CAPÍTULO 12

12

¿CÓMO ATACAR UN PROBLEMA?

Alejandro Mahillo Cazorla
Universidad de Zaragoza

Palabras clave

- *Resolución de problemas*
- *Plantear un problema*
- *Experiencia real*

¡Buenas estimado lector!, soy Alejandro Mahillo y hace unos años me encontraba en la misma situación que tú, preparándome para enfrentarme a una olimpiada matemática. Pero tranquilo, estoy aquí para ayudarte. Aunque hace un par de años que terminé la carrera de matemáticas, sigo con ganas de seguir disfrutando de estas competiciones. Por desgracia, para mi edad ya no existen concursos de este tipo. Fíjate, nos jubilan de las olimpiadas antes que a los futbolistas. Conmigo harás una OME (Olimpiada Matemática Española) y te iré contando que es lo que estoy pensando en cada momento. De esta forma, mis consejos te servirán para resolver por ti mismo cualquier problema. ¿Qué te parece? Pues corre que empezamos.

12.1 Introducción

Las ***Olimpiadas Matemáticas*** son un momento de nervios, ya que uno siempre quiere hacerlo de la mejor forma posible. Por ello, una parte fundamental de la competición es saber como manejar esa situación. En ocasiones, nos quedamos atascados en algún problema y no sabemos por dónde ir. Al final, si no somos capaces de anteponernos a estas situaciones, nos va a pasar factura en la realización de todo el examen.

Por esa razón creo que es interesante hablaros desde mi propia experiencia para contaros algunos trucos que me ayudan a plantear una sesión de problemas. Saber muchas mates seguro que nos ayuda a hacerlo muy bien, pero también creo que es muy importante saber controlar los nervios para obtener el mejor resultado posible.

Para ello, resolveremos la Fase Nacional de la Olimpiada Matemática Española (OME) celebrada en Alcalá de Henares, Madrid en el año 2017. Primero resolveremos los ejercicios del primer día como si estuviésemos en el examen. Y después, resolveremos los ejercicios del segundo día completando así todos los problemas.

12.2 Problemas del día 1 de la Fase Nacional de la OME 2017

Lo primero que debemos hacer cuando nos entregan la hoja de problemas es leerlos todos. Normalmente suelen ir en orden de dificultad, pero en ocasiones nos puede resultar más sencillo cambiar ese orden. Los problemas que tenemos en esta hoja de problemas son los siguientes.

Problema 12.1 (Día 1). Determina el número de valores distintos de la expresión

$$\frac{n^2-2}{n^2-n+2},$$

donde $n \in 1, 2, 3, \ldots, 100$.

Problema 12.2 (Día 1). Un trazador de puntos medios es un instrumento que dibuja el punto medio exacto de dos puntos previamente señalados. Partiendo de dos puntos a distancia 1 y utilizando sólo el trazador de puntos medios, debes obtener dos puntos a una distancia estrictamente comprendida entre $\frac{1}{2017}$ y $\frac{1}{2016}$, trazando el menor número posible de puntos. ¿Cuál es el mínimo número de veces que necesitas utilizar el trazador de puntos medios, y qué estrategia seguirías para lograr tu objetivo?

Problema 12.3 (Día 1). Sea p un primo impar y

$$S_q = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{q\cdot(q+1)\cdot(q+2)},$$

donde $q = \frac{3p-5}{2}$. Escribimos $\frac{1}{p} - 2S_q$ en la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros. Demuestra que $m \equiv n (\text{mód } p)$; es decir, m y n dan el mismo resto al ser divididos por p.

Una vez leídos los problemas, a mi el que me parece más sencillo de los tres es el primero. Por tanto empezaré intentando resolver el primero. Después, el segundo problema me parece que tiene un enunciado un poco lioso, en una primera ojeada yo creo que me va a llevar mucho tiempo. En cambio el tercero, aunque parezca más difícil, creo que podría intentar bastantes cosas y avanzar algo. Igual no lo resuelvo entero, pero podré hacer parte del ejercicio para obtener algunos puntos.

Mi orden de resolución será: Problema 12.1, Problema 12.3 y Problema 12.2. ¡Vamos allá!

Problema 12.1 (Día 1). Determina el número de valores distintos de la expresión

$$\frac{n^2-2}{n^2-n+2},$$

donde $n \in 1, 2, 3, \ldots, 100$.

Solución *Este problema es un claro ejemplo donde antes de intentar probar nada, merece la pena perder unos minutos en simplificar la expresión. Un par de aproximaciones superficiales al problema, que igual no nos aportan nada pero que nos pueden abrir la mente para ver otras propuestas cuando estemos atascados. En este caso, vemos que el grado de la fracción en el denominador y en el numerador es el mismo. Así que podemos simplificar como,*

$$\frac{n^2-2}{n^2-n+2} = \frac{n^2-n+2+n-2-2}{n^2-n+2} = 1 + \frac{n-4}{n^2-n+2}.$$

Otra técnica que viene muy bien en todo tipo de problemas es empezar con casos sencillos y ver si podemos encontrar algún patrón. Sustituimos algunos valores de n en nuestra expresión y vemos que resultado obtenemos.

- $n = 1 \implies -\frac{1}{2}$ • $n = 2 \implies \frac{1}{2}$ • $n = 3 \implies \frac{7}{8}$

En este caso, a simple vista no veo nada que me aporte ninguna pista. En este caso volvemos a leer el enunciado y nos fijamos en la palabra ***distintos****. Igual ver cuando son distintos esos valores es más complicado, por lo que probaremos a ver cuando son iguales, algo más sencillo. Es decir, supongamos*

$$\frac{n^2-2}{n^2-n+2} = \frac{m^2-2}{m^2-m+2},$$

que dada la simplificación realizada anteriormente es equivalente a probar,

$$\frac{n-4}{n^2-n+2} = \frac{m-4}{m^2-m+2}.$$

Multiplicamos en cruz y simplificamos, obteniendo que la igualdad anterior es equivalente a,

$$(m-n)(mn-4(m+n)+2) = 0.$$

Como $m \neq n$, la igualdad inicial se dará si y solo sí $mn - 4(m+n) + 2 = 0$. Ahora a nosotros nos interesa encontrar soluciones m y n para esta ecuación, por tanto debemos pensar en intentar poner eso como un producto. ¿Por qué se nos ocurre eso? Cuando tenemos un producto de números enteros que es igual a otro número solo tendremos que fijarnos en su descomposición en factores primos y probar casos. Un ejemplo de esto lo veremos a continuación. Buscamos una expresión de la forma $(m-4)(n-4) = -4m+mn-4n+16$. Lo que no nos cuadra es el término independiente, pero para ajustarlo podemos sumar y restar a ambos lados. Por tanto,

$$mn - 4(m+n) + 2 = 0 \implies (m-4)(n-4) = 14.$$

La descomposición del número 14 es: $14 = 1 \cdot 14 = -1 \cdot -14 = 2 \cdot 7 = -2 \cdot -7$. De estos casos, como m y n son mayores que 1, podemos descartar los productos negativos. Por tanto, si $m - 4 = 1$ entonces $m = 5$ y así $n = 18$ o $m - 4 = 2$ y entonces $m = 6$ dando lugar a que $n = 11$. Finalmente, de los 100 valores posibles solo se repiten 2. Así que hay 98 valores distintos.

Problema 12.3 (Día 1). Sea p un primo impar y

$$S_q = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{q\cdot(q+1)\cdot(q+2)},$$

donde $q = \frac{3p-5}{2}$. Escribimos $\frac{1}{p} - 2S_q$ en la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros. Demuestra que $m \equiv n (\text{mód } p)$; es decir, m y n dan el mismo resto al ser divididos por p.

Solución *En lo primero que nos fijamos, al igual que en el ejercicio anterior, es si la expresión general de S_q se puede simplificar. En vez de poner cada término como producto de 3 números, intentaremos ponerlo como suma de 3 fracciones con un denominador más simple,*

$$\frac{1}{q(q+1)(q+2)} = \frac{A}{q} + \frac{B}{q+1} + \frac{C}{q+2}.$$

Nuestra misión será encontrar los valores de A, B y C. Sacando factor común en la suma de fracciones de la derecha llegamos a la siguiente igualdad,

$$A(q+1)(q+2) + B(q+2)q + C(q+1)q = 1,$$

que deberá ser cierta para cualquier q. De donde obtenemos el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0, \\ 3A+2B+C &= 0, \\ 2A &= 1. \end{aligned}$$

Que tiene como soluciones $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$ y $C = \frac{1}{2}$. Por tanto, una vez tenemos el término general de S_q expresado de otra forma, veamos si podemos expresar S_q en función de p, ya que buscamos encontrar el valor de $\frac{1}{p} - 2S_q$.

Tenemos que,

$$S_q = \frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{4} + ... + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3p-5}{2}} - \frac{1}{\frac{3p-5}{2}+1} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3p-5}{2}+2}.$$

Agrupando los términos positivos y negativos y sacando factor común obtenemos que,

$$S_q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{2}{3p-5} + \frac{2}{3p-1}\right) - \frac{1}{3}\left(1 + ... + \frac{2}{p-1}\right).$$

Como vemos, tenemos $\frac{1}{2}$ que puede que nos dificulte las cosas y $\frac{1}{3}$. Además, nuestro primer paréntesis parece incompleto como si le faltasen los términos intermedios. A la vista de los resultados esto no tiene buena pinta. Volvamos a mirar exactamente lo que nos pide el problema. Se nos pide calcular $\frac{1}{p} - 2S_q$ y nosotros no hemos tenido en cuenta el 2. Así que multiplicamos por 2 nuestra expresión,

$$2S_q = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{2}{3p-5} + \frac{2}{3p-1}\right) - \frac{2}{3}\left(1 + ... + \frac{2}{p-1}\right).$$

Aun así seguimos teniendo el problema del $\frac{2}{3}$. Pero si nos damos cuenta, en el primer paréntesis faltan como ciertos términos, que los podemos sumar y luego restar para no cambiar el valor de nuestra expresión. En particular, la resta es el tercio que nos faltaba en el segundo paréntesis, por tanto la expresión queda,

$$\begin{aligned} 2S_q = &\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{2}{3p-5} + \frac{2}{3p-3} + \frac{2}{3p-1}\right) \\ &- \left(1 + ... + \frac{2}{p-1}\right). \end{aligned}$$

Vemos que en el primer paréntesis falta un 1, por tanto lo añadimos a ambos lados,

$$\begin{aligned} 2S_q + 1 = &\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{2}{3p-5} + \frac{2}{3p-3} + \frac{2}{3p-1}\right) \\ &- \left(1 + ... + \frac{2}{p-1}\right). \end{aligned}$$

Pero claro, esta expresión es más difícil de comprender, buscaremos dar algún ejemplo para ver si podemos *generalizarlo. Con $p=3$ el resultado es trivial y no nos da mucho juego, probamos con $p=5$, es decir $q=5$.*

$$2S_5+1=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right).$$

Así, tenemos que,

$$2S_5+1-\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right).$$

Hemos conseguido poner a la derecha todos los denominadores que sumen un múltiplo de 5 y el denominador no contiene al 5. Por tanto, el numerador será un múltiplo de 5. Y recordando que $\frac{1}{p}-2S_q=\frac{m}{n}$

$$2S_5+1-\frac{1}{5}=1-\frac{m}{n}=\frac{n-m}{n}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right).$$

Por tanto $n-m\equiv 0(\text{mód } 5)$ y entonces $n\equiv m(\text{mód } 5)$.

De forma general buscamos hacer lo mismo,

$$\begin{aligned}2S_q+1&=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{2}{3p-1}\right)-\left(1+\ldots+\frac{2}{p-1}\right)\\&=\frac{2}{p+1}+\ldots+\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\ldots+\frac{2}{3p-1}.\end{aligned}$$

Pasando $\frac{1}{p}$ al otro lado nos queda,

$$2S_q+1-\frac{1}{p}=\underbrace{\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\ldots+\frac{1}{p-1}}_{\frac{p-1}{2}\text{ términos}}+\underbrace{\frac{1}{p+1}+\ldots+\frac{1}{\frac{3p-1}{2}}}_{\frac{p-1}{2}\text{ términos}}.$$

Ahora agrupamos como hemos hecho en el caso particular y obtenemos que,

$$2S_q+1-\frac{1}{p}=\underbrace{\left(\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{3p-1}{2}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}\right)}_{\frac{p-1}{2}\text{ paréntesis}}.$$

En cada uno de estos paréntesis, su numerador es $2p$ y por tanto tenemos que,

$$\frac{n-m}{n}=2S_q+1-\frac{1}{p}=2p\left(\frac{1}{\frac{p+1}{2}\frac{3p-1}{2}}+\ldots+\frac{1}{(p-1)(p+1)}\right)$$

Al igual que antes tenemos que el denominador no contiene ningún factor p, lo que significa que $n-m\equiv 0(\text{mód } p)$ y por tanto $n\equiv m(\text{mód } p)$.

Problema 12.2 (Día 1). Un trazador de puntos medios es un instrumento que dibuja el punto medio exacto de dos puntos previamente señalados. Partiendo de dos puntos a distancia 1 y utilizando sólo el trazador de puntos medios, debes obtener dos puntos a una distancia estrictamente comprendida entre $\frac{1}{2017}$ y $\frac{1}{2016}$, trazando el menor número posible de puntos. ¿Cuál es el mínimo número de veces que necesitas utilizar el trazador de puntos medios, y qué estrategia seguirías para lograr tu objetivo?

Solución *Lo primero que debemos fijarnos es que podemos suponer que estamos en la recta real y que los puntos con los que empezamos son el 0 y el 1. Ahora, debemos fijarnos como funciona el trazador de puntos medios, debemos entender que sucede realmente y que valores tendrán esos puntos. Notemos que al hacer puntos medios siempre tenemos una potencia de 2 en el denominador, y podemos pensar que en k usos el punto tendrá que ser de la forma $\frac{n}{2^k}$ con $0\le n\le 2^k$. Lo probamos por inducción.*

- *Caso $k=1$. Tenemos que los puntos son $\frac{0}{2^1}$, $\frac{1}{2^1}$ y $\frac{2^1}{2^1}$.*

- *Caso general. Sean los puntos* $\left\{\frac{0}{2^k}, \frac{1}{2^k} \dots, \frac{r}{2^k}, \dots, \frac{s}{2^k}, \dots, \frac{2^k}{2^k}\right\}$*. Aplicando el trazador de puntos medios a dos cualesquiera obtenemos,*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r}{2^k} + \frac{s}{2^k}\right) = \frac{r+s}{2^{k+1}} \text{ con } 0 \le r+s \le 2^{k+1}.$$

Ahora que sabemos cómo son los puntos, calculamos la distancia entre 2 de ellos. La distancia entre 2 puntos tras haber usado k*-veces el trazador será* $\frac{|p-q|}{2^k}$*, es decir, un múltiplo de* $\frac{1}{2^k}$*. Necesitamos encontrar* n *y* k *de tal forma que,*

$$\frac{1}{2017} < \frac{n}{2^k} < \frac{1}{2016}.$$

O lo que es lo mismo, $2^k \in (2016n, 2017n)$*. Probando con distintos valores de* k *a partir de 12 encontramos que dicha igualdad se verifica para* $k = 17$ *y* $n = 65$*. Es decir, el número mínimo de cortes necesarios será de 17. Veamos que es exactamente 17, obteniendo dicha distancia con los cortes necesarios.*

Notemos que debemos intentar conseguir obtener 65 en el numerador con el menor número de cortes posibles, ya que después la forma más rápida de descender es tomando ese punto y el 0.

- *Con el primer corte obtenemos* $\frac{1}{2}$.
- *Ahora utilizamos* $\frac{1}{2}$ *y el* 1 *para obtener* $\frac{3}{4}$.
- *Hacemos puntos medios con* $\frac{1}{2}$ *y con el punto anterior obtenido. Hacemos esta técnica 7 veces hasta llegar a* $\frac{65}{2^7}$.
- *Por último, utilizamos el trazador con* $\frac{65}{2^7}$ *y el* 0*, diez veces seguidas y obtenemos* $\frac{65}{2^{17}}$.

Hemos realizado un total de 17 cortes y además hemos dado un ejemplo constructivo de como conseguirlo.

12.3 Problemas del día 2 de la Fase Nacional de la OME 2017

Lo primero que haremos, como en los problemas del día 1, será leer los enunciados y elegir en qué orden vamos a atacar los problemas. En este caso, los problemas a los que nos enfrentamos son los siguientes.

Problema 12.1 (Día 2). Se dispone de una fila de 2018 casillas, numeradas consecutivamente de 0 a 2017. Inicialmente, hay una ficha colocada en la casilla 0. Dos jugadores A y B juegan alternativamente, empezando A, de la siguiente manera: En su turno, cada jugador puede, o bien hacer avanzar la ficha 53 casillas, o bien hacer retroceder la ficha 2 casillas, sin que en ningún caso se sobrepasen las casillas 0 a 2017. Gana el jugador que coloque la ficha en la casilla 2017. ¿Cuál de ellos dispone de una estrategia ganadora, y cómo tendría que jugar para asegurarse ganar?

Problema 12.2 (Día 2). Determina el máximo valor posible de la expresión

$$27abc + a\sqrt{a^2+2bc} + b\sqrt{b^2+2ca} + c\sqrt{c^2+2ab}$$

siendo a,b,c, números reales positivos tales que $a+b+c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema 12.3 (Día 2). En el triángulo *ABC*, los puntos medios respectivos de los lados *BC*, *AB* y *AC* son *D*, *E* y *F*. Sean: *M* el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\angle ADB$ corta al lado *AB*, y *N* el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\angle ADC$ corta al lado *AC*. Sean además *O* el punto de intersección de las rectas *AD* y *MN*, *P* el punto de intersección de *AB* y *FO*, y *R* el punto de intersección de *AC* y *EO*. Demuestra que *PR* = *AD*.

Una vez leídos los problemas, el que me parece más sencillo de los tres es el primero. Por tanto empezaré intentando resolver ese. Después, el segundo problema es una desigualdad, que me gustan mucho y se me suelen dar bien. En cambio el tercero, de geometría, campo que no domino demasiado bien y por tanto lo dejaré para el final.

Mi orden de resolución será: Problema 1, Problema 2 y Problema 3. ¡Vamos allá!

Problema 12.1 (Día 2). Se dispone de una fila de 2018 casillas, numeradas consecutivamente de 0 a 2017. Inicialmente, hay una ficha colocada en la casilla 0. Dos jugadores A y B juegan alternativamente, empezando A, de la siguiente manera: En su turno, cada jugador puede, o bien hacer avanzar la ficha 53 casillas, o bien hacer retroceder la ficha 2 casillas, sin que en ningún caso se sobrepasen las casillas 0 a 2017. Gana el jugador que coloque la ficha en la casilla 2017. ¿Cuál de ellos dispone de una estrategia ganadora, y cómo tendría que jugar para asegurarse ganar?

Solución *En este tipo de ejercicios de estrategia ganadora es muy interesante pensar en cómo es el final, ya que hay pocos desenlaces posibles. Obviamente ni A ni B quieren caer en la casilla 1964, porque entonces el otro avanza 53 casillas y gana. Por tanto, ni A ni B querrán caer en la casilla 1964. Entonces para poner la ficha en esa posición es necesario provenir desde 1966, porque en ese caso el movimiento de ir 2 hacia atrás es obligatorio. En general, si un jugador cae en una casilla* k*, con* $k \geq 1964$ *tal que* $k \equiv 0(\text{mód } 4)$*, entonces pierde la partida y si la casilla* k *verifica que* $k \equiv 2(\text{mód } 4)$ *entonces el jugador que cae en esa casilla ganará la partida.*

Pero, ¿que pasa en los casos en los que k *es impar? Aplicamos el mismo pensamiento, vamos bajando y llegamos el 1965, pongamos por ejemplo que A llega a 1965, entonces B mueve obligado a 1963,en este caso A puede sumar 53, pero si hace eso llegaría a 2016 y entonces perdería* ($2016 \equiv 0(\text{mód } 4)$)*. Decide restar 2 y A cae en 1963. Pero en este caso B se da cuenta de que si suma 53 cae en 2014 y por tanto ganaría, ya que* $2014 \equiv 2(\text{mód } 4)$*. En resumen, tenemos que si un jugador cae en una casilla* k*, con* $k \geq 1964$ *tal que* $k \equiv 0(\text{mód } 4)$ *o* $k \equiv 1(\text{mód } 4)$ *, entonces pierde la partida y si la casilla* k *verifica que* $k \equiv 2(\text{mód } 4)$ *o* $k \equiv 3(\text{mód } 4)$ *entonces el jugador que cae en esa casilla ganará la partida.*

Ahora es el momento de buscar una estrategia y en estos casos conviene pensar en estrategias en las que tú hagas algo en función del movimiento que haga el rival. En este caso, una buena idea sería intentar siempre lo mismo. Es decir, por ejemplo si A avanza, B retrocede y si A retrocede, entonces B avanza, de esta forma tras 2 movimientos (uno de A y otro de B), el resultado es siempre el mismo. En este caso vamos a ver que A tiene una estrategia ganadora.

A empieza y avanza hasta la casilla 53 y ahora A debe de hacer justo lo contrario que haga B, de tal forma siempre avanzarán 51 casillas en los turnos B-A. A hará esto 38 veces hasta llegar a la casilla $53 + 38 * 51 = 1991$*. Recordando lo estudiado antes, tenemos que A ha caído en la casilla 1991, que verifica que* $1991 \geq 1964$ *y además* $1991 \equiv 3(\text{mód } 4)$*. Por tanto, en este punto A tiene que sumar siempre, excepto cuando le toque por obligación retroceder y acabará ganando la partida.*

Problema 12.2 (Día 2). Determina el máximo valor posible de la expresión

$$27abc + a\sqrt{a^2 + 2bc} + b\sqrt{b^2 + 2ca} + c\sqrt{c^2 + 2ab}$$

siendo a,b,c, números reales positivos tales que $a + b + c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Solución *En este tipo de problemas, lo que en realidad nos piden, es acotar superiormente la expresión por cierto valor sin depender de a, b o c. Para ello debemos buscar que aparezca* $a+b+c$*, valor que sí conocemos. Además, viendo que aparecen raíces, las desigualdades que podemos pensar en utilizar son las siguientes:*

- *Desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica (MA-MG)*
  Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales positivos, entonces,
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$
- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz (C-S)*
  Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reales, entonces,
$$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \geq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Una de las cosas que nos molestan son las raíces, podemos pensar en usar C-S, ya que eso es un producto y podremos elevar al cuadrado las raíces de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} & a\sqrt{a^2 + 2bc} + b\sqrt{b^2 + 2ca} + c\sqrt{c^2 + 2ab} \leq \\ & \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = \\ & = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3} \end{aligned}$$

Además tenemos que por la desigualdad MA-MG que,

$$27abc \leq (a + b + c)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Solo nos falta acotar $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ y ya lo tendríamos, el problema es que tras varios intentos no sale. Hemos llegado a un punto muerto. Debemos buscar otro enfoque.

Por tanto, igual nos conviene probar con la desigualdad MA-MG en vez de utilizar la de C-S, de esta forma,

$$\begin{aligned} & a\sqrt{a^2 + 2bc} + b\sqrt{b^2 + 2ca} + c\sqrt{c^2 + 2ab} = \\ = & \sqrt{a^2(a^2 + 2bc)} + \sqrt{b^2(b^2 + 2ca)} + \sqrt{c^2(c^2 + 2ab)} \leq \\ \leq & \frac{a^2 + (a^2 + 2bc)}{2} + \frac{b^2 + (b^2 + 2ca)}{2} + \frac{c^2 + (c^2 + 2ab)}{2} = \\ = & a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Podríamos haber separado por un lado $a^2 + b^2 + c^2$ y por otro $(a + b + c)^2$, pero hubiésemos llagado al mismo punto que antes. Debemos intentar conseguir con el $27abc$ alguna expresión parecida a lo que tenemos. Para ello probamos con la desigualdad C-S y tenemos que

$$9abc \leq (a + b + c)(ab + bc + ca).$$

Que multiplicando por 3 y sustituyendo, obtenemos,

$$27abc \leq \sqrt{3}(ab + bc + ca).$$

El problema que nos encontramos ahora es ese raíz de 3, pero lo podemos intentar introducir antes de utilizar la desigualdad MA-MG para ver si nos puede arreglar los coeficientes.

Operando como antes obtenemos que,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(a^2 + 2bc)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(2a^2 + bc).$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2(b^2 + 2ac)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(2b^2 + ac).$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3c^2(c^2 + 2ba)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(2c^2 + ba).$$
$$27abc \leq \sqrt{3}(ab + bc + ca).$$

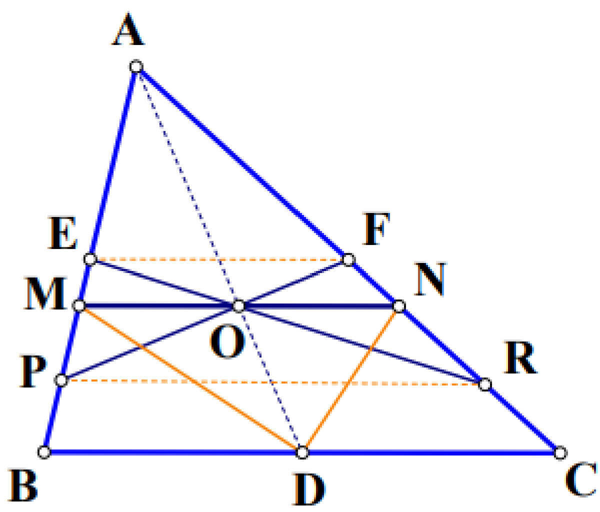
Sumando todo obtenemos que nuestra expresión es menor que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(a^2+2bc)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2(b^2+2ac)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3c^2(c^2+2ba)}+27abc\\ \leq \sqrt{3}(ab+bc+ca)+\frac{2a^2+bc+2b^2+ac+2c^2+ba}{\sqrt{3}}\\ =\frac{2(a+b+c)^2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Así tenemos que, el valor máximo que alcanza dicha expresión es, $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Problema 12.3 (Día 2). En el triángulo *ABC*, los puntos medios respectivos de los lados *BC*, *AB* y *AC* son *D*, *E* y *F*. Sean: *M* el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\angle ADB$ corta al lado *AB*, y *N* el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\angle ADC$ corta al lado *AC*. Sean además *O* el punto de intersección de las rectas *AD* y *MN*, *P* el punto de intersección de *AB* y *FO*, y *R* el punto de intersección de *AC* y *EO*. Demuestra que *PR* = *AD*.

Solución *Primero, dibujamos el triángulo que se nos dice en el enunciado.*



A partir del dibujo, podemos hacernos una pequeña idea de como vamos a poder probar lo que nos piden. Por un lado, observamos que hay ciertos segmentos que parece que son paralelos como son el EF, MN, *y* PR *que a su vez son paralelos a* BC. *Además parece que se forma un trapecio donde el segmento* MN *lo divide por la mitad. Esto nos podría relacionar el segmento* PR *con el* EF *y el* MN. *Por otro lado, podemos usar que* EF *y* MN *son paralelos teniendo en cuenta la semejanza de triángulos, igual podremos relacionar la alturas* AD *con* EF *y* MN.

Empecemos buscando ciertas relaciones.

- *Por el teorema de la bisectriz, tenemos que:*
$$\frac{MB}{AM}=\frac{BD}{AD} \text{ y } \frac{NC}{AN}=\frac{DC}{AD}.$$
- *Además como* $BD = DC$ *podemos relacionarlos y obtenemos,*
$$\frac{MB}{AM}=\frac{NC}{AN}.$$

- *Esto nos dice que los triángulos AMN y ABC son semejantes y por tanto tenemos la siguiente relación,*
$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN}.$$

Como queremos relacionar AD con EF, pero de momento no tenemos ninguna relación. Lo que si que sabemos es que EF es la paralela media del triángulo ABC, y por tanto la pondremos relacionar con BD y con BC.

- *Con lo último, escribiendo $AB = AM + BM$, obtenemos,*
$$\frac{AM + BM}{AM} = \frac{BC}{MN} \implies 1 + \frac{BM}{AM} = \frac{BC}{MN}.$$
- *Por tanto, aplicando que $\dfrac{MB}{AM} = \dfrac{NC}{AN}$, tenemos que,*
$$\frac{BD + AD}{AD} = \frac{BC}{MN}.$$
- *Y con $EF = 2BC$ y $BD = EF$ obtenemos*
$$\frac{EF + AD}{AD} = \frac{2EF}{MN} \implies \frac{2}{MN} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{AD}.$$

Esto nos recuerda mucho a la media armónica de EF y AD que nos da el valor MN, que casualmente es lo que tendríamos que calcular si en efecto $EFRP$ fuese un trapecio. Para ello utilizaremos el teorema de Menelao al triángulo AMN

- *Con el segmento ER*
$$\frac{AE}{EM}\frac{MO}{ON}\frac{NR}{RA} = 1 \implies \frac{AE}{EM}\frac{MO}{NO} = \frac{AR}{NR}.$$
- *Con el segmento FP*
$$\frac{AF}{FN}\frac{NO}{OM}\frac{MP}{PA} = 1 \implies \frac{AF}{FN}\frac{NO}{MO} = \frac{AP}{MP}.$$
- *Como $MO = NO$ y $\dfrac{AE}{EM} = \dfrac{AP}{MP}$ tenemos que,*
$$\frac{AR}{NR} = \frac{AP}{PA}.$$

Por tanto, eso nos dice que PR es paralela a MN y por tanto paralela a EF. Lo que nos construye el trapecio $EPRF$. Además como MN es paralela a las bases por el punto de intersección de las diagonales, MN es la media armónica de las bases del trapecio, es decir,
$$\frac{2}{MN} = \frac{1}{PR} + \frac{1}{EF}.$$
Y con lo visto anteriormente tenemos que $PR = AD$.