UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y
Aprendizaje de las Ciencias

DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.17022

GÓNDOLA
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS

Resultado de Investigación

SENTIDOS ATRIBUÍDOS PELOS ESTUDANTES NA SIGNIFICAÇÃO DO CONCEITO FUNÇÃO: CORRESPONDÊNCIA, RELAÇÃO, DEPENDÊNCIA E VARIAÇÃO

MEANINGS ATTRIBUTED BY STUDENTS IN THE SIGNIFICATION OF THE FUNCTION CONCEPT: CORRESPONDENCE, RELATION, DEPENDENCE AND VARIATION

SENTIDOS ATRIBUIDOS POR LOS ESTUDIANTES EN LA SIGNIFICACIÓN DEL CONCEPTO FUNCIÓN: CORRESPONDENCIA, RELACIÓN, DEPENDENCIA Y VARIACIÓN

Angéli Cervi Gabbi* , **Cátia Maria Nehring****

Cómo citar este artículo: Gabbi, A. C.; Nehring, C. M. (2021). Sentidos atribuídos pelos estudantes na significação do conceito Função: Correspondência, Relação, Dependência e Variação. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias, 16*(3), 522-537. DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.17022

Resumo

O presente artigo busca compreender, a partir da proposição de uma sequência de ensino, o processo de aprendizagem do conceito função, com um grupo de estudantes de alguns cursos da educação superior. Tal abordagem faz-se necessária tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos estudantes em relação a tal conceito. Aprofundou-se uma atividade que teve como objetivo explorar o nuclear do conceito função – correspondência, relação, dependência e variação – a partir de uma investigação que questiona: quais são as principais fragilidades e dificuldades apresentadas pelos estudantes em uma atividade envolvendo a essência do conceito função? Buscaram-se, na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na Teoria dos Campos Conceituais, aportes teóricos para sustentar este estudo. Os dados foram construídos e tratados a partir da Análise Textual Discursiva, tendo como categoria de análise: sentidos atribuídos pelos estudantes na significação do conceito função: correspondência, relação, dependência e variação. Identificou-se que a atividade planejada possibilitou argumentações e discussões entre os estudantes e destes com as pesquisadoras. Por meio dessa interação, os estudantes demonstraram domínio de conversão entre as representações semióticas identificadas na situação apresentada, conseguindo converter as informações em estruturas organizadas e criando esquemas matemáticos para resolução da atividade proposta.

Palavras Chave: Aprendizagem do conceito função. Teoria dos Campos Conceituais. Nuclear do conceito função. Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Abstract

From the proposal of a teaching sequence, this paper aims to understand the process of learning the function concept by a group of undergraduate students. Such an

Recibido: 23 de agosto de 2020; aprobado: 14 de julio de 2021

* Doutora em Educação nas Ciências. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Brasil. E-mail: angeli.gabbi@ibiruba.ifrs.edu.br – ORCID: 0000-0003-1000-3064.

** Doutora em Educação. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ). E-mail: catia@unijui.edu.br – ORCID: 0000-0001-5372-4107

approach has become necessary since the students have shown difficulties understanding that concept. We focused on an activity aiming at exploring the nucleus of the function concept – and what is meant by correspondence, relation, dependence, and variation –, by questioning: What are the main weaknesses and difficulties shown by students in an activity involving the essence of the function concept? In order to do that, we used both the Theory of Registers of Semiotic Representation and the Theory of Conceptual Fields to support this study. Data were constructed and treated through Discursive Textual Analysis, producing the following category of analysis: meanings attributed by students in the signification of the function concept: correspondence, relation, dependence, and variation. We found out that the proposed activity enabled some argumentations and discussions among students, as well as between them and the researchers. Through this interaction, the students evidenced that they mastered the conversion between the semiotic representations identified in the situation presented, thus being able to convert information into organized structures, and designing mathematical schemes to complete the proposed activity

Keywords: Learning of the Function Concept. Theory of the Conceptual Fields. Nucleus of the Function Concept. Theory of Registers of Semiotic Representation.

Resumen

El presente artículo busca comprender, a partir de la propuesta de una secuencia de enseñanza, el proceso de aprendizaje del concepto de función, con un grupo de estudiantes de algunos cursos de educación superior. Este enfoque es necesario en vista de las dificultades que presentan los estudiantes en relación a tal concepto. Se profundizó una actividad que tuvo como objetivo explorar el núcleo del concepto de función - correspondencia, relación, dependencia y variación - a partir de una investigación que cuestiona: ¿Cuáles son las principales fragilidades y dificultades que presentan los estudiantes en una actividad que involucra la esencia del concepto función? Se buscó en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica y en la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC), aportes teóricos para sustentar este estudio. Los datos fueron construidos y tratados a partir del Análisis Textual Discursivo, teniendo como categoría de análisis: sentidos atribuidos por los estudiantes en la significación del concepto función: correspondencia, relación, dependencia y variación. Se identificó que la actividad planificada posibilitó argumentaciones y discusiones entre los estudiantes y entre ellos y las investigadoras. A través de esta interacción, los estudiantes demostraron el dominio de la conversión entre las representaciones semióticas identificadas en la situación presentada, logrando convertir la información en estructuras organizadas y creando esquemas matemáticos para resolver la actividad propuesta
Palabras clave: Aprendizaje del concepto función. Teoría de los Campos Conceptuales. Nuclear del concepto función. Teoría de los Registros de Representación Semiótica

1. Introdução

No ensino de funções, na maioria das vezes, a definição de função é apresentada ao estudante seguida dos tipos de funções existentes, como linear, quadrática, exponencial, logarítmica, e assim por diante, sem compreensão efetiva do nuclear do conceito, que envolve correspondência, relação, dependência e variação[1]. Para Cabral e Baldino (2004, p. 168), "esta ordenação por certo garante a legitimidade epistemológica do conhecimento, mas impede que o aluno possa abordá-la de modo não-linear, através de múltiplos pontos de contato, unificando-os, mais tarde". Os autores lembram que "o conceito de função, como regra geral de correspondência e, mais ainda, como relação, é novo na história da matemática, indicando que, mesmo para os matemáticos, não foi um conceito fácil de ser produzido" (Ibid., p. 167).

A utilização de situações que problematizam a ideia de correspondência entre as variáveis precisa ser o ponto de partida no planejamento docente para o ensino de funções, o que exigirá do professor conhecimentos sobre a origem e o desenvolvimento do conceito ao longo do tempo. As definições, teoremas e regras são importantes também neste processo de compreensão, porém, é a partir da ideia de correspondência entre variáveis que o estudante consegue chegar ao entendimento do conceito, atribuindo sentidos e negociando significados.

O interesse pelo tema surge da vivência da primeira autora como docente da educação superior, principalmente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI – I), que trata de conceitos matemáticos que permeiam disciplinas de diversos cursos, como das Engenharias e da própria Licenciatura em Matemática. Além disso, vários estudos apontam altos índices de reprovação e desistência nessas disciplinas, o que pode ser identificado em Cury (2004), Garzella (2013) e Rezende (2003). Como causas para isso, são apontadas as dificuldades e fragilidades dos estudantes ao trabalharem os conceitos abordados, principalmente o conceito função, considerado essencial para os estudantes de educação superior dos cursos de Ciências Exatas.

2. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e dos Campos Conceituais para compreensão da aprendizagem

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) trata do funcionamento e do desenvolvimento cognitivo do pensamento humano, implicado, sobretudo, na atividade matemática, auxiliando na compreensão dos processos de aprendizagem (DUVAL, 2009) e a pensar o ensino de matemática sob a perspectiva do funcionamento cognitivo, de maneira a refletir sobre as dificuldades identificadas.

Duval (2012a) ressalta que, na matemática, é necessário compreender para poder aprender. "Do ponto de vista matemático, a compreensão começa com uma explicação que se baseia na utilização de propriedades matemáticas" (p. 309), sendo a intenção da educação possibilitar o desenvolvimento das "propriedades, dos números, das funções, das relações espaciais, topológicas, afins, métricas, etc." (p. 309-310). Nesse sentido, desenvolver o entendimento do aprender está inserido no método de conceitualização, ou seja, "de construção de um conhecimento relativo a cada propriedade e a sua utilização matemática ou prática, respeitando as restrições matemáticas sobre suas ordens de aquisição" (DUVAL, 2012a, p. 310). Já "do ponto de vista cognitivo, compreender em matemática é, antes de tudo, reconhecer os objetos matemáticos representados" (Ibid., p. 310).

A diversidade de representações de um único objeto mostra as possíveis transformações dessas representações por outras, ocorrendo, dessa forma, dois tipos diferentes de transformações na perspectiva da aprendizagem: tratamento e

[1]Mais informações sobre o nuclear do conceito função são encontradas na tese da primeira autora: GABBI, Angéli Cervi. O conceito função no processo de aprendizagem de um grupo de estudantes da educação superior. Tese de Doutorado, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí/RS, 2019.

conversão. Sendo assim, compreender que o objeto matemático precisa ser desenvolvido a partir de transformações de conversão (modificação entre registros de representação) e tratamento (modificações internas ao registro) é requisito para o entendimento e significação conceitual no ensino da matemática. Duval considera que "as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática" (2009, p. 15).

Nesse contexto, o processo de representação torna-se importante no ensino e na aprendizagem matemática, não sendo possível um indivíduo mobilizar conhecimento sem a realização de uma atividade de representação. Um exemplo de conversão no ensino de funções constitui-se na mudança do registro de equação algébrica para o registro gráfico. Para isso, "é necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros" (DUVAL, 2005, p. 17), algébrico e gráfico. Para ocorrer o processo de conversão, é importante, por exemplo, que o estudante consiga, entre outras coisas, distinguir abscissa e ordenada, reconhecendo, no registro algébrico e no registro gráfico, os parâmetros da função, bem como a relação entre os valores do eixo *x* (abscissa) e do eixo *y* (ordenada).

Para Duval (2011), as "dificuldades de leitura e de interpretação das representações gráficas cartesianas" (p. 97) podem ser resultantes da "falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro de representação gráfica e o registro da expressão algébrica" (idem, ibidem). No processo de representações gráficas, o autor salienta ser importante a compreensão das variáveis visuais e suas significações simbólicas, ou seja,

> [...] a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, interseção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1 etc.) (DUVAL, 2005, p. 17).

Neste caso, percebe-se que a atenção do estudante está voltada a um conjunto de propriedades do conceito, fazendo uma articulação entre a representação figural e algébrica. Segundo Duval (2011), "a passagem da representação gráfica para a expressão algébrica exige uma interpretação global" (p. 102). O autor aponta ainda que a relação entre as variáveis contidas no registro de representação gráfica e algébrica está vinculada ao procedimento de tratamento do registro gráfico, indicando três abordagens possíveis: "a abordagem ponto a ponto" (p. 98), a "abordagem de extensão do traçado efetuado" (p. 98) e a "abordagem de interpretação global de propriedades figurais" (p. 99).

A primeira, havendo como parâmetro os eixos graduados, reside em localizar pontos específicos, formando um par de números, e logo após marcar estes pontos no plano referencial. Nessa abordagem, não ocorre ligação entre a expressão algébrica da função e o gráfico correspondente. A segunda abordagem corresponde às ações de interpolação e extrapolação de representações gráficas, consistindo na união dos pontos por traçados e no esboço do registro gráfico. Duval (2011) afirma que esta abordagem se "mantém puramente mental: ela não acarreta traços complementares e explicativos como uma mudança de local na graduação dos eixos para ampliar uma parte do traçado" (p. 98). Já na última abordagem, mais importante do ponto de vista cognitivo, "o conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica" (p. 99). Portanto, esta abordagem consiste na visualização das mudanças que o registro gráfico gera na expressão algébrica e vice-versa, como também na detecção das variáveis visuais pertinentes relativas a essas modificações.

Ainda conforme Duval (2011), com a abordagem de interpretação global das propriedades figurais, "*não estamos mais na presença da associação 'um ponto - um par de números', mas na presença da associação 'variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica'*" (p. 99, grifos do autor). Para ele, as expressões algébricas são constituídas por variáveis visuais, podendo ser representadas pelos símbolos relacionais (>, <, =, ...), pelos símbolos de operações ou de sinais (+, -, ...), pelos símbolos de variável e pelos símbolos de expoente, de coeficiente e de constante. "A abordagem de interpretação global exige que a atenção esteja centrada sobre um conjunto de propriedades e não sobre valores particulares tomados um a um" (Ibid., p. 102).

Duval (2005, 2009, 2011) enfoca a aprendizagem do sujeito individual, mas é preciso, enquanto docentes/pesquisadores, ampliar este entendimento em situações de ensino, que se mostram em um universo coletivo (sala de aula) e em um contexto intencional. Nesse sentido, busca-se, na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Vergnaud, a complementação para os diferentes contextos/situações como elemento fundamental para a aprendizagem matemática, trazendo o entendimento do processo de conceitualização.

De acordo com Vergnaud (1993), a TCC é "uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual" (p. 1). Para Vergnaud (1998), essa teoria supõe que a essência do desenvolvimento cognitivo do indivíduo está no processo de conceitualização do real. Em relação à TCC, o autor explica:

> [...] é uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo as que dependem da ciência e da técnica. Por fornecer uma estrutura à aprendizagem, ela envolve a didática, embora não seja em si uma teoria didática. Sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entendendo-se por "conhecimentos", tanto as habilidades quanto as informações expressas (VERGNAUD, 1993, p. 1).

O autor evidencia numerosas etapas e processos, continuidades (filiações, como o autor denomina) e rupturas. Filiações "porque as competências novas apoiam-se, em parte, nas competências adquiridas antes" (VERGNAUD, 2011, p. 16), e rupturas "porque, às vezes, a tomada de consciência necessária à formação de uma nova competência exige que a criança deixe de lado ideias e formas de agir anteriores. Por vezes, mesmo, é preciso que ela as rejeite" (Ibid., p. 16).

Nas filiações, o estudante dispõe, no seu conjunto de competências (informações e habilidades), os procedimentos apropriados no tratamento da situação, referindo-se a uma relação de filiação aos conhecimentos preexistentes. Neste caso, "observam-se, para uma mesma classe de situações, comportamentos amplamente automatizados, organizados por um só esquema" (VERGNAUD, 1993, p. 2). Já no segundo caso, nas rupturas, o estudante não possui todas as informações e habilidades pretendidas no tratamento da situação, havendo uma interrupção do pensamento e um período de descoberta, podendo ocorrer, ainda, a invenção do novo. Nesta situação, "observa-se a sucessiva utilização de vários esquemas, que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados" (Ibid., p. 2). Lima e Santos (2015) afirmam que "não existirá um novo conhecimento se o organismo não tiver em sua estrutura cognitiva um conhecimento anterior para poder assimilá-lo e transformá-lo" (p. 37).

Conforme Vergnaud (1993), o "conceito" tem um sentido mais amplo do que comumente é utilizado. Para ele, o conceito "envolve um conjunto de situações que lhe dão significado: um conjunto de invariantes – propriedades do conceito – subjacentes ao raciocínio e um conjunto de símbolos utilizados para sua representação" (VERGNAUD, 1995 *apud* GROSSI, 2017, p. 18).

Neste cenário, os conceitos organizam-se em forma de esquemas.

A palavra *esquema*, para Vergnaud, significa "a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada" (1993, p. 2). Segundo ele, "é nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória" (Ibid., p. 2). Os invariantes operatórios fazem parte dos esquemas, que podem levar tanto os conhecimentos explícitos quanto os implícitos. "Esquemas são fundamentais porque geram ações, incluindo operações intelectuais, mas podem gerá-las porque contêm invariantes operatórios (teoremas e conceitos-em-ação) que formam o núcleo da representação" (MOREIRA, 2002, p. 16), sendo estes o elo entre os conceitos e os esquemas.

Vergnaud (1998, p. 167, tradução nossa) ressalta que "os teoremas em ação e os conceitos em ação são invariantes operacionais e, como tal, componentes essenciais dos esquemas". Para o autor, "um teorema em ação é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real; um conceito em ação é uma categoria de pensamento considerada como pertinente" (VERGNAUD, 1996a, p. 202, tradução nossa).

A partir de Vergnaud e também de Duval, ratificamos a importância relativa às representações, porém claramente ligada à importância dada à linguagem:

> A linguagem tem, antes de mais, uma função de comunicação, e a aprendizagem da matemática é uma aprendizagem muito fortemente socializada. Mas esta função de comunicação não pode exercer-se utilmente a não ser que se apoie nessa outra função de representação. [...] A linguagem e os símbolos matemáticos desempenham, pois, um papel relevante na conceitualização e na ação. Sem os esquemas e as situações, permaneceriam vazios de sentido (VERGNAUD, 1996b, p.191).

O papel da linguagem verbal e de outras maneiras de representação simbólica no processo de conceitualização do real é muito importante. Vergnaud relaciona a relevância da linguagem a outros significantes quando aponta seu papel em três tópicos, a saber: "ajuda a designação e, portanto, a identificação das invariantes: objetos, propriedades, relações e teoremas; ajuda o raciocínio e a inferência; ajuda a antecipação dos efeitos e metas à planificação e ao controle da ação" (VERGNAUD, 1993, p. 17-18).

A conceitualização, segundo Vergnaud (1998), é a "pedra angular da cognição" (p. 173, tradução nossa), isto é, do desenvolvimento cognitivo. Assim, ao estabelecermos de forma produtiva os conceitos, estamos também estabelecendo o conhecimento referente a eles. Na TCC, o interesse está na análise das operações de pensamento, uma vez que este é o centro da conceitualização, porém, se faz necessário que essas diversas operações de pensamento estejam presentes nos problemas que os estudantes encontram. De acordo com Otero *et al*. (2014), na conceitualização, "a ação operatória do sujeito em situação é tão indispensável quanto o uso de significantes explícitos, pois é somente por meio das situações e dos problemas que se pretende resolver, que um conceito adquire sentido para quem enfrenta uma situação" (p. 17, tradução nossa).

Levando em consideração que a conceitualização é o cerne do desenvolvimento cognitivo, Vergnaud apresenta campo conceitual da seguinte forma: "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição" (1982, p. 40, tradução nossa). O autor defende campo conceitual como um elemento de estudo que estabelece sentido para as dificuldades verificadas na conceitualização do real.

A ênfase que Vergnaud (1993) atribui às situações para a compreensão de um determinado conceito é tão significativa, que ele afirma ser um conjunto de situações, um contexto, a primeira entrada de um campo conceitual. No entanto, juntamente com as situações, estão os conceitos, pois "[...] a teoria dos campos conceituais surge, sobretudo, como uma psicologia dos conceitos" (Ibid., p. 9). O pesquisador explica que um campo conceitual é necessariamente definido por três conjuntos e representado por C = (S, I, Y), sendo:

> *S conjunto das situações* que dão sentido ao conceito (referência).
> *I conjunto das invariantes* em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado).
> *Y conjunto das formas de linguagem* (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (VERGNAUD, 1993, p.8).

Assim, ao estudar o desenvolvimento e utilização de determinado conceito no decorrer do processo de aprendizagem, devem-se levar em consideração esses três conjuntos concomitantemente. "Os esquemas evocados no sujeito individual por uma situação ou por um significante constituem o sentido desta situação ou deste significante para aquele indivíduo." (VERGNAUD, 1993, p. 18). Dessa forma, o estudante que desenvolve o esquema torna-se apto para enfrentar problemas e/ou situações complexas.

3. Procedimentos metodológicos

Planejamos, organizamos e desenvolvemos[2] uma sequência de ensino composta por situações problema e questões matemáticas, estruturadas em sete encontros, para um grupo de 11 estudantes em formação acadêmica. Os encontros aconteceram semanalmente, com duração de aproximadamente duas horas cada, no turno da tarde, sendo realizados no segundo semestre do ano de 2016. Dos 11 acadêmicos participantes, uma estudante não tinha cursado o componente de CDI – I; os demais estavam cursando esta disciplina no referido semestre. Os estudantes, nos encontros, foram organizados em três grupos – dois deles com quatro estudantes e um com três –, que permaneceram inalterados em todos os encontros. Os estudantes trabalhavam coletivamente, nos grupos, discutindo as representações e as possíveis soluções das situações propostas e estabelecendo a formação dos teoremas e conceitos em ação, conforme Vergnaud (1993). Interagiam, debatiam e apresentavam proposições para desenvolver as situações problema, mas cada um tinha seu material para anotações individuais. As situações também propiciaram aos estudantes a mobilização de registros de representações na linguagem natural, algébrica e gráfica, sendo possível o estabelecimento de procedimentos de conversões entre os registros, conforme Duval (2005, 2009).

Cada situação problema foi disponibilizada aos estudantes em folhas impressas; ao final de cada encontro, todo material com as anotações dos estudantes era recolhido pelas pesquisadoras e colocado em uma pasta, identificada pelo número do encontro. Todos os encontros foram gravados, utilizando-se um gravador em cada mesa onde os grupos ficavam, para identificar suas discussões, que foram transcritas posteriormente. As gravações dos áudios nos grupos e as respectivas transcrições foram salvas no computador das pesquisadoras, em pastas com identificação do encontro devidamente datado, constituindo o banco de dados produzidos, juntamente com o material impresso de cada estudante.

No decorrer das análises, os dados produzidos foram indicados por meio de excertos/diálogos/textos contendo o nome fictício do estudante, bem como *Pesq. 1* e *Pesq. 2* para indicar as falas/intervenções das pesquisadoras envolvidas no campo empírico, além da identificação do grupo e da data do encontro. Os dados produzidos na pesquisa, ou seja, as transcrições dos encontros realizados com os estudantes, a situação problema e os registros feitos pelos participantes, foram tratados pela Análise Textual Discursiva (ATD), que trabalha com significados produzidos com base em um conjunto de textos. De acordo com Moraes e Galiazzi (2016), a ATD "corresponde a uma metodologia de análise de informações de natureza qualitativa com a finalidade de produzir

[2] Ver informações completas na tese da primeira autora.

novas compreensões sobre os fenômenos e discursos" (p. 13).

Focamos nossas análises nas produções elaboradas e desenvolvidas pelos estudantes, não com a intenção de verificar se tais situações estavam certas ou erradas, mas com objetivo de investigar quais eram as dificuldades e as fragilidades apresentadas pelos estudantes nas referidas situações. Interessava-nos investigar a atribuição de sentidos e a apropriação de significados dos acadêmicos em relação à situação trabalhada naquele dado momento.

Para este artigo, focamos nos dados do Grupo 1. Selecionamos um encontro e, deste, uma atividade, a fim de entender o movimento de aprendizagem dos estudantes e as dificuldades apresentadas por eles ao trabalharem o conceito função a partir do seu nuclear, considerando a representação gráfica e a conversão na representação algébrica. Este foi o segundo encontro, realizado no dia 21 de outubro de 2016.

Foram feitos recortes do material coletado, em episódios que contemplam as intervenções e os procedimentos das pesquisadoras quando os estudantes são instigados a compreender/explicitar uma situação problema que envolvia o nuclear do conceito função e a resolvê-la a partir do contexto matemático, como verificamos no Quadro 1.

Buscando-se responder o problema da pesquisa, apresentam-se os resultados, as análises e as compreensões, considerando-se o *corpus* analisado, composto pela unidade de análise *compreensão do conceito função a partir de sua essência*; pela categoria definida *sentidos atribuídos pelos estudantes na significação do conceito função: correspondência, relação, dependência e variação*; e pela proposição *a compreensão do nuclear do conceito função potencializa a aprendizagem dos estudantes em relação a tal conceito*.

4. Sentidos atribuídos pelos estudantes na significação do conceito função: correspondência, relação, dependência e variação

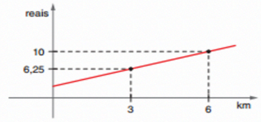
A TCC tem como princípio que o conhecimento emerge da resolução de problemas, do contexto, pois o conceito se torna significativo ao estudante quando este tem acesso a uma variedade de situações. A situação apresentada no Quadro 1 favorece as mudanças de registros de representação, conforme proposto por Duval (2005), e acreditamos que a inter-relação desses registros é estruturante para a elaboração do conceito função pelo estudante, compreendendo correspondência, relação, dependência e variação, essenciais para o entendimento de tal conceito.

Após ser entregue a situação problema ao grupo, os estudantes começaram a explicitar os entendimentos do registro gráfico, para então conseguir responder as questões propostas. Os acadêmicos deveriam visualizar as informações contidas no registro gráfico, identificando e mobilizando as propriedades, ou seja, fazendo uma interpretação global, como destaca Duval (2005, 2009), o que requer a caracterização das variáveis visuais pertinentes. Considerou-se também que as discussões nos grupos são importantes nesse processo de aprendizagem, já que, nestes momentos, os estudantes conseguem argumentar seus entendimentos para os colegas. Concordamos com Silva e Pinto quando mencionam que "a aprendizagem não se dá com o estudante afastado, sem viabilidade de relacionar-se com os colegas e professor, mas em conjunto, demonstrando para si e para os outros seus pensamentos e argumentos" (2019, p. 111). Vergnaud (1993) também considera a importância da interação social, uma vez que ela contribui para a formação de esquemas.

No Quadro 2, é possível identificar o entendimento inicial entre os estudantes do Grupo 1 ao analisarem a representação gráfica e, a partir disso, extraírem suas propriedades e características, para então resolver a situação proposta. Essa situação permite aos estudantes identificar a correspondência entre as variáveis envolvidas, exigindo-lhes compreensão das grandezas dispostas no plano cartesiano em seus respectivos eixos e requerendo um maior custo cognitivo, pois é preciso que os estudantes compreendam a representação

Quadro 1. Situação problema apresentada aos estudantes do Grupo 1

Na figura abaixo, é indicado o preço pago por uma corrida de táxi, em função da distância percorrida.



Nestas condições, responda:

a) Quais são as informações que podemos ler a partir da representação gráfica?
b) A partir dessas informações, podemos determinar o valor pago para uma corrida de 5Km? 10 Km? 12Km?
c) Se um passageiro gastar R$ 15,00, quantos quilômetros ele andou? E se gastar R$ 22,00? E se gastar R$25,00?
d) O que precisamos utilizar para determinar o valor da corrida?
e) Podemos determinar uma expressão matemática para determinar o valor gasto para uma corrida qualquer?
f) Agora, por meio desta expressão matemática, encontre os valores das letras b e c anteriores.

Fonte: Dados produzidos na pesquisa.

gráfica e consigam mobilizar suas propriedades. "O estudo da matemática deve contribuir para a formação global do estudante, e que o mesmo seja capaz de fazer leituras de mundo com uma melhor apreensão a partir do saber pensar matemática" (SILVA; PINTO, 2019, p. 111).

(01) **Letícia:** Então, tem um preço fixo da bandeirada. Para três quilômetros, pagam seis reais e vinte e cinco centavos, e seis quilômetros, pagam dez reais.
(02) **Letícia:** Então, a gente precisa achar o valor da bandeirada, não é?
(03) **Amanda:** A gente pode usar o *x*.
(04) **Letícia:** Sim, para achar o valor da bandeira, daí vai ser vezes o *x*, aqui é tipo, o valor do quilômetro mais a bandeirada *[Os estudantes referiam-se à função afim]*.
(05) **Amanda:** É *x* mais *b*, não é? *[Referindo-se à função f(x) = ax+b]*.
(06) **Juliana:** Dá para fazer por regra de três.
(07) **Letícia:** Tá, mas aqui, eu pensei que regra de três, você já vai estar incluindo o valor da bandeirada e daí você vai dividir, porque tem um valor fixo, não está no zero, tem o valor da bandeirada.
(08) **Amanda:** Ele vai te dar incluída a bandeirada.
(09) **Juliana:** Não, porque você vai usar esses valores aqui, olha, que são fixos, para fazer a regra de três *[Apontando para os valores contidos no registro gráfico]*.
(10) **Amanda:** Vou fazer por regra de três então.
[Depois de um tempo...].
(11) **Amanda:** Hum... Mas não tem como, porque, se seis dá dez, de que jeito cinco vai dar dez ponto zero oito? *[Observemos a Figura 1 a seguir]*.
(12) **Maria:** Regra de três composta não dá também? O que você acha?

Fonte: Transcrição da gravação de áudio, segundo encontro, Grupo 1, 21/10/2016.

Embora a situação apresentada pareça ser de fácil compreensão, exige um grau de abstração das informações para que se consiga resolver o problema; é necessário realizar a transformação de tratamento, considerando-se o registro de representação gráfica. A estudante Letícia (Linha 7) começa a identificar elementos da representação gráfica, mencionando que, quando o táxi estava parado (representado na origem do sistema de eixos), havia um preço a ser pago pela corrida, que era a bandeirada. Nesta afirmativa, a estudante mobiliza elementos para identificar a relação entre as variáveis da situação juntamente com o termo independente (que é a constante, o valor da bandeirada); ela busca vincular os conceitos já apreendidos e incorporados à sua estrutura cognitiva, para assim problematizar aspectos da situação.

Pela descrição apresentada no Quadro 2, as estudantes não estavam conseguindo compreender o significado de dependência, ou seja, que o preço a ser pago pela corrida dependia da distância percorrida – pois em nenhum momento do diálogo elas explicitam isto – e que havia uma dependência entre essas variáveis, a qual poderia ser expressa por meio de uma lei de correspondência, no caso, a lei da função. É por essa relação de *correspondência* entre as variáveis (distância percorrida *x* preço a ser pago) que, posteriormente, o significado de *variação* adquire sentido para a estudante. Assim, torna-se fundamental que o acadêmico consiga identificar a relação e a dependência entre as variáveis, além da ideia de correspondência.

e-ISSN: 2346-4712 • Vol. 16, No. 3 (sep.-dic., 2021), pp. 522-537

A estudante Amanda estava com dificuldade de colocar, na representação da língua natural, a expressão que representa a função linear, $f(x) = ax + b$ (Linhas 3 e 5). Percebe-se que o coeficiente *a* não aparece em sua fala, tampouco a variável dependente. Esperava-se que o grupo conseguisse expressar a relação entre os quilômetros percorridos e o valor pago pela corrida; no entanto, percebe-se que os estudantes não conseguiam expressar matematicamente a relação entre as grandezas. O grupo apresenta fragilidade em identificar as propriedades contidas na representação gráfica, para então mobilizar essas propriedades em signos e símbolos matemáticos, desenvolvendo esquemas para resolução da transformação de tratamento. Por outro lado, a estudante Amanda começa a envolver os signos *x* e *b* (Linha 5), apresentando indícios do entendimento da situação, conforme se pode observar no Quadro 2, mas ainda sendo frágeis os sentidos produzidos acerca da situação.

As estudantes não estavam conseguindo identificar a dependência entre as variáveis da situação apresentada, ou seja, a distância percorrida em quilômetros, o valor do quilômetro rodado e o custo total. Essa noção é fundamental para o entendimento do conceito função, identificado a partir do nuclear: correspondência, relação, dependência e variação. Percebe-se que o grupo, usando a representação da língua natural, conseguia explicar, por exemplo, que a bandeirada era um valor fixo, mas não conseguia fazer a conversão dessas informações da representação gráfica para obter a expressão matemática utilizando a noção de variável dependente (quilômetros rodados) e independente (preço a ser pago). Continuando com a discussão do grupo, a seguir, tem-se o Quadro 3.

A estudante Letícia demonstra indícios de compreensão do conceito de função afim e linear (Linha 24), ou seja, consegue estabelecer um sentido entre esses conceitos. Já a estudante Juliana confunde-se com os termos *variação* e *ponto médio* (Linha 26), não conseguindo compreender que,

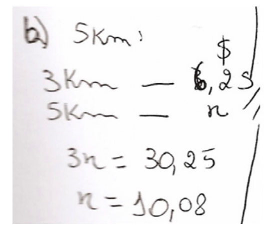


Figura 1. Registro da regra de três utilizada pela estudante Juliana. Fonte: Dados produzidos na pesquisa.

para utilizar a regra de três, neste caso, deveriam usar a variação no eixo dos quilômetros (eixo *x*) e a variação no eixo dos valores em reais (eixo *y*), o que indica que precisavam ainda mobilizar esquemas e outras relações para compreensão desses conceitos. O mesmo acontece com o emprego dos conceitos de regra de três simples e regra de três composta pelas estudantes Maria e Letícia (Quadro 2, Linha 12, e Quadro 3, Linha 28, respectivamente), pois não mobilizaram o sentido do conceito de proporcionalidade, não estabelecendo um significado para esse conceito. Sabe-se que a regra de três composta é um recurso utilizado em situações com mais de duas grandezas, o que não é o caso da situação problema em análise.

Quadro 3. Diálogo entre os estudantes do Grupo 1 e pesquisadora, para compreensão da relação de correspondência

13) **Letícia:** A gente pegou os dois pontos e achou a "coisa" *[tentando expressar a função]*. Olha, a gente pegou os dois pontos e fez a equação, substituiu e achou o valor de *a* e *b* *[estava se referindo à função afim]*.
(14) **Amanda:** Mas, por regra de três, fica difícil. Mas tem como fazer, eu acho, pela função. Eu nem lembro o que eu estou falando.
(15) **Letícia:** Eu ia dizer... Você nem sabe o que está falando. Aqui, professora, a gente vai achar as funções, não é? A função, para você conseguir substituir o *x* e o *y*, porque, por regra de três, se a gente faz, dá resultados diferentes.
(16) **Pesq. 2:** Como é que vocês pensaram na regra de três?
(17) **Letícia:** A gente fez de dois jeitos, a gente substituiu, na verdade, a gente fez uma regra de três simples.
(18) **Pesq. 2:** Me mostrem como vocês pensaram essa regra de três.
(19) **Amanda**: Primeiro, eu fiz o cinco e o *x* e o três e esse valor *[6,25]*, daí, o valor dá muito alto, acima do valor que dá com seis, e daí, depois, eu fiz com o seis; no caso, o seis dá um valor abaixo, dá certo, mas o três não *[A estudante estava se referindo ao registro mostrado na Figura 2, porém, ela não desenvolveu o cálculo, apenas calculou utilizando o recurso da calculadora e observou que o valor não estava fechando com o registro gráfico]*.

(20) **Juliana:** Mas, considerando essa parte aqui olha *[apontando para os quilômetros rodados no registro gráfico]*.
(21) **Pesq. 2:** Isso... Que tipo de função é essa?
(22) **Juliana:** Função afim.
(23) **Pesq. 2:** Tem diferença entre ser afim e ser linear?
(24) **Letícia:** Sim, porque a linear passa na origem.
(25) **Pesq. 2:** Muito bem, se parte da origem, então, é linear. Neste caso aqui, a função é afim. Eu consigo fazer uma regra de três? *[Pesquisadora aguarda um tempo; sem resposta, continua]*. Eu vi que vocês compararam, mas e se eu for fazer uma variação em *y* e em *x*? O que é variação? *[Pesquisadora aguarda um tempo; sem resposta, continua]*. Se vocês fizerem uma variação no eixo *y* e no eixo *x*, tem outra possibilidade usando regra de três?
(26) **Juliana:** Com o ponto médio, não dá para fazer? Por exemplo, aqui, olha, a variação aqui do meio, *[apontando para o ponto médio entre 3 e 6 no eixo x, dos quilômetros]*. Se eu usar o que está aqui no meio, eu não vou considerar essa parte aqui, eu acredito... Não sei...
(27) **Pesq. 2:** E será que ela é válida para qualquer intervalo depois?
(28) **Letícia:** É, porque depois... Qual vai ser o ponto médio de seis e dez, por exemplo... Só se for uma regra de três composta.
(29) **Amanda:** Então, a gente tem que fazer pela função?
(30) **Pesq. 2:** Na verdade, é uma pergunta que eu trouxe para vocês pensarem. Do jeito que vocês estão fazendo, é possível encontrarmos os valores solicitados na letra *b*? Se vocês quiserem fazer por regra de três, precisamos fazer uma aproximação, considerando a variação do preço a ser pago pela variação da distância percorrida. Essas variáveis são proporcionais? *[Pesquisadora aguarda um tempo; sem resposta, continua]*. Olhem para o eixo *y*, que é valores em reais, e para o eixo *x*, que são os quilômetros. Essa é uma possibilidade de conseguir resolver por regra de três, mas, usando a ideia de variação, tentem pensar nessa possibilidade. Como é que vocês fariam? *[Pesquisadora se afasta e deixa o grupo pensar e discutir sobre sua fala]*.
(31) **Letícia:** Tá e daí, você vai fazer como? Pegar um desses valores estabelecidos? *[Referindo-se aos valores que estão dispostos no registro gráfico]*.
(32) **Amanda:** Vamos tentar com todos e ver se dá certo *[Referindo-se aos valores da questão da letra b, ou seja, o valor pago por uma corrida de 5 km, de 10 km e de 12 km.]*.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio, segundo encontro, Grupo 1, 21/10/2016.

As estudantes do grupo queriam resolver a situação da letra *b* e *c* também por regra de três (cabe salientar que isto não foi imposto a elas; partiu do grupo querer resolver as letras *a* e *b* também usando a regra de três [Quadro 2, Linhas 6 e 10]), mas não estavam conseguindo explorar as propriedades e características da representação gráfica. Sabe-se que as variáveis da situação proposta não são proporcionais, então, não seria possível aplicar a regra de três, conforme as estudantes estavam indicando na Figura 2 (Quadro 3). É preciso trabalhar com a ideia de correspondência entre as variáveis e, assim, verificar a variação existente entre a distância percorrida e o preço a ser pago. Percebe-se que o conceito de relação não estava sendo mobilizado pelas estudantes; na Linha 44, a pesquisadora chama atenção para a relação estabelecida entre as variáveis da situação. A estudante precisava identificar a existência dessa relação para conseguir compreender e afirmar que existem uma dependência e uma variação entre as variáveis estabelecidas no problema. Após um tempo, uma das pesquisadoras aproximou-se do grupo novamente, com o intuito de verificar se as participantes estavam conseguindo entender a situação.

Quadro 4. Diálogo entre os estudantes do Grupo 1 e pesquisadora, para entendimento de variação

(33) **Pesq. 1:** Estão conseguindo?
(34) **Letícia:** Pela função, sim *[como podemos ver na Figura 4, a seguir]*.
(35) **Pesq. 1:** Por que não conseguiram por regra de três? Vocês usaram a ideia de variação para fazer por regra de três? *[Pesquisadora aguarda um tempo. Sem resposta, continua]*. O que a gente pode fazer? O que é a variação no eixo *x* e qual é a variação no eixo *y*? *[Pesquisadora aguarda um tempo. Sem resposta, continua]*. Nós temos variáveis que se relacionam? *[Os estudantes afirmam que sim, movimentando a cabeça]*. Existe uma relação? Essa relação varia, certo?
(36) **Letícia:** Mas a gente tentou fazer desse jeito e não conseguiu.
(37) **Pesq. 1:** O que vocês precisam fazer? Essa regra está correta? *[Apontando para a regra: 5 está para x e 3 está para 6,25, Figura 2 do Quadro 3]*. No nosso caso aqui *[apontando para o registro gráfico no eixo dos valores em reais]*, qual a variação?
(38) **Letícia:** 3,75... E 5 está para *x*?
(39) **Pesq. 1:** Usem a variação nos dois eixos, pensem: a variação do preço pago por uma corrida é diretamente proporcional à variação da distância percorrida?
(40) **Amanda:** Aaaaaa, tá.
(41) **Letícia:** Ao invés de usar cinco, usa a variação, não é? Aí, $\frac{(2x3,75)}{3}$ *[observemos a Figura 3 abaixo, que apresenta o tratamento correto da regra de três utilizada pela estudante Juliana]*.

(42) **Pesq. 1:** Ok, dá 2,5, e agora, o que eu tenho que fazer com este valor, 2,5? O que esse valor significa no registro gráfico e na situação apresentada?
(43) **Amanda:** Ah, a gente achou o 2,5 como o valor da bandeirada.
(44) **Pesq. 1:** Isso, pensem: o que é preciso fazer agora? Vocês diminuíram cinco de três, usando a ideia de variação. Eu quero saber agora a quantidade em reais que ele vai pagar, ou seja, essa variação foi em relação ao ponto 6,25, então, o que eu tenho que fazer com esses 6,25 agora?
(45) **Amanda:** Diminuir.
(46) **Pesq. 1:** Por que diminuir? Diminuir do quê?
(47) **Juliana:** Não. Com esse 2,5, você tem que somar os 6,5 *[Pesquisadora se afasta e deixa o grupo pensar]*.
(48) **Amanda:** Gente, eu estou "boiando" agora.
(49) **Letícia:** É que você achou a taxa de variação, entendeu?
(50) **Amanda:** Tá, mas e daí, por que eu tenho que somar?
(51) **Letícia:** Prof. como faço para achar o 10 agora? *[referindo-se ao 10 km solicitado da letra b]*.
(53) **Pesq. 01:** Vocês vão fazer a mesma coisa, usem a mesma ideia de antes.
(54) **Juliana:** Com o 7.
(55) **Pesq. 01:** Isso, mas agora entenderam porquê do número 7?
(56) **Juliana:** Sim, agora sim.
(57) **Letícia:** Dá 15.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio, segundo encontro, Grupo 01, 21/10/2016

A variação no eixo *x* (que na situação representa os quilômetros rodados) será de 3km, e a variação no eixo y (que neste caso é o valor em reais) será de R$ 3,75. A estudante Juliana consegue, após intervenções das pesquisadoras, estabelecer sentido para esta relação, como se observa na Figura 3. A estudante utiliza a representação simbólica de variação (Δ) nos eixos e, assim, consegue resolver a questão da letra b, empregando a ideia de variação e regra de três de forma correta, organizando seus esquemas e atribuindo sentido à situação. Neste momento, entende-se que a estudante se apropriou do significado de conceitos científicos

$$\begin{array}{l} 5 \text{ —— } x \\ 3 \text{ —— } 6,25 \end{array}$$

Figura 02. Registro da regra de três utilizada pela estudante Amanda. **Fonte:** Dados produzidos na pesquisa.

por meio de processos de análise e de síntese, ou seja, processos de abstração e generalização, respectivamente.

Por meio de um sistema linear, a estudante Letícia resolve o tratamento algébrico da situação, encontrando a função afim $\boxed{f(x) = 1,25\,x + 2,5}$; a partir da função, consegue substituir os valores dos quilômetros rodados (questão da letra *b*), para então encontrar o valor a ser pago em reais, como pode ser visualizado na Figura 4. Entende-se que, nesse momento, a estudante Letícia mobiliza as propriedades da representação gráfica para a algébrica, na qual apresenta um caso particular de função, ou seja, função afim.

Esta é outra possibilidade de resolver, diferentemente do que a colega Juliana fez na Figura 3, sendo ambos os tratamentos corretos – uma estudante utilizando a regra de três simples (Quadro 4, Figura 3), e a outra utilizando os pares ordenados mobilizados do registro da representação gráfica, substituindo na equação geral $\boxed{y = ax + b}$ e resolvendo o sistema linear (Figura 4). Ambas as estudantes criaram esquemas necessários para compreensão e resolução do tratamento utilizado na situação. Para a resolução por meio da regra de três, era preciso considerar a relação de dependência entre as variáveis envolvidas, a variação existente do preço pago em relação à variação da distância percorrida. O cálculo feito pela estudante Juliana, na Figura 3, mostra a variação da distância percorrida para uma variação do preço, e essa variação se deu quando o preço já era de 6,25 reais, por isso, a soma desse valor na variação do preço de 2,5 reais, 8,75 reais e 11,25 reais.

Entretanto, neste momento de análise, questiona-se: será que a estudante Juliana, ao utilizar regra de três para resolver a questão da letra *b* - Figura 3, utilizou de fato a ideia de proporção ou usou esta regra como um algoritmo para resolver a situação proposta? Diferentemente, a colega Letícia, na Figura 4, apresenta indícios da apreensão do nuclear do conceito função, quando mobiliza as informações e propriedades da representação gráfica para a algébrica. Neste último caso, por meio dos pares ordenados e da equação geral

$y = ax + b$, a estudante precisava mobilizar o entendimento de dependência entre as variáveis, de variável dependente e independente, bem como das coordenadas dos pontos cartesianos extraídos da situação problema, além da resolução do sistema linear.

Porém, ambas as situações (Figuras 3 e 4) apresentam custos cognitivos necessários para mobilização das propriedades envolvidas em cada um dos tratamentos algébricos explicitados anteriormente, isto é, a compreensão de relação, dependência, variação, par ordenado, variável dependente e independente e sistema linear. A estudante Letícia apresenta indícios de níveis de significação mais elevados.

Pela Figura 4, percebe-se que a estudante do grupo atribuiu sentido para os valores numéricos da representação gráfica, realizando a conversão do registro gráfico para o algébrico. Partiu da observação das relações entre as grandezas, distância percorrida e preço a ser pago, e generalizou uma regularidade para a situação apresentada, estabelecendo, assim, uma lei de associação, remetendo à função. A generalização e a abstração dos significados em processo de ascensão constituem o nuclear do conceito, que servirá de base para o desenvolvimento do pensamento. Desse modo, a reta expressa na representação do registro gráfico (exposto na situação problema proposta) foi representada algebricamente pela função $f(x) = 1{,}25.x + 2{,}5$.

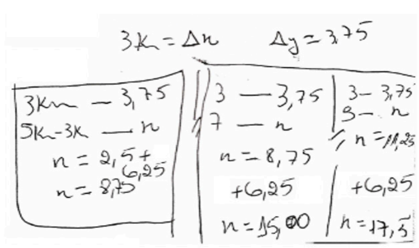


Figura 3. Registro da resolução da letra *b*, utilizando regra de três, pela estudante Juliana. **Fonte:** Dados produzidos na pesquisa

Para Vergnaud (1993, p. 3), "o funcionamento cognitivo dos alunos envolve operações que se automatizam progressivamente", como pode ser visualizado na Figura 4: a estudante Letícia troca o sinal quando troca o membro ou quando isola os parâmetros *a* e *b* de um lado da igualdade. Sendo assim, a confiabilidade de um esquema do estudante, de acordo com o autor, baseia-se no conhecimento que o estudante já possui, que pode ser explícito ou implícito.

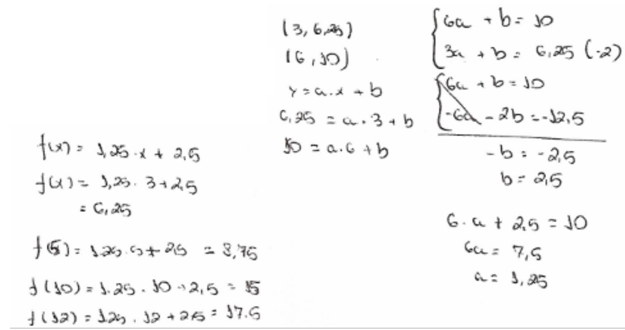


Figura 4. Recorte do registro de tratamento desenvolvido pela estudante Letícia **Fonte:** Dados produzidos na pesquisa.

Pela regra de três simples, as estudantes apresentaram dificuldade em perceber a relação de dependência entre as variáveis envolvidas no problema e também que as variáveis, neste caso, não eram proporcionais, portanto, seria preciso trabalhar com a variação existente entre o preço a ser pago e a distância percorrida. Essa foi a grande fragilidade do grupo, que só conseguiu visualizar essa relação de dependência a partir das intervenções das pesquisadoras (Quadro 4, Linhas 37 e 39), sendo esse um entendimento essencial para o estudo de função.

Analisando-se as falas trazidas nas Linhas 25, 30, 35, 37, 39 e 44, nota-se que somente após a intervenção das pesquisadoras é que as estudantes conseguem mobilizar as estruturas cognitivas necessárias para resolver a situação problema proposta, principalmente na resolução utilizando a regra de três. As estudantes demonstram conhecimentos consolidados e outros em processo de desenvolvimento, pois evidenciam indícios de avanço com o auxílio das pesquisadoras

(Quadro 4, Linhas 42 e 44). Por exemplo, as estudantes do grupo conseguem, partindo da análise da representação gráfica, visualizar a variação existente entre o preço a ser pago pela corrida e a variação da distância percorrida, aplicando uma regra de três para resolver a questão da letra *b*, o que é explicitado na Figura 3. Ainda, a partir dos pares ordenados (3, 6.25) e (6, 10), conseguem substituí-los na equação geral $y = ax + b$ e, mediante tratamento algébrico, encontrar a função correspondente, o que pode ser identificado na Figura 4. Isso demonstra que estão conseguindo realizar a conversão dos esquemas produzidos por meio da análise da representação gráfica, identificando as variáveis visuais pertinentes existentes na situação, bem como o nuclear do conceito, isto é, a relação de correspondência, relação, dependência e variação. Além disso, a transição entre as representações semióticas produzidas durante a compreensão da representação gráfica (Figuras 3 e 4) permitiu considerar que o grupo manifesta indícios de compreensão dos conceitos propostos na situação problema apresentada.

Ressalta-se que a conversão das representações semióticas a partir das informações do problema possibilitou apreensões conceituais, como vimos na Figura 4, o que ocorreu por meio de discussões e interações entre as estudantes e destas com as pesquisadoras. Silva e Pinto destacam que:

> Verifica-se que os ajustes e argumentação matemática, frutos de ações individuais dentro de um contexto coletivo, influenciaram os debates, construção e mobilização de saberes matemáticos. Os estudantes, a partir de discussões, avançaram na direção do conhecimento, e isso é uma qualidade do trabalho desenvolvido em conjunto. Quando é possibilitado ao sujeito contribuir com ideias e argumentar sobre o que está pensando, além de promover e evidenciar a própria aprendizagem, influencia e contribui para que os demais também sejam mobilizados a pensar sobre o assunto em debate (2019, p. 121).

O diálogo entre as estudantes, a atribuição de sentidos, a apropriação de significados individuais que faziam ao longo da resolução da situação e a explicitação dos sentidos entre as colegas do grupo ratificam o proposto por Vergnaud (1993) na aquisição dos conceitos. É por meio dessas discussões que as estudantes puderam organizar sua aprendizagem, revendo as possibilidades, estudando seus próprios erros, desenvolvendo os conceitos matemáticos de acordo com sua interatividade com as colegas, as pesquisadoras e a situação problema proposta.

Quando a estudante Juliana diz "*com o sete*", no final do Quadro 4 (Linha 54), entende-se que o significado de variação está presente de forma intuitiva, já que, de acordo com Duval (2012a), colocar em correspondência é essencial na Matemática, sendo fundamental em problemas de natureza multiplicativa, pois relaciona as estratégias intuitivas utilizadas pelos estudantes nas situações problema. Partindo desse pressuposto, observa-se que, na situação apresentada, nosso objetivo enquanto pesquisadoras é a compreensão, por parte das estudantes, do nuclear do conceito função; isso porque entendemos que, ao compreenderem os princípios gerais deste conceito, as estudantes saberão trabalhar, posteriormente, com as variações particulares, no caso, as famílias de funções (linear, quadrática, exponencial, ...). Assim, torna-se apropriado iniciar o ensino de função pelo nuclear do conceito: correspondência, relação, dependência e variação. A partir desse entendimento, estudam-se as particularidades, isto é, as famílias das funções.

5. Considerações Finais

O tratamento na representação algébrica desenvolvido pelo grupo (Figuras 3 e 4) indica que há organização dos conceitos e teoremas em ação, o que é necessário para a compreensão e realização da situação, e que os esquemas produzidos e utilizados pelas estudantes as conduzem para a correta conversão das representações pertinentes nas questões. Além disso, indica que as estudantes elaboram seus esquemas, trazendo a necessidade de criarem representações semióticas que permitam o entendimento do conceito função como relação entre as grandezas envolvidas no problema. Nesta ação, pode-se observar que as estudantes relacionam de forma precisa a variável independente da função dada quando, na Figura 4, substituem os valores dos quilômetros percorridos, para assim encontrar o valor pago pela referida corrida (o que é solicitado na questão da letra *b*).

Isso evidencia o domínio da transformação de conversão entre registros de representações semióticas identificados na situação problema, evidenciando a capacidade das estudantes em converter as informações dadas na representação gráfica em estruturas organizadas e matematicamente corretas, chegando à solução da situação proposta. A criação de esquemas pelas estudantes e a presença dos conceitos no momento de analisar a representação gráfica, de extrair as propriedades para então encontrar a lei da função e de resolver a questão da letra *b* (conforme visto nas Figuras 3 e 4) possibilitaram a apropriação das ideias matemáticas envolvidas.

Respondendo o problema deste estudo, percebe-se que as fragilidades/dificuldades por parte das estudantes estavam na identificação das propriedades do registro de representação gráfica, considerado por Duval (2009) como atividade de tratamento, bem como na identificação da correspondência existente entre as variáveis envolvidas na situação. Percebe-se, pelos diálogos, que as estudantes não estavam conseguindo entender o significado de dependência, que o preço a ser pago pela corrida dependia da distância percorrida e que essas variáveis não são proporcionais. As estudantes mobilizaram esquemas necessários para a resolução da atividade de tratamento na representação algébrica por meio dos questionamentos e intervenções das pesquisadoras. O tratamento da representação gráfica apresentou grande dificuldade para as estudantes, considerando a falta de conhecimento de suas propriedades, o que pode ser uma consequência do ensino desenvolvido, que não prioriza atividade de tratamento, e principalmente do trabalho com o conceito.

A interação do professor, neste caso, das pesquisadoras com as estudantes e de estudantes com estudantes é essencial no processo de aprendizagem, pois é a partir dessas interações que emerge o desenvolvimento cognitivo. Coube às pesquisadoras o papel de ouvir, incentivar, indagar, propor, problematizar, formular questões, no sentido de instigar a curiosidade e desafiar as estudantes, promovendo uma interlocução entre elas, a fim de propiciar a escolha de um caminho mais consistente e eficiente na resolução de determinadas situações. Entende-se que esses questionamentos/intervenções marcam os encaminhamentos com pretensão à produção de sentidos e apropriação de significados pelos estudantes.

Considera-se que o entendimento de correspondência, relação, dependência e variação se estabelece como núcleo da compreensão do conceito função, pois apresenta as relações conceituais em que consiste o próprio conceito. Generalizando esse entendimento, as ações e operações que as estudantes realizaram nas Figuras 3 e 4 mostram que compreenderam a essência do referido conceito e concretizaram o objetivo da atividade, o que contribui para o estudo das situações particulares ou das famílias de funções, estudadas posteriormente.

6. Referências

CABRAL, Tânia Cristina Baptista; BALDINO, Roberto Ribeiro. O ensino de matemática em um curso de engenharia de sistemas digitais. In: CURY, Helena Noronha (org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. Porto Alegre: EDIPUCRS, p. 139-186, 2004.

CURY, Helena Noronha. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. Porto Alegre, RS: EDIPUCRS, 2004.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da

Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papirus, p. 11-34, 2. ed. 2005.

______. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

______. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? Tradução de Luciana da Costa Oliveira. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 305-330, jul./dez. 2012a.

GABBI, Angéli Cervi. **O conceito função no processo de aprendizagem de um grupo de estudantes da educação superior**. Tese de Doutorado, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí/RS, 2019.

GARZELLA, Fabiana Aurora Colombo. **A disciplina de Cálculo I: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos**. Tese de Doutorado, (Educação), Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas/SP, 2013.

GROSSI, Esther Pillar. **Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud: Teoria dos Campos Conceituais TCC**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

LIMA, Melina Silva de; SANTOS, José Vicente Cardoso. **A teoria dos campos conceituais e o ensino de cálculo**. Curitiba: Appris, 2015.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Editora UNIJUÍ, 3. ed. rev. e ampl., 2016.

MOREIRA, M. A. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. Porto Alegre: Investigações em Ensino de Ciências. v.7, n.1, p. 7-29, 2002.

OTERO, Maria Rita; et al. **La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización em el aula de matemática y física**. Buenos Aires: Dunken, 2014.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 2003.

SILVA, Rodrigo Sychocki da; PINTO, Shéridan dos Reis, S. Funções quadráticas e tecnologías móveis: ações cooperativas em um experimento no ensino médio. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**, 14(1), 108-125, 2019. DOI: http://doi.org/10.14483/23464712.13317.

VERGNAUD, Gérard. A Classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: CARPENTER, T. P.; MOSER, J. M.; ROMBERG, T. A. (Eds.). **Addition and subtraction: a cognitive perspective**. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaun, p. 39-59, 1982.

______. Teoria dos Campos Conceituais. In: Nasser, L. (Ed.) **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, p. 1-26. Rio de Janeiro, 1993.

______. Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. **Perspectivas**, v. XXVI, n. 1, p. 196-207, março 1996a.

______. A Teoria dos Campos Conceituais. In BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, p. 155-191, 1996b.

______. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 2, n. 17, p. 167-181, 1998.

______. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. Curitiba, Brasil: UFPR. **Educar em Revista**, n. Especial 1/2011, p. 15-27, 2011.