo al estancamiento de la economía sino igualmente a un desbalance extremo del empleo, que, en la realidad, puede tener consecuencias nefastas para la sociedad al propiciar mayores niveles de desempleo. Si existen costos de ajuste estructural (por la existencia de diferentes niveles de especialización y calificación de la mano de obra) y/ó si la demanda efectiva es limitada para la economía en su conjunto, de modo que hay desempleo involuntario, entonces tal suerte de políticas puede alejar mucho más a la economía del pleno empleo. Además, de acuerdo con mi definición de cambio estructural, tales políticas activarían un cambio estructural permanente tendiente a favorecer precisamente los sectores menos productivos y por ende a debilitar los nexos intersectoriales de la economía. Las políticas óptimas son entonces aquellas que alientan el crecimiento de la productividad tanto en los sectores dinámicos *per se* como en los sectores que históricamente bajo las condiciones de libre mercado no lo han sido, permitiendo que la economía se acerque al crecimiento balanceado. En el modelo desarrollado en esta sección la solución de crecimiento balanceado implica la consecución de un estado estacionario en el que todas las variables son constantes, pero esto se debe a que para recrear una "parábola" más sencilla y extrema supuse siendo fiel a Baumol que la mano de obra no crece en el tiempo y que las actividades no progresivas mantienen dotaciones de productividad constantes en el tiempo. No obstante, no tiene que ser así: un modelo más realista debería admitir crecimiento poblacional así como la acumulación de stock de productividad en el sector de actividades no progresivas.

En ese caso se aceptaría la existencia de dos tipos de bienes de capital (en particular uno para cada sector) y el crecimiento balanceado vendría acompañado de un crecimiento constante en las variables agregadas incluyendo los dos stocks de productividad, mientras las variables por trabajador se mantienen constantes.

Ejemplos relevantes en la literatura de este tipo de modelos con bienes de capital heterogéneos son los de Dorfman, Samuelson, y Solow (1958), Morishima (1961), y Weitzman (1971).

Conclusiones

La segunda proposición del modelo de crecimiento desbalanceado de Baumol es incorrecta. No es cierto que *en el modelo de productividad desbalanceada los output del sector no progresivo, cuyas demandas no son altamente inelásticas, tienden a declinar en el tiempo.* La imprecisión se debe a que Baumol no hizo explícitos los fundamentos microeconómicos de su modelo, en especial por el lado de la demanda. Un análisis profundo de la demanda basado en una teoría general de la dinámica de la estructura del gasto permite develar que la interpretación correcta de la proposición predice que bajo los supuestos de partida a medida que crecen los salarios y la productividad del sector que elabora bienes progresivos, el output de los bienes de ese sector sube al mismo ritmo del costo de los bienes del sector no progresivo, mientras el output de los bienes de éste último sector se mantiene constante en el tiempo debido a que los efectos de sustitución coligados al incremento de sus precios se compensan con los efectos-renta inducidos. El propósito de mis proposiciones 6, 7 y 8, fue precisamente plantear las proposiciones correctas del modelo.

En este artículo también se propuso un nuevo modelo de optimización intertemporal que plasma algunos rasgos esenciales del problema dinámico implícito en el famoso modelo de Baumol (1967). Sus predicciones indican que los resultados de la planificación central en las ciudades que enfrentan un crecimiento económico originariamente desequilibrado son superiores a los que dictamina el libre mercado, porque permiten internalizar las externalidades negativas consolidadas por la creciente urbanización y, además, pueden contrarrestar la ineficiencia dinámica creada por la sobreacumulación de productividad en los sectores progresivos, la cual sería un hecho si, además, los consumidores no realizan optimización intertemporal sino únicamente optimización estática como en el planteamiento original de Baumol.

Las políticas de los gobiernos locales enfrentados a tales problemáticas pueden encaminarse a incentivar el crecimiento de la productividad en los sectores que en condiciones libre mercado resultan ser poco dinámicos, para así aproximarse al crecimiento balanceado, en el que generalmente se alcanza la eficiencia intertemporal de la economía. Se corrobora que argumentar que “libre mercado es sinónimo de eficiencia económica” no es más que manipular una noción “confusa” e incompleta del concepto de eficiencia en economía. Se ha probado que en economías en las que en condiciones de libre mercado se *perpetúa un crecimiento desbalanceado extremo de los sectores productivos y los agentes poseen racionalidad limitada en este caso en el sentido de que no realizan optimización intertemporal, no es posible alcanzar la eficiencia dinámica sin la intervención del Estado, aún si no existieran externalidades o cualquier otra falla* *de mercado. Si los agentes tuviesen racionalidad ilimitada*[28] *o al menos si fueran capaces de realizar optimización intertemporal, entonces se corregiría el problema de ineficiencia dinámica inherente al capitalismo bajo las condiciones del modelo. En ese caso el papel de estado sigue siendo imprescindible para corregir las externalidades existentes, como las que se generan en las grandes ciudades en el consumo, a las que se refería William Baumol.*

El modelo dinámico presentado es sólo una primera aproximación a la modelación del problema de optimización dinámica consustancial a las ideas de Baumol. Un próximo trabajo debería incorporar explícitamente a la política fiscal en el problema de planificación central, especificando claramente las medidas tributarias y la política de gasto público o los mecanismos de subsidio, que puede aplicar el gobierno para intentar estimular una mayor producción y un mayor consumo de servicios a medida que el tiempo transcurre. Se debería determinar la tasa tributaria óptima a aplicar en el sector de manufacturas para obtener recursos que permitan subsidiar una parte de la producción de servicios. Sólo así podría lograrse crecimiento sostenido en el sector de servicios, y en consecuencia, sería posible alcanzar crecimiento balanceado a una tasa mayor a la tasa de crecimiento de la mano de obra, que en este modelo por simplicidad se supuso constante.

Bibliografía

Barro, R. J. y Sala-I-Martín X. 1995. *Economic Growth*, *McGraw*-Hill International Editions.

Baumol, W. 1967. "Macroeconomics of Unbalanced Growth: the Anatomy of Urban Crises." *The American Economic Review*, 57, pp. 415-426.

----------- 1969. "Comment on Comment", *The American Economic Review*, Vol. 59, p. 632.

Biccieri, C. 1993. *Rationality and Coordination*, New York, Cambridge.

Birch J.W. y C.A.Cramer. 1968. "Macroeconomics of Unbalanced Growth: Comment." *The American Economic Review*, Vol. 58, No. 4, pp. 893-896.

Burmeister, E. y Dobell, R. 1970. *Mathematical Theories of Economic Growth.* London, Macmillan.

Conlisk, J.1996. ¿Why Bounded Rationality?, *Journal of Economic Literature*, Vol. XXXIV, pp. 669-700.

[28] En Biccieri (1993), y Elster (1984), por ejemplo, se exponen reflexiones amplias y filosóficas sobre el principio de racionalidad y su papel en la determinación de los equilibrios en economía. En particular, Elster (1984) contrapone los conceptos de *racionalidad perfecta* y *racionalidad imperfecta* precisando los cuidados que deben tenerse cuando se extrapolan a las ciencias sociales teorías o reglas de comportamiento (sobre los seres vivos) inherentes a los sistemas biológicos, como la teoría de la selección natural. Por otra parte, las referencias clásicas en la literatura de metodología de la economía en las que se contraponen y se ponen a discusión los conceptos de racionalidad ilimitada y racionalidad limitada son los artículos de Conlisk (1996) y Selten (2001).

De Groot, H. L . F. 1998. *The Determination of Sectoral Structure. Paper based on his PhD Research performed at the Department of Economics and Center for Economic Research, Tilburg University.*

Dorfman, Samuelson, y Solow. 1958. *Linear Programming and Economic Analysis*, New York, McGraw-Hill.

Elster J. 1995 (1984). *Ulises y la Sirenas. Estudios sobre racionalidad e irracionalidad*, México, Fondo de Cultura Económica, Cáp. 1 y 2.

Föllmi y Zweimüller. 2002. "Structural Change and the Kaldor Facts of Economic Growth", *Working Paper Series*, Zurich, Zurich University.

Fuchs V. R. 1965. "The Growing Importance of the Service Industries", *Nat. Bur. Econ. Research, Occas. Paper* 96, New York.

Harvey M. 1998. "Productivity Gaps and 'Cost Illness': Contributions and Limits of Baumol's Unbalanced Growth Model, Econ *WPA-dev/9804002, and Revue Economique*, vol. 49 (2).

Harris, R. y Todaro, M. P. 1970. "Migration, unemployment and development: a two sector analysis." *American Economic Review.*

Intriligator, M. D. 1973 *Optimization and Economic Theory,* New York, Prentice Hall.

Kongsamut, P., Rebelo, S. y Xie, D. 2001. "Beyond Balance Growth", *IMF Working Paper and Review of Economic Studies,* pp. 68:869-882.

Morishima, M. 1961. "Proof of a Turnpike Theorem: The 'No Joint Production Case", *Review of Economic Studies*, vol. XXVIII, pp. 76:89-98.

Ngai, L. R. y Pissarides, CH. A. 2004. "Balanced Growth with Structural Change", *CEP Discussion Paper,* London School of Economics and Political Science.

Nikaido, H. 1970. *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*, Holland, North Holland Publishing Company.

Raffo L. 2004. "Una Nueva Pregunta de Investigación en la Teoría de Crecimiento Económico*", Revista Utopía*, Popayán, Universidad del Cauca, No 20.

------------. 2005. "Existe Cambio Estructural en Presencia de Crecimiento Exógeno", *Revista Cuadernos de Economía*, Universidad Nacional de Colombia, No 42.

Robinson J. 1969. "A Belated Comment". *The American Economic Review* Vol. 59, pp. 632.

Rowthorn, R., y Ramaswany, R. 1997. "Growth, Trade and Deindustrialization". *IMF Staff papers*, WP 42, Washington.

Ruiz R. 2005. *"*Economía Matemática*". Notas de Clase para la Maestría en Economía Aplicada*. Universidad del Valle.

Selten, R. 2001. "What is bounded Rationality?", in *Bounded Rationality: The Adaptative Toolbox*, Gigerenzer y Selten, 2001, Cambridge, MA: MIT, pp.13-36.

Weitzman, M. 1971. "Shiftable Versus non-Shiftable Capital: A Synthesis*", Econometrica*, vol.39, No 3, pp. 511-29.

Worcester, D.A. JR. 1968. "Macroeconomics of Unbalanced Growth: Comment". *The American Economic Review,* Vol. 58, No. 4, pp. 886-893.

Apéndice

Se prueba que la condición de transversalidad exige que $b = \dfrac{c_{20}L}{\rho(\alpha_2 - \beta)}$. De (27),

$$\lim_{t\to\infty} \hat{b}^*_t \, \mu_t = 0 \; .$$

Utilizando las trayectorias halladas para $\hat{b}^*_t$ y μ_t (ecuaciones (30) y (34)), la condición exige que :

$$\mu(t) = \mu_0 e^{-Lt} \quad \hat{b}^*(t) = \left[\hat{b}^*_0 - \frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)}\right] e^{Lt} + \frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\left[\hat{b}^*_0 - \frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)}\right] e^{Lt} + \frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)}\right] \cdot \mu_0 e^{-Lt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \mu_0 \left[\left[\hat{b}^*_0 - \frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)}\right] + \left[\frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)}\right] \cdot e^{-Lt}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \mu_0 \left[\hat{b}^*_0 - \frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)}\right] + \lim_{t\to\infty} \mu_0 \left[\frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)}\right] \cdot e^{-Lt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\hat{b}^*_0 - \frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)}\right] + \lim_{t\to\infty} \mu_0 \left[\frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)}\right] \cdot e^{-Lt} = 0$$

Como el segundo término se desvanece en el tiempo,

$$\lim_{t\to\infty} \hat{b}^*_t \, \mu_t = 0 \Leftrightarrow \hat{b}^*_0 = \frac{c_{20}}{\rho(\alpha_2 - \beta)} \; . \text{ Esto es,}$$

$$\lim_{t\to\infty} \hat{b}^*_t \, \mu_t = 0 \Leftrightarrow b = \frac{c_{20}L}{\rho(\alpha_2 - \beta)} \; .$$