Razonamiento Proporcional en la enseñanza de la física en nivel bachillerato

ISSN 1870-9095

Ulises Solís Hernández
Instituto de Educación Media Superior de la CDMX, plantel Benito Juárez, Iztapalapa 2.

E-mail: ulises.solis@iems.edu.mx

(Recibido el 8 de enero de 2022, aceptado el 19 de febrero de 2022)

Resumen
Se presenta un enfoque para la enseñanza de la física en cursos de nivel bachillerato basado en el concepto de la *proporcionalidad*. Se argumenta la conveniencia de desarrollar simultáneamente el pensamiento proporcional y los aprendizajes disciplinares de las asignaturas de física, lo cual posibilita el desarrollo de habilidades del pensamiento científico como la identificación de las relaciones matemáticas entre magnitudes físicas, el hábito de buscar significado a las constantes físicas y la capacidad de hallar soluciones a problemas teóricos a partir de un razonamiento conceptual. Se muestran los aspectos principales de la didáctica de la matemática sobre proporcionalidad que se emplean en diferentes estrategias de enseñanza incluidas en este trabajo. Finalmente, se expone con detalle una secuencia didáctica en tres etapas diseñada para enseñar a resolver problemas de física, con ejemplos que ya han sido aplicados con estudiantes de nivel medio superior.

Palabras clave: Razonamiento Proporcional, Didáctica de la Física, Proporcionalidad.

Abstract
An approach to the teaching of physics in high school level courses based on the concept of proportionality is presented. The convenience of simultaneously developing proportional thinking and disciplinary learning of physics subjects is argued, which enables the development of scientific thinking skills such as the identification of mathematical relationships between physical quantities, the habit of looking for meaning to physical constants and the ability to find solutions to theoretical problems based on conceptual reasoning. The main aspects of the didactics of mathematics on proportionality that are used in different teaching strategies included in this work are shown. Finally, a three-stage didactic sequence designed to teach solving physics problems is detailed in detail, with examples that have already been applied with high school students.

Keywords: Proportional Reasoning, Physics Teaching, Proportionality.

I. INTRODUCCIÓN

En el nivel de educación básica, la mayoría de los jóvenes no alcanzan las habilidades y conocimientos necesarios en ciencias y matemáticas para interpretar datos científicos, para explicar fenómenos naturales y para desarrollar un plan que implique resolver un problema [1]. Las causas son diversas y en este trabajo nos enfocaremos en una que es intrínseca a la enseñanza de la física: la dificultad de usar el lenguaje matemático para la descripción de las leyes y conceptos físicos. Hasta en los cursos más famosos de física [2], se reconoce que en la enseñanza, para tener una correcta presentación de las leyes físicas es imprescindible el lenguaje matemático, lo cual requiere de mucho entrenamiento preparatorio. Hay enfoques de enseñanza que proponen no abandonar por completo las operaciones o fórmulas pero sí evitar los cálculos complejos y las manipulaciones matemáticas en los cursos introductorios. Hewitt P. plantea en [3] que al principio debemos privilegiar el aprendizaje de los conceptos e ideas de la física y resolver ejercicios numéricos mostrando a las ecuaciones como guías de pensamiento, y sólo más tarde, resolver problemas teóricos más complejos con ecuaciones.

Es común encontrar recetas para resolver problemas que están muy arraigadas en muchos libros de texto de física y recomiendan que el estudiante aprendan a resolver problemas siguiendo una serie de pasos que van desde identificar datos, ubicar una fórmula, luego despejar una incógnita o resolver una ecuación, y finalmente sustituir valores para presentar el resultado. Esta forma mecánica de resolver problemas transmite a los estudiantes de niveles básicos la falsa idea de que entender física significa aprender fórmulas y seguir los anteriores pasos para resolver problemas.

Pero resolver problemas no es usar una fórmula y llegar a un resultado numérico, es un proceso que implica practicar las habilidades de planteamiento cualitativo, análisis matemático y de interpretación de resultados [4]. Los docentes de ciencias de niveles básicos y de media superior debemos intentar desarrollar en nuestros estudiantes estas capacidades, pero es una meta con muchas dificultades, entre ellas, el uso limitado del lenguaje matemático. Para ello se propone aquí un enfoque en el que la física se enseñe en los cursos introductorios ligando la parte conceptual de esta ciencia con la resolución de problemas a través del concepto de proporcionalidad. La propuesta de estrategias de enseñanza que se presenta aquí, muestra cómo introducir muchas de las ideas y conceptos de los contenidos de las asignaturas de física a través del razonamiento proporcional. Al igual que en [5], se considera que hay muchas ventajas de usar ideas matemáticas como la *proporción*, la *razón aritmética* o las *relaciones directa e inversamente proporcionales* para ayudar a los estudiantes a entender las relaciones matemáticas o dependencias que puede haber entre diferentes magnitudes físicas.

Un objetivo de este trabajo es mostrar que una didáctica de la física basada en la proporcionalidad permite construir nuevos conceptos físicos y encontrar en muchos casos las relaciones funcionales o fórmulas que se usan en los cursos de física introductorios. Esta manera de pensar ayuda a los estudiantes a familiarizarse con la forma usual de expresar las relaciones entre magnitudes físicas, sobre todo aquellas que se pueden ilustrar a partir de experimentos que revelan las relaciones matemáticas; por ejemplo, la ley de Ohm o las tres leyes de los gases ideales. De esta manera, en las actividades experimentales se puede privilegiar más el revisar y observar la relación matemática entre variables físicas para ilustrar un concepto o ley física en lugar de prepararlas para obtener un resultado.

Es necesario retomar el concepto de proporcionalidad en el bachillerato, y en el caso de los cursos de física, hacerlo desde el inicio. La mayoría de los libros de textos introductorios de física usan bastante la idea de *Proporcionalidad* sin explicarla. Son pocos los textos que tienen un espacio para revisar este concepto, por ejemplo en [3, 6], sí aclaran en sus obras el significado de las relaciones directa o inversamente proporcionales (RDP e RIP respectivamente). Los docentes podemos apoyarnos en los anteriores textos pero para ser más efectivos, es importante conocer la didáctica de estos conceptos matemáticos y cómo se van construyendo otros nuevos a partir de los conceptos de razón y proporción. A final de cuentas, parte del desarrollo de cualquier estrategia de enseñanza de la física, siempre recoge elementos de la didáctica de las matemáticas.

II. DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS PARA UNA DIDÁCTICA DE LA FÍSICA

El Razonamiento Proporcional (RP) es inherente al ser humano debido como un recurso cotidiano para comprender el mundo. La forma en que comprendemos, manejamos y representamos a la proporcionalidad se ha revisado en numerosos estudios desde los años sesenta del siglo *XX* con puntos de vista epistemológico, curricular o cognitivo. Una revisión sobre el estado del arte de estos aspectos la podemos encontrar en [7].

En la enseñanza de las matemáticas la proporcionalidad es un tema clave en la educación básica, este tema concentra los aprendizajes en aritmética que han alcanzado los estudiantes y permite proponer muchos tipos de problemas en los cuales pueden aplicarse varios métodos de solución. En los programas de estudio en México, la proporcionalidad es considerada como un puente conceptual entre las matemáticas de nivel de primaria y las formulaciones algebraicas que se ven en secundaria. Comienza a enseñarse en 5° y 6° de primaria comenzando con el concepto de razón y terminan de construirse en 1° y 2° de secundaria con el concepto de proporción. Al final de este segundo ciclo, entre los aprendizajes esperados están que el estudiante: compare razones expresadas mediante dos números naturales, calcule valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, resuelva problemas de cálculo de porcentaje, y que resuelva problemas de proporcionalidad directa, inversa y de reparto proporcional [8]. Pero la investigación en matemática educativa y también la experiencia docente observa que los estudiantes no alcanzan un dominio adecuado en la comprensión de la idea de proporcionalidad [9]. Al evaluar el uso que le dan para resolver problemas se observa [10] que no tienen una comprensión correcta de cuando sí y cuando no se puede aplicar, además de que han aprendido a usar técnicas mecánicas de resolución en las que generalmente no se hace una reflexión sobre el significado de los resultados. A partir de esto, han surgido muchos esfuerzos de docentes e investigadores para mejorar la forma en que se enseña, se evalúa y se aplica este concepto con una la didáctica de la proporcionalidad en la educación básica en distintos países de habla hispana [10, 11, 12] .

A. Representaciones de la proporcionalidad

En los cursos de matemáticas se usa la proporcionalidad al presentar un tema en el que es necesario identificar una relación entre magnitudes y resolver un problema. Cuando recurrimos a ella buscamos que el estudiante tenga una intuición de su significado y que poco a poco adquiera la habilidad de usarla para describir fenómenos o comportamiento de variables [13]. Estos diversos propósitos de aprendizajes se pueden ir consiguiendo recurriendo a las diferentes formas en las que se caracteriza a la proporcionalidad [14]. A continuación se muestran estas diferentes representaciones y sus aplicaciones didácticas.

Simbólica. Es la que más se usa en la enseñanza de las matemáticas. La proporcionalidad es representada a través de la igualdad entre fracciones de magnitudes diferentes. Si tenemos una magnitud X con valores a y c, y otra magnitud Y con valores correspondientes b y d, decimos que son proporcionales si $a/b = c/d$, o en otra forma, si $a:b::c:d$. La forma simbólica es útil para resolver problemas del tipo de cuarto valor faltante reescribiendo la expresión de proporcionalidad como $a \cdot d = c \cdot b$. También es común usar esta representación para resolver problemas de porcentajes, tanto que en la educación secundaria se recomienda ampliamente para ejercicios de este estilo. A esta categoría de proporcionalidad pertenece la relación entre magnitudes proporcionales que suele plantearse en la forma,

$$\begin{aligned} a &\rightarrow b, \\ c &\rightarrow x. \end{aligned} \tag{1}$$

En donde x es una incógnita que se ha de encontrar con algún método de solución. Esta forma se ha extendido ampliamente en las escuelas pero se ha convertido en una metodología mecánica para resolver problemas con recetas que se siguen sin que tengan sentido para los estudiantes [15].

Verbal o escrita sin lenguaje algebraico. Expresar de manera oral o por escrita la relación entre dos magnitudes es un buen ejercicio previo a encontrar una relación funcional. Las relaciones proporcionales generalmente las presentamos para explicarlas en la forma: "*a* es a *b* como *c* es a *d*" o "Por cada a hay b". Estas oraciones son más útiles de lo que parecen, usando la razón unitaria se vuelve parte de un método para resolver problemas de búsqueda de incógnitas que es claro e intuitivo para los estudiantes y que además da sentido al resultado.

De igual forma, caracterizar verbalmente a la proporcionalidad se puede usar para resolver problemas de conversiones sencillas. La proporción se establece a partir de la equivalencia entre dos magnitudes y se modifica una de ellas siendo intuitivo lo que hay que hacer para encontrar el nuevo valor de la otra. Por ejemplo, para convertir de hp a watt partimos de la equivalencia 1 hp = 746 watt. Si queremos saber ¿cuántos watt son 3.7 hp? primero enunciamos la siguiente lista de correspondencia que para los estudiantes es fácil de obtener y que además tienen claro cómo se obtiene

$$\begin{aligned} 1\text{ hp} &= 746\text{ w},\\ 2\text{ hp} &= 1492\text{ w},\\ 3\text{ hp} &= 2238\text{ w}. \end{aligned} \tag{2}$$

Expresado así por escrito o verbalmente, los estudiantes se dan cuenta fácilmente que basta con multiplicar para encontrar el valor correspondiente a 3.7 hp. Practicar este procedimiento evita que los estudiantes estén adivinando la operación con la que deben realizar la conversión y comienzan a adquirir intuición en cuanto al tamaño de las cantidades que deben obtenerse; por ejemplo, ¡ellos se dan cuenta que están mal si resulta que 3.7 hp = 312 w!

Funcional o algebraica. Esta caracterización relaciona magnitudes de diferente tipo e interpreta a la relación de proporcionalidad como las veces que una magnitud es más grande o más pequeña que otra magnitud diferente. Cuando se caracteriza así a la proporcionalidad, siempre es posible definir una constante que relaciona a las dos magnitudes y y x:

$$y = k\cdot x \text{ para proporcionalidad directa,}$$

$$y\cdot x = k \text{ para proporcionalidad inversa.}$$

En donde k es una constante de proporcionalidad.

La constante de proporcionalidad que relaciona ambas magnitudes, en muchos casos es a su vez, una magnitud con un nuevo significado y con unidades que reflejan el tipo de proporcionalidad directa o inversa. Ejemplo: Podemos introducir a la aceleración uniforme de un objeto como la variación de su rapidez Δv cada cierto intervalo de tiempo Δt. Esto nos lleva a que si queremos encontrar cómo está cambiando esa rapidez es posible obtenerla a partir de esa constante de proporcionalidad $\Delta v = a\cdot\Delta t$. Aquí la constante de proporcionalidad (a) es una nueva magnitud y sus unidades indican la relación entre las magnitudes de la velocidad y el tiempo.

Gráfica y con tablas. Esta representación es una consecuencia de las anteriores. Hacer una tabla de datos no debe ser nada más para practicar muchas veces una fórmula. La covariación de los datos de cada par de variables es un indicio de si la variación de dos magnitudes es del tipo RDP o RIP. Después de expresar la proporcionalidad entre dos magnitudes en su forma funcional y con tablas, es inmediato usar la representación gráfica. Es un buen recurso visual pues ayuda a establecer la diferencia entre las RDP y las RIP.

También de las tablas se puede extraer la constante de proporcionalidad. En la Tabla 1 se muestran los datos reales obtenidos para estrellas que orbitan alrededor del agujero negro masivo SgrA* en el centro de la vía Láctea [16]. Reescribiendo el periodo orbital de cada estrella, T, en años, el radio promedio de la órbita, a, en unidades astronómicas y la masa central, M, en masas solares; es posible reescribir la Tercera Ley de Kepler en una expresión del tipo

$$T^2 = \frac{a^3}{M}. \tag{3}$$

Lo que manifiesta a la masa del agujero negro como la constante de proporcionalidad entre a^3 y T^2 que pueden encontrar los estudiantes y darle un significado.

TABLA 1. Datos basados en las observaciones de las estrellas identificadas que orbitan SgrA* [16].

Estrella	$a^3 \times 10^9$ (A.U.)	$T^2 \times 10^3$ (año²)
	0.941	0.231
	18.2	4.52
	12.0	2.96
	5.36	1.3
	5.83	1.4

Hay una gran variedad de problemas teóricos de física introductoria que se solucionan con proporcionalidad empleando las diferentes representaciones. Sin embargo, el resolver muchos problemas de proporcionalidad no significa que este concepto se haya identificado y comprendido. Entre los métodos o estrategias de solución de problemas de proporcionalidad que se usan en la escuela están la regla de tres, el de proporciones y el de la razón unitaria. Pero a pesar del amplio abanico de problemas que existen, por lo general los estudiantes aprenden a usar un solo método de solución, el de la regla de tres. Una de las razones de que los estudiantes no se den cuenta de que están frente a una situación de proporcionalidad es que se acostumbran a resolver problemas usando procedimientos mecánicos sin significado para ellos.

Es común que para resolver un problema los estudiantes piensen que debe haber una fórmula en algún lado que les va a ser útil y que solo hay que encontrarla. Pero debemos mostrarles que resolver problemas comprendiendo y expresando la relación adecuada entre las variables involucradas ayuda a manejar el lenguaje matemático y genera una nueva forma de comprender las ideas matemáticas y físicas.

III. ELEMENTOS DE DIDÁCTICA DE LA FÍSICA

Esta propuesta retoma diferentes aspectos de la enseñanza de la física que son importantes para los aprendizajes disciplinares y habilidades de pensamiento. Estos aspectos son básicos y a menudo se subestima su importancia, cuando deberían trabajarse más en las estrategias de enseñanza, es por eso que aquí los destacamos.

Identificar conceptos involucrados y reflexionar sobre su magnitud y unidades. Con la magnitud nos referimos al valor numérico, su magnitud es a veces desconocida por los estudiantes, no le dan sentido a los números, si son grandes o pequeños. Con hacer énfasis en que las constantes y sus unidades nos referimos a señalar que tienen un significado físico. Cuando los estudiantes han aprendido el valor semántico de las unidades, se acostumbran a que siempre debe tener unidades un resultado o medición y se preguntan cuáles deben ser las unidades cuando han terminado un problema. Asociación de conceptos con las cantidades y sus unidades. La mayoría de los conceptos o propiedades físicas no pueden ser presentados sin mostrar su magnitud y sus unidades, todos los profesores tenemos presente eso y siempre recordamos a los estudiantes cuando olvidan poner las unidades de algún resultado o medición. Pero en los cursos de física no se destaca la importancia que las unidades tienen para la comprensión del significado de un concepto, los estudiantes las ven como un acompañante de los números a veces con una sintaxis rara, por ejemplo, m/s^2 o J/(g°K).

En este trabajo se considera que debe dedicarse más tiempo a la explicación del significado semántico y operacional de las unidades fundamentales y derivadas, observamos que cuando se hace esto los estudiantes comprenden mejor los conceptos físicos y ven a las unidades como parte de su significado. También, al entender mejor las forma de las unidades derivadas, se reconocen las operaciones que hay entre variables físicas y esto sirve para proponer soluciones a problemas.

Valoración de las constantes físicas. Relacionado con la valoración de las unidades en la enseñanza está la familiaridad con las constantes físicas. Los estudiantes no dan la debida importancia a las constantes físicas, ellas tienen significado, no son solo números en una tabla de datos, comprender eso ya es un punto de partida para resolver un problema.

Muchas de las constantes físicas incluyen en su significado la dependencia entre más variables, como la densidad, el calor específico o la constante elástica.

Identificar la información y la relación entre variables del problema. Si en un experimento o actividad teórica descubrimos la dependencia entre dos variables físicas estamos encontrando la relación matemática que hay entre ellas y podemos intuir cómo se modifican cuando se propone un problema. En la enseñanza de la física es importante desarrollar esta habilidad y aquí discutimos que al introducir los conceptos y propiedades físicas pueden plantearse ejercicios en los cuales lo importante es identificar la dependencia entre variables físicas [5]. Estos ejercicios teóricos después pueden extenderse a la observación de un fenómeno o al diseño y ejecución de un experimento en el que lo más importante no es un resultado numérico sino encontrar la relación matemática entre las variables físicas involucradas.

Expresión de las leyes físicas. El lenguaje que usamos importa porque le da claridad a nuestras ideas. Las leyes físicas son enunciadas en un lenguaje que por lo general es oscuro y ajeno a los estudiantes. Es por eso que muchos docentes al principio evitamos presentar las ideas físicas con las palabras que fueron enunciadas por primera vez. Por ejemplo, en los textos la ley de Ohm se expresa como "la intensidad de la corriente en un conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial que hay en sus extremos e inversamente proporcional a la resistencia eléctrica", pero este lenguaje no es comprensible para estudiantes adolescentes no solo por los conceptos eléctricos, sino por el término que se usa para compararlas, la proporcionalidad. Se trata de conseguir que los estudiantes comprendan bien la forma en la que están expresadas las leyes de la física y una de las bases que soportan este enfoque de enseñanza es la comprensión del concepto de proporcionalidad, una herramienta conceptual que usan todo el tiempo los científicos y que cualquier ciudadano debería saber utilizar para su comprensión del mundo. Dado que la proporcionalidad es una herramienta matemática en la descripción de lo que nos rodea, su uso adecuado mejora la comprensión de las ideas físicas y merece tener más atención en los cursos de física.

IV. LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Aquí se presenta una alternativa didáctica con un enfoque de enseñanza en el que se inicie el aprendizaje de física articulando lo conceptual y la resolución de problemas a través de un lenguaje matemático que expresa el significado de leyes físicas y la relación entre magnitudes físicas. La propuesta está dirigida a la resolución de problemas en física y articulada a través de una secuencia didáctica, entendida como un grupo de actividades de aprendizaje y evaluación que con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas [17].

La secuencia didáctica está dividida en tres partes, cada una de ellas con objetivos propios en las que se resuelven problemas de distinta clase. Las tres etapas pueden usarse en algún tema específico de los contenidos y después repetirse cuando se avance en el curso. Es posible elegir cuál etapa se adapta más al momento en el que se encuentra un curso ya que algunas de ellas son más idóneas para ciertos contenidos. Cuando los estudiantes se enfrenten con problemas en cada etapa, puede que se equivoquen al resolverlos, sin embargo, el docente siempre debe discutirlos con todo el grupo para que se destaquen los aspectos relevantes de la didáctica: identificar magnitudes físicas, compararlas para tener una intuición de su tamaño, observar las unidades con que se presentan y entender la relación matemática entre ellas.

Primera etapa: comparación de magnitudes físicas. Se realizan ejercicios de comparación a través de la razón aritmética multiplicativa. Aunque es importante tener claro el concepto matemático de razón, el fin de esta etapa es comenzar a comparar magnitudes, lo cual servirá para varios propósitos de aprendizaje.

Por ejemplo, si repasamos el volumen de objetos, será más útil para la comprensión de la física comparar volúmenes que memorizar las fórmulas para calcularlos:

¿Cuántas manzanas del mismo tamaño caben en un huacal de 50 cm X 40 cm X 30 cm, si 12 manzanas llenan una caja de zapatos de 20 cm X 15 cm X 10 cm?

En este problema es sencillo calcular el volumen, pero lo más importante es que puedan comparar las magnitudes adecuadas para que desarrollen la habilidad de identificarlas. Ejemplo con superficies:

¿Qué es más grande un círculo con radio 6 cm o un cuadrado de 100 cm²?

Este ejercicio es para discutir con los estudiantes qué magnitudes del mismo tipo se pueden comparar del círculo y del cuadrado, no tiene sentido comparar el radio de un círculo con el área de un cuadrado. Aunque este problema se puede resolver sin usar fórmulas, se invita a los estudiantes a que dibujen las dos figuras geométricas.

Desde esta etapa podemos destacar la importancia del significado y sentido de las unidades:

Dibuja en el patio de la escuela exactamente 1 metro cuadrado. Ahora dibuja la superficie de un departamento de 70 m² y determina su perímetro.

Muchas de las unidades de longitud, área y volumen no tienen significado para las personas, para la mayoría de la gente un volumen de agua de 3 500 m³ solo es un número y no es capaz de imaginarse el tamaño de toda ese líquido. En esta actividad práctica se les pide a los estudiantes que dibujen en el suelo para que conozcan el tamaño real de 1 m².

Los errores de los estudiantes son siempre una oportunidad para identificar sus ideas previas y para que ellos poco a poco adquieran una comprensión de los temas de física:

Si en tu casa hay 5 focos de 60 watt cada uno, (a) calcula el consumo eléctrico en kilowatt·hora de todos los focos que hay en tu casa durante 60 días si cada noche están iluminando 8 horas. (b) Si el recibo de electricidad dice que se pagan 0.835 pesos por cada kw·h. ¿Cuánto dinero pagan en tu casa por tener encendidos todos los focos?

Un error común de los estudiantes es que calculan que en 60 días en total los focos iluminan 480 horas y al multiplicar los datos de potencia obtienen 144000, pero al escribir su resultado ponen ¡R = 144 000 kilowatt hora!, es decir, solo sustituyen watt hora por kilowatt hora. No distinguen que la magnitud del número debe modificarse debido al prefijo en las unidades. A la hora de resolver el inciso (b) algunos se dan cuenta de que debe haber un error en su respuesta al inciso (a), lo ven cuando calcula que el monto a pagar sería 120 240 pesos. ¡Es demasiado dinero! Analizar y responder estas respuestas hace que los estudiantes reflexionen y tengan conciencia de las unidades, este es un ejemplo de la costumbre de querer hacer siempre una operación sin sentido y de confusión de unidades.

Para desarrollar en los estudiantes una intuición sobre el tamaño de las unidades conviene en esta etapa hacer ejercicios de comparación de magnitudes físicas del mismo tipo pero que son múltiplos o submúltiplos entre sí:

Si una pila de 5 v genera en una placa electrónica una corriente de 0.075 A, ¿a cuántos miliAmpere equivalen?

Aunque este es un simple ejercicio de conversión hay muchos estudiantes que no se dan cuenta de eso, incluso algunos llegan a dar la respuesta *0.075 x 5 = 0.375*. Muchos de los que si se dan cuenta de la conversión no saben si hay que multiplicar o dividir para realizarla. Esto es un indicio de que han aprendido a hacer conversiones con fórmulas o procedimientos mecánicos en los que sólo tienen que multiplicar o dividir por algún número. Para resolver este ejemplo se recomienda hacer con los estudiantes estos ejercicios a partir de la equivalencia entre mA y A. Se explica a los estudiantes que no tienen que memorizar equivalencias, lo importante es saber que existen y darse cuenta cuando las necesitan. Una vez que se proporciona la equivalencia se plantean más conversiones secuencialmente en las que es intuitivo obtener el resultado:

$$\begin{gathered} 1\text{ A} = 1000\text{ mA}, \\ 0.5\text{ A} = 500\text{ mA}, \\ 0.25\text{ A} = 250\text{ mA}, \\ 0.1\text{ A} = 100\text{ mA}, \\ 0.09\text{ A} = 90\text{ mA}. \end{gathered} \tag{4}$$

Una a una, los estudiantes y el profesor van resolviéndolas mentalmente hasta llegar a un valor parecido al del ejemplo propuesto, cuando se llega a este valor, es inmediato responder que 0.075 A = 75 mA. Los estudiantes encuentran la relación entre mA y A a través de la comparación, lo que les permite hacer conversiones sencillas sin preguntar o tratar de recordar si hay que multiplicar o dividir entre mil.

Segunda etapa: problemas que relacionan dos o más magnitudes heterogéneas. Nuevamente se hacen ejercicios o preguntas que impliquen comparar magnitudes físicas de distinto tipo buscando encontrar una relación matemática entre ellas y, de ser posible, una constante de proporcionalidad a la cual también se le debe dar significado.

En la clase podemos pedirles a los estudiantes que encuentren cómo cambian entre sí magnitudes físicas cuando se modifica una de ellas. Por ejemplo, para las magnitudes de una misma sustancia: *masa* y *volumen*, se recomienda mostrar diferentes volúmenes de esa sustancia para que los estudiantes encuentren cómo debe cambiar la masa si se modifica su tamaño (Figura 1). Esta actividad se realiza antes de que se defina el concepto de *densidad* en el curso. Después de notar que hay una relación de proporcionalidad, lo que sigue es ver si pueden identificar la constante de proporcionalidad y ver que también aparece una cantidad similar en otras sustancias, lo que implica el hallazgo de una nueva magnitud física que además sirve para identificar a las sustancias.

FIGURA 1. Dos recipientes de diferente tamaño para plantear la pregunta: si se necesitan 200 gramos de café soluble para llenar un frasco grande, ¿cuántos gramos caben en el frasco pequeño? Al tratar de responder esta pregunta los estudiantes van encontrando la necesidad de relacionar la masa de la sustancia con su volumen.

En esta etapa es todavía más importante la significación de las constantes y variables físicas a partir de sus unidades. Tener conciencia de la importancia de las unidades permite ver a la naturaleza como una fuente de información y a la física como una forma de organizarla.

Es importante en la solución de estos problemas, no comenzar por las fórmulas, sino por los conceptos y sus unidades. Por ejemplo, la densidad es una propiedad física que relaciona dos magnitudes Físicas masa y volumen, las unidades de este concepto expresan la relación que hay entre ellas.

Es importante en la solución de estos problemas, no comenzar por las fórmulas, sino por los conceptos y sus unidades. Por ejemplo, la densidad es una propiedad física que relaciona dos magnitudes físicas masa y volumen, las unidades de este concepto expresan la relación que hay entre ellas. Si observamos que la densidad de la gasolina es 0.68 g/cm³, hay que explicar la relación entre estas dos magnitudes: *cada cm³ de gasolina tiene una masa de 0.68 g*. Se estudia este concepto como una razón y se expresa en su forma verbal, sin fórmulas, luego se presentan problemas sobre densidad que se pueden resolver como razones unitarias:

Al dejar caer un anillo de oro en una probeta con agua, el líquido sube del nivel de 70 mL al de 72 mL. Calcula la masa del anillo. Para resolver este problema los estudiantes pueden seguir una forma tradicional de solución. Si seguimos los pasos que suelen sugerir en libros de texto se resolvería con la secuencia de identificar los datos y la incógnita, luego recordar o buscar la fórmula $d=m/v$, despejar a la masa y sustituir la densidad del oro y el volumen haciendo la operación resultante. Pero aquí plantemos una alternativa de solución que privilegia el concepto de densidad y el valor de la constante física con sus unidades. Explicamos con detalle cómo se les presenta a los estudiantes una solución siguiendo esta didáctica: A. Identificamos las propiedades físicas y cuál de ellas es la que se quiere encontrar. El volumen es 2 mL y se quiere encontrar su masa.

B. Repasamos o reflexionamos que masa y volumen están relacionados entre sí. Esa relación es una propiedad física que distingue a una sustancia, todos los objetos de la misma sustancia tienen la misma densidad. Investigamos que d= 19.3 g /mL.

C. Expresamos el dato de la densidad como una relación unitaria: Por cada mL de oro hay una masa de 19.3 g. Los estudiantes se dan cuenta de la importancia de las unidades, si el volumen estuviera en m³ o litros hay que pasarlo a mL.

D. Usando la forma verbal de expresar una razón, observamos que el doble de volumen significa el doble de masa, el triple del volumen significa el triple de masa y así sucesivamente,

en 2 mL de oro hay una masa de 38.6 g,

en 3 mL de oro hay una masa de 58.8 g.

La idea de multiplicar para calcular la masa surge de manera natural. No se recurre a una fórmula para resolver el problema, no se realizó ningún despeje.

E. Queda reforzada la necesidad de las unidades, el resultado es 38.6 g y está claro que debe tener unidades de masa. A partir de estos problemas los estudiantes no piensan en una fórmula para calcular la densidad, sino que se preguntan ¿cuál será el valor de su densidad?

Resolver problemas de proporcionalidad comprendiendo su significado y expresando adecuadamente la relación adecuada entre las magnitudes involucradas, ayuda a manejar el lenguaje matemático. En el laboratorio se pueden plantear de esta manera problemas que impliquen la necesidad de obtener datos. En las unidades g/cm3 está implícita una razón expresada en su forma simbólica con una división entre magnitudes diferentes. Esto es muy relevante para plantear actividades que involucren hacer mediciones y obtener una propiedad física. Por ejemplo, si hay que conocer la densidad de una goma, en la mente tendrán en cuenta sus unidades y reflexionarán que basta con medir su masa y volumen para obtener ese dato. Esto refleja un punto de vista en el que el conocimiento se descubre y se estimula a través de la indagación.

El docente discute con los estudiantes ejercicios de este tipo con la didáctica aquí propuesta. Poco a poco los estudiantes pueden resolverlos sin la ayuda del profesor y sin angustiarse por saber fórmulas o despejes. Una vez mostrada esta metodología el estudiante resuelve problemas más complejos o con planteamiento diferente. Previo al planteamiento de este tipo de problemas ya se recordó el concepto de proporcionalidad.

Otros ejemplos que se pueden resolver con este enfoque, en ellos se hacen conversiones a través de la razón unitaria y se identifica claramente la necesidad de las unidades:

¿Qué pesa más, tu profe de física o todo el aire contenido en el salón de clases?

(a) ¿Caben 5000 litros de gasolina en un tanque de 2 m X 3 m X 1 m? (b) ¿Caben 5000 Kg de gasolina en un tanque de 2 m X 3 m X 1 m?

Tercera etapa. Problemas en los que los estudiantes proponen fórmulas o métodos de solución. Aquí se intenta propiciar un pensamiento creativo en los estudiantes, no necesariamente son problemas más complejos, lo que importa es el fin de que al final sean capaces de pensar en expresiones finales de cálculo o procedimientos diferentes.

Calcula la energía necesaria ocupada cuando se calienta una olla de aluminio de 1.2 kg de 20 °C a 75°C.

¿Cómo se aborda tradicionalmente este problema? Nuevamente tenemos dos opciones, con la forma tradicional: identificar datos, luego tomar una fórmula acorde al problema, y finalmente sustituir y calcular. Otra opción es siguiendo un procedimiento con RP. El enfoque es el que se sigue en las dos etapas anteriores pero culmina pidiendo a los estudiantes que sugieran una fórmula para resolver problemas del mismo tipo:

A. Recordamos que la cantidad de calor depende de la masa del objeto, del cambio de temperatura y del tipo de sustancia

B. Observamos que hay una propiedad física que relaciona todos los anteriores conceptos.

C. Se repasa el concepto de calor específico a partir de sus unidades Cal/g°C como una razón unitaria: por cada g de una sustancia, si quiero cambiar su temperatura un grado Celsius, se necesita una cierta cantidad de caloría.

D. Para el aluminio c= 0.22 Cal /g °C. ¿qué significa esto? Presentamos la forma verbal de esta relación: por cada gramo de aluminio, si queremos cambiar su temperatura 1 °C, se necesitan 0.22 Cal de energía.

E. Las operaciones para resolver el problema surgen en la mente de los estudiantes, hay un proceso de descubrimiento.

Después de varios problemas similares el docente puede cuestionarles cuáles son las operaciones y los datos necesarios que usaron para resolver el problema, al final les pide que piensen en una fórmula que incluya todo lo anterior. Varios de ellos son capaces de llegar a esta fórmula $Q = m\, c\, (Tf - Ti)$, y todos se quedan impresionados cuando el docente les enseña que es la que aparece en los libros de texto. ¡Ellos solos, han llegado a una fórmula de física!

En otros problemas la solución recae otra vez en la razón unitaria pero como parte de un proceso más desarrollado. Este tipo de problemas permite desarrollar nuevas habilidades matemáticas:

Un autobús sale de la CDMX a las 5 pm con destino a Veracruz con rapidez constante de 100 km/h. Una hora después, una familia en un Jeep sale desde el mismo punto siguiendo la misma ruta con rapidez constante de 140 km/h.

(a) ¿A qué hora el Jeep alcanza al autobús?

(b) ¿A cuántos km del punto de partida, el Jeep alcanza al autobús?

Regularmente este problema se puede resolver planteando y resolviendo una ecuación, esto sería algo muy complejo de seguir por estudiantes que apenas dominan la aritmética básica. Nuevamente partimos de expresar el contenido de la razón unitaria 100 km/h, ¿qué significa que la rapidez del autobús es de 100 km/h? Decir que cada hora el autobús recorre siempre 100 km expresa una profunda relación entre distancia y tiempo, 100 km/h constantes implica que el autobús recorre 200 km en 2 h o 500 km en 5 h. Lo mismo se puede decir para la rapidez del Jeep y esto nos lleva a pensar en una forma de encontrar las respuestas a los incisos (a) y (b): podemos expresar la relación proporcional entre distancia y tiempo con tablas comparando cuántos km ha avanzado el autobús y el Jeep. Una vez hecho esto, basta con observar los datos en las tablas para que los estudiantes puedan encontrar las respuestas inmediatamente. Este tipo de ejercicios también permite la representación gráfica de la relación proporcional entre distancia y tiempo; se pide a los estudiantes que grafiquen los datos y rápidamente notan que cuando las dos líneas que representan el movimiento de cada vehículo se cruzan, ahí están otra vez las respuestas del problema planteado (Figura 2).

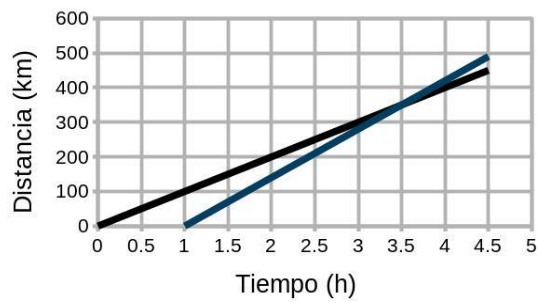

FIGURA 2. Gráfica del movimiento de dos vehículos que salen del mismo punto a diferente hora. La imagen ilustra la relación de proporcionalidad entre las magnitudes físicas, *distancia* y *tiempo.* En este caso, la constante proporcionalidad es la rapidez y el punto de intersección de las dos líneas es solución a un problema planteado a los estudiantes.

Como se ve en los ejemplos, esta didáctica está ligada al contenido que en ese momento del curso se esté viendo. No se pueden resolver los problemas si antes no se han discutido el significado de los conceptos. Se recomienda usar esta didáctica en los siguientes temas de cursos introductorios de física: presión, elasticidad, calor latente y específico, rapidez y aceleración uniforme, ley de Ohm, potencia eléctrica, segunda ley de Newton, ley de Coulomb, dilatación lineal.

Los puntos anteriores son parte de una estrategia didáctica, no una nueva forma de enseñar física. Está orientada para la parte inicial de los cursos introductorios de física, es decir, para niveles básicos o de bachillerato. Con ella tratamos de ajustar los tiempos de enseñanza en nuestro plan de trabajo sin tener que esperar a que nuestros estudiantes sepan resolver ecuaciones o despejes pero resolviendo problemas que deben tener resultados numéricos. Practicamos las relaciones matemáticas entre variables físicas sin esperar usar o memorizar fórmulas, introducimos correctamente conceptos de matemáticas como funciones y linealidad. Por último mejoramos su capacidad de analizar o proponer experimentos en los cuales poder identificar las variables físicas, poner a prueba sus hipótesis o predicciones y de interpretar o analizar resultados.

V. CONCLUSIONES

Después de haber practicado estas estrategias con estudiantes de bachillerato, se observa que cuando se expone el significado de los conceptos o ideas de física y al mismo tiempo se discuten las relaciones matemáticas que hay entre las variables físicas, esto ayuda a la comprensión de los contenidos y genera que el estudiante pueda pensar inmediatamente en soluciones a ejercicios y problemas sencillos sin recurrir automáticamente a una fórmula.

La didáctica presentada en este trabajo encamina a los estudiantes a que experimenten el descubrimiento y la indagación a través del razonamiento proporcional, así aprenden a actuar, razonar y pensar como científicos, se vuelven más creativos y actúan de manera activa frente a problemas nuevos.

La adaptación del docente a las circunstancias que le presenta cada curso es muy importante. Es posible iniciar cursos que fortalezcan el enfoque de indagación, modelación y argumentación a través de la resolución de problemas. Con esta secuencia didáctica se espera que el estudiante comprenda los conceptos e ideas físicas pero al mismo tiempo, que mejore su dominio en las matemáticas**.**

REFERENCIAS

[1] Programme for International Student Assessment (PISA), *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE, Resultados de México* (2018). https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf. Consultado el 2 de Febrero de 2021.

[2] Feynman R. P., Leighton R. B. & Sands M., *Lecciones de física de Feynman I. Mecánica, radiación y calor.* (Fondo de Cultura Económica, México, 2018).

[3] Hewitt P. G., *Física Conceptual*, décima edición, (Pearson Education, México, 2007).

[4] Manzur A., *Pasos para la resolución de problemas*, (Plaza y Valdés, UAM, México, 2005).

[5] Arons A. B., *Teaching Introductory Physics*. (John Wiley & Sons, New York, 1997).

[6] Máximo R. A. & Alvarenga A. B., *Física General con experimentos sencillos*, 4a edición. (Oxford University Press, México, 1999).

[7] Obando G., Vasco C. E. & Arboleda L. C., *Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte*, Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa **17**, 59-81 (2014).

[8] Secretaría de Educación Pública, *Aprendizajes clave para la educación integral*, Matemáticas Educación Secundaria, https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf Consultado el 10 de febrero de 2021.

[9] Butto Zarzar, C., Delgado Fernández, J., Calderón Araujo, D., & Bazán Ramírez, A., *El razonamiento proporcional en educación básica*, Horizontes Pedagógicos **21**, (2019). Obtenido de: https://horizontespedagogicos.ibero.edu.co/article/view/1712.

[10] Mochón Cohen S., *Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres*, Educación Matemática **24**, (2012).

[11] Silvestre A. I., da Ponte J. P., *Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional,* Revista Educación y Pedagogía **23**, 59 (2011).

[12] Aroza C. J., Godino J. D., Beltrán-Pellicer P., *Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad,* AIRES **6**, (2016).

[13] Palmas S., *Dos maneras de enseñar y aprender las matemáticas, La proporcionalidad*, México, SEMS-SEP (2016). Recuperado de http://prepa14.sems.udg.mx/sites/default/files/proporcionalidad-ciencias.pdf.

[14] Oller Marcén A. M., *Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*, Tesis doctoral, Universidad de Valladolid (2012). Recuperado de http://uvadoc.uva.es/handle/10324/1118.

[15] Fazio L. & Siegler R., *Enseñar Fracciones, cap. 7: Razonamiento Proporcional*. Serie Prácticas Educativas 22, Academia Internacional de la Educación. UNESCO (2010). Recuperado de http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices_22_spa.pdf.

[16] *El material utilizado en esta actividad fue producido por el Perimeter Institute (Waterloo, Canadá), fue traducido y adaptado por el ICTP South American Institute for Fundamental Resarch (ICTP – SAIFR, ictp-saifr.org) en Sao Paulo.* Recuperado de http://outreach.ictp-saifr.org/traducciones-al-espanol/

[17] Tobón S., Pimienta J. H. & García J. A., *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*, (Pearson Educación, México, 2010).