



EMERGENCIA Y EVOLUCIÓN DE FORMAS DE PENSAMIENTO ADITIVO ASOCIADAS AL VECTOR CONTEO SIMPLE

EMERGENCE AND EVOLUTION OF ADDITIVE FORMS OF THINKING ASSOCIATED WITH THE SIMPLE COUNT VECTOR

EMERGÊNCIA E EVOLUÇÃO DE FORMAS DE PENSAMENTO ADITIVO ASSOCIADAS AO SIMPLES VECTOR DE CONTAGEM

Óscar Leonardo Pantano Mogollón*

Cómo citar este artículo: Pantano-Mogollón, O. (2021). Emergencia y evolución de formas de pensamiento aditivo asociadas al vector conteo simple.. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, 16(3), 538-552. DOI: <https://doi.org/10.14483/23464712.16739>

Resumen

En este artículo se presentan algunas consideraciones teóricas y empíricas en relación con la emergencia y evolución de formas de pensamiento aditivo asociadas al vector conteo simple en la actividad realizada por un estudiante al abordar una tarea asociada al conteo de cantidades. La emergencia y evolución de formas de pensamiento aditivo asociadas al vector conteo simple está caracterizada por los medios semióticos de objetivación que son movilizados por el estudiante en la actividad que emerge al abordar la tarea. El análisis del episodio de actividad, a través de la metodología multi-semiótica, sugiere, primero, que las formas de pensamiento aditivo se actualizan en la actividad desarrollada por él, a través de las acciones corpóreas, la actividad perceptual, las expresiones lingüísticas enunciadas y los signos numéricos utilizados. Segundo, que estas formas evolucionan en paralelo a la manera como se desarrolla y evoluciona la actividad, puesto que en la actividad se evidencian momentos distintos pero complementarios, los cuales están determinados por el refinamiento de los medios semióticos de objetivación que son movilizados. Este refinamiento da lugar a la actualización de formas cada vez más elaboradas de percepción, gestualidad, simbolización y discursividad.

Palavras Chave: Actividad. Medios semióticos de objetivación. Contracción semiótica. Nodo semiótico. Actualización. Movimiento.

Abstract

This article presents some theoretical and empirical considerations about the emergence and evolution of additive thought forms associated with the simple counting vector in the activity carried out by a student when tackling a task associated with counting quantities. The emergence and evolution of additive thought forms associated with the

Recibido: 6 de agosto de 2020; aprobado: 26 de noviembre de 2020

* Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación con sede en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Colombia. Magíster en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Colombia. Email: olpantanom@correo.udistrital.edu.co – ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0290-5068>

simple counting vector is characterized by the semiotic means of objectification mobilized by the student in the activity that emerges when approaching the task. The analysis of the episode, through the multi-semiotic methodology, suggests, first, that the additive thought-forms are updated in the activity developed by him, using the bodily actions, the perceptual activity, the enunciated linguistic expressions, and the numerical signs used. Second, these forms evolve parallelly with the activity developing and evolves in different but complementary moments during the activity, determined by the refinement of the semiotic means of objectification. This refinement gives rise to the updating of increasingly elaborate forms of perception, gestures, symbolization, and discursiveness.

Keywords: Activity. Semiotic means of objectification. Semiotic contraction. Semiotic node. Actualization. Movement.

Resumo

Este artigo apresenta algumas considerações teóricas e empíricas em relação ao surgimento e evolução de formas de pensamento aditivo associadas ao simples vector de contagem na atividade realizada por um estudante, ao abordar uma tarefa associada à contagem de quantidades. A emergência e evolução de formas de pensamento aditivas associadas ao simples vector de contagem é caracterizada pelos meios semióticos de objetivação que são mobilizados pelo estudante emergindo ao aproximar-se da tarefa. A análise do episódio, através da metodologia multi semiótica, sugere, em primeiro lugar, que as formas de pensamento aditivo são atualizadas na atividade por ele desenvolvida, através das ações corporais, da atividade perceptiva, das expressões linguísticas enunciadas e dos sinais numéricos utilizados. Segundo, que estas formas de pensamento aditivo evoluem em paralelo com o desenvolvimento do processo, uma vez que na atividade são evidentes momentos diferentes, mas complementares, que são determinados pelo refinamento dos meios semióticos de objetivação que são expressados. Esta melhora dá origem à atualização de formas de percepção, gesto, simbolização e discursos cada vez mais elaborados.

Palavras chave: Atividade. Meios semióticos de objetivação. Contração semiótica. Nodo semiótico. Atualização. Movimento.

1. Introducción

El desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes se ha constituido en *uno* de los tantos fines de la formación en matemáticas en los diferentes niveles de escolaridad. Ante este fin, surgen cuestionamientos como: ¿qué es el pensamiento de un hombre? ¿cómo se conceptualiza el pensamiento matemático desde la didáctica de las matemáticas o desde la

educación matemática?, ¿cómo puede observarse la manifestación y evolución del pensamiento matemático? Sin duda en la literatura hay una gran variedad de respuestas a estos cuestionamientos. Sin embargo, en este artículo presentamos *una alternativa* a la conceptualización del pensamiento de un hombre, del pensamiento matemático y del pensamiento aditivo desde una concepción materialista dialéctica. Lo anterior, con el propósito de poner en evidencia cómo un

estudiante materializa y transforma su pensamiento matemático, más específicamente, las formas de pensamiento aditivo que son actualizadas al abordar una tarea asociada al conteo. La actualización de estas formas está determinada por las acciones corpóreas, los gestos, la actividad perceptual, las enunciaciones, los artefactos y los signos que son movilizados y refinados por el estudiante. A través del contenido de este artículo y de las evidencias empíricas queremos poner en

Toda la actividad razonable del hombre está constituida por un combate constante, el combate contra la lucha por la existencia, para que todas las personas de la tierra puedan satisfacer sus necesidades, para que no conozcan la privación, el hambre ni la muerte lenta. (LEONTIEV, 1986, p. 4)

Estas formas de actividad emergen de una “actividad práctica-objetiva, productiva: el trabajo” (DAVYDOV, 1978, p. 279), puesto que es a través del trabajo que los individuos encarnan y fijan en el mundo las formas de esa actividad. LEONTIEV (1986, p. 5) afirma que “la actividad del hombre difiere de la del animal, es creadora y productiva. Lo cual es cierto, sobre todo, respecto de su principal actividad, el trabajo”. En la realización de esta actividad creadora y productiva los hombres no solamente se conforman con adaptarse a la naturaleza, la transforman en función de sus necesidades de evolución, constituyéndose así en la fuente de todas las formas de asimilación y apropiación de la realidad. DAVYDOV (1978, p.p. 293-294, énfasis en el original) plantea que “la naturaleza interviene como objeto del conocimiento humano sólo gracias a que se incorpora a la actividad objetiva-transformadora, productiva, en la práctica, convirtiéndose en naturaleza *humanizada*”.

El trabajo es la condición básica y fundamental de toda la vida humana, a tal punto que éste ha constituido al propio hombre, por ejemplo, sus manos se han ido perfeccionando a través del trabajo, posibilitando así que el hombre adquiera nuevas facultades motrices que humanizan su

campo motor y que lo diferencian del de otros mamíferos. VARELA (1971, p. 104, énfasis en el original) afirma que “la mano no es sólo el órgano del trabajo; *es también producto de él*”. Al igual que la mano los otros órganos de los sentidos, del hombre, han venido estimulándose, evolucionando y perfeccionándose lenta pero firmemente a través del trabajo, posibilitando así que el hombre se constituya y sea lo que es gracias a su participación en esta actividad.

Para abordar la tercera categoría central de la definición, es necesario preguntarnos ¿cómo son encontradas o apropiadas esas formas de actividad por el hombre? La respuesta a esta pregunta está asociada a la categoría expuesta con anterioridad, el trabajo. Así como las formas de actividad emergen en el trabajo humano, también son encontradas y apropiadas por los hombres en la realización de éste. Los hombres de cada generación en su participación en el trabajo tropiezan con una variedad de aptitudes, métodos, conocimientos y fenómenos que han sido creados por las generaciones precedentes. Al tropezarse con esta variedad hacen que ésta se encarne en el mundo y que se constituya en objeto de conciencia y entendimiento, posibilitando así que sea encontrada y apropiada por ellos. Los hombres sólo pueden apropiarse de las formas de actividad gracias a su vinculación y participación en el trabajo, puesto que es a través de éste que ellos actualizan los rasgos esenciales de la actividad humana que han sido cristalizados en los objetos materiales y espirituales a lo largo de la historia por innumerables generaciones de hombres (LEONTIEV, 1986).

Ahora bien, si consideramos los planteamientos expuestos con anterioridad se puede precisar que *el pensamiento del hombre no es atemporal, ahistórico y acultural*, más específicamente, no es independiente del trabajo humano. Al contrario, es a través de “los modos históricos y culturalmente formados de esa actividad, transformadora de la naturaleza, [que] se constituyen y funcionan todas las formas de pensamiento” (DAVYDOV, 1978,

p.p. 279-280). Formas que son el producto del desarrollo histórico cultural de la humanidad.

A través de esta concepción materialista dialéctica del pensamiento del hombre y algunos de sus rasgos característicos expuestos con anterioridad, se pretende alejarse de las doctrinas psicológicas tradicionales que interpretan el pensamiento, su estructura y desarrollo evolutivo al margen del proceso histórico. Así mismo, de aquellas posturas teóricas que interpretan el pensamiento al margen de los jalones esenciales de su filogénesis. Por ejemplo, DAVYDOV (1978, p. 279) ya había llamado la atención en la idea de que “una de las debilidades fundamentales de la psicología infantil y pedagógica tradicional radicaba en no considerar el pensamiento del individuo como una función históricamente desarrollada del “auténtico sujeto” de la misma, una función que es aprendida por él”.

En consecuencia, si hemos logrado hacer una aproximación a la caracterización del pensamiento de un hombre desde una concepción materialista dialéctica no podemos dejar atrás la caracterización del pensamiento matemático y del pensamiento aditivo desde esta concepción. Es por esta razón, que consideramos, que una manera de abordar el pensamiento matemático es asumiendo los planteamientos propuestos por RADFORD (2015), en particular su caracterización del pensamiento matemático como el movimiento del *thought* y su distinción entre *thought* y *thinking*, puesto que estas categorías conceptuales se encuentran en estrecha relación con las características expuestas con anterioridad del pensamiento de un hombre, como mostraremos a continuación.

2.2. Una aproximación a la caracterización del pensamiento matemático y del pensamiento aditivo.

Con el propósito de caracterizar el pensamiento matemático, centraremos la atención, inicialmente, en la distinción entre el *thought* y el *thinking* y posteriormente en la mediación entre estas dos categorías conceptuales. RADFORD (2015, p. 69) afirma que “el *thought* es potencialidad, pura

posibilidad; algo indefinido, sin forma”. El *thought* es la fuente del movimiento, se encuentra a disposición de los individuos como una capacidad para hacer algo y que sólo a través del movimiento se materializa en el mundo, constituyéndose así en objeto de conciencia y entendimiento de los individuos. Esta disposición no es ajena e independiente de ellos. Al contrario, se encuentra en el mundo, es dependiente de su experiencia sensual, corporal y material (RADFORD, 2003; 2009; 2015).

Por su parte, RADFORD (2015, p. 70) define el *thinking* como “la materialización o actualización del *thought*”, es decir, la ocurrencia real y concreta de aquello que antes de ponerse en movimiento era pura posibilidad, algo indefinido y sin forma. Complementando esta definición RADFORD (2015, p. 71) plantea que “el *thinking* sólo puede llegar a existir como el resultado del movimiento del *thought*”. Es a través del movimiento que el *thought* va transformándose en *thinking*. Pero esa existencia no quiere afirmar que el *thinking* habite en un mundo independiente de la experiencia de los individuos, como formas universales y atemporales o cosas en sí mismas.

Nótese, que el *thinking* no puede coincidir en su globalidad con el *thought*. Quizás una manera complementaria de abordar la distinción entre el *thought* y el *thinking* es retomar la caracterización que hace RADFORD (2013a, 2017) del conocimiento como *déficit* y *exceso*. RADFORD (2013a, 2017) caracteriza que el conocimiento es siempre *déficit*, puesto que la actualización del saber, general, es siempre un singular que no puede capturarlo en su globalidad. Así mismo, que el conocimiento es *exceso*, dado que adquiere contenido conceptual concreto, es decir, materialidad sensible, posibilitando así, superar al saber como algo que es indefinido y sin forma.

De lo anterior, proponemos concebir que el *thinking* es *déficit* y a la vez *exceso*, puesto que el *thinking* es una forma singular de tantas formas que puede adquirir el *thought* como producto de su movimiento a través de la *actividad sensual*,

corporal y material de los individuos, es decir, de las acciones que se constituyen a través del cuerpo, de los cinco sentidos y del uso de objetos físicos. Así mismo, el *thinking* es la ocurrencia real y concreta del *thought*. Ocurrencia que emerge y se encarna en el mundo como una actualización de la síntesis cultural e históricamente codificada de formas de reflexionar, actuar y tratar con el mundo y con los otros (RADFORD, 2015). Aquí es importante resaltar que la síntesis se concibe como una labor codificada. Sin embargo, con ello no queremos afirmar que esta labor no esté en la capacidad de ser transformada. Al contrario, siempre se encuentra en perpetuo devenir.

Ahora bien, es necesario preguntarnos: ¿cómo emerge u ocurre la mediación entre el *thought* y el *thinking*? Para dar solución a esta pregunta es indispensable esclarecer la conceptualización de mediación que asumiremos. Es por esta razón, que retomaremos los planteamientos de HEGEL (2009) asociados al sentido que le es asignado a este constructo teórico. “La mediación es tomar algo como un principio e ir hacia adelante a una segunda cosa, de modo que la existencia de esta segunda cosa depende de lo que hayamos alcanzado por medio de algo más que se distinga de ella” (HEGEL, 2009, p. 115). Esta definición precisa que la mediación es un proceso dinámico de transformación, de movimiento de un algo, la fuente del movimiento, la potencialidad, hacia una cosa que está compuesto de ese algo, la materialización o actualización de la potencialidad que es puesta en movimiento. En el curso de esa transformación, la cosa no emerge como algo inmediato, esa cosa que se obtiene no sólo lleva encarnada la historia de su mediación sino también las trazas de sus condiciones de posibilidad (RADFORD, 2015).

En el caso específico de la mediación entre el *thought* y el *thinking*, el carácter mediador lo constituye la actividad práctica humana (RADFORD, 2015). Es a través de la actividad humana que el *thought* es actualizado en el *thinking*, es decir, la actividad se constituye en el modo de existencia de la

potencialidad en algo concreto, cuya existencia no se encuentra en la mente de los individuos sino en el mundo concreto, como un *fenómeno material, corporal, encarnado y sensual*. Es necesario precisar que al mencionar los adjetivos material, corporal, encarnado y sensual queremos hacer énfasis en que el *thinking* se constituye, se encarna y se expresa a través de acciones corpóreas, de la actividad perceptual, de las palabras enunciadas, del uso de signos y de objetos físicos. La Figura 1 trata de capturar la relación entre el *thought*, el *thinking* y la *activity*.

Ahora bien, algunas de las relaciones que se pueden destacar entre la caracterización del pensamiento de un hombre desde una concepción materialista dialéctica y la caracterización del pensamiento matemático desde los planteamiento de RADFORD (2015) giran alrededor de los siguientes aspectos: El primero de ellos refiere al atributo fundamental

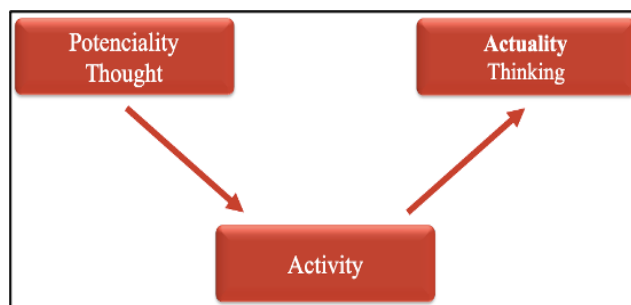


Figura 1. El *thinking* como la actualización del *thought* a través de una *activity* mediadora. **Fuente:** RADFORD, 2015.

que los caracteriza, el *movimiento*, es a través de éste que tanto el pensamiento de un hombre como el pensamiento matemático están impregnados de un carácter dinámico, es decir, que se encuentra en constante devenir. En una sola frase, *el movimiento es el modo de existencia del pensamiento tanto de un hombre como del pensamiento matemático de un hombre*.

El segundo aspecto refiere a lo que se pone en movimiento. Recordemos dos ideas centrales; la primera, que en la definición del pensamiento de un hombre lo que se pone en movimiento son las formas de actividad que han sido constituidas histórica y culturalmente por la sociedad. La

segunda, que en la definición de pensamiento matemático lo que se pone en movimiento es el *thought*, es decir, la síntesis cultural e históricamente codificada de formas de reflexionar, actuar y tratar con el mundo y con los otros (RADFORD, 2015). Lo que se pone en movimiento involucra categorías distintas porque en una de ellas se mueven formas de actividad mientras que, en la otra, formas de reflexionar, actuar y tratar con el mundo y con los otros. Es en esta última categoría, que se añade de manera explícita un elemento indispensable en la constitución y evolución del pensamiento, al Otro y a la Otredad. Pero, no exclusivamente al otro como sujeto de carne y hueso, sino también a la expresión de los sujetos que ha quedado cristalizada en sus producciones materiales, espirituales, estéticas, entre otras.

El tercer aspecto refiere a la manera como son apropiadas o actualizadas esas formas de actividad, de reflexionar, actuar y tratar con el Otro y la otredad, puesto que únicamente pueden darse a través de la actividad laboral que despliegan los individuos. En este sentido, la actividad laboral ejerce su mediación, en dos sentidos, primero haciendo posible que los individuos traigan al mundo material, sensual y concreto, las formas de pensamiento que han sido constituidas histórica y culturalmente, y, segundo haciendo posible que estas formas sean encontradas por ellos, es decir, que se constituyan en objeto de conciencia y entendimiento.

Es necesario precisar que la actividad determina las formas de pensamiento que son actualizadas y que se constituyen en objeto de conciencia. Es decir, las formas de pensamiento llevan encarnada la huella de la actividad que las media, ocasionando así, que algunas de las formas de pensamiento se manifiesten en determinado sentido y se concreten de determinada manera. Para comprender mejor esta idea, es necesario retomar los planteamientos propuestos por RADFORD (2017) en relación con la manera como el conocimiento es mediado por la actividad. RADFORD (2017, p. 107) afirma que “la actividad demarca la manera en la que el saber se

manifiesta en conocimiento”. De manera análoga, se puede afirmar que las formas de pensamiento matemático serán materializadas y encarnadas de acuerdo con la actividad que desplieguen los individuos.

Finalmente, y basándonos en las conceptualizaciones descritas con anterioridad proponemos que el pensamiento aditivo es el movimiento de formas de actividad, asociadas al conteo y comparación de cantidades, a la representación y designación de cantidades-números, a la agregación de cantidades-números y a la determinación de diferencias entre cantidades-números, que han sido constituidas histórica y culturalmente por las generaciones precedentes. Por ejemplo, actividades en las cuales los hombres han tenido que “ocuparse constantemente con las más diversas cantidades de objetos (la cantidad de pájaros o bestias matadas en la caza, la cantidad de peces capturados, la cantidad de animales domados y similares)” (KILPATRICK *et al.* 1975, p. 44). Así mismo, actividades que han emergido de “problemas de inventario, de reparto y trueque que surgieron en la práctica [en la actividad humana] [y que] exigieron de medios cada vez más precisos de análisis numérico de estas cantidades de objetos para poder compararlas” (KILPATRICK *et al.* 1975, p. 44). La actualización del pensamiento aditivo ocurre a través de la actividad, la cual pone en movimiento al pensamiento aditivo, lo trae a la vida, constituyéndose así en objeto de conciencia y de entendimiento para los estudiantes y para los profesores.

3. Metodología y análisis de datos correspondiente a un episodio de la actividad.

Los datos de investigación que presentamos están vinculados a la investigación titulada *Formas de pensamiento aditivo en estudiantes de tercero de primaria (8-9 años): Una aproximación desde la Teoría de la Objetivación*¹. Esta investigación está orientada por la pregunta ¿Qué formas de

¹ Esta investigación se inscribe y se desarrolla en el marco del programa académico Doctorado Interinstitucional en Educación con sede en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ubicada en la ciudad de Bogotá.

pensamiento aditivo aparecen, son producidas, a través del encuentro con saberes históricos-culturales aritméticos en la labor conjunta entre estudiantes de tercer grado de Educación Básica Primaria y el profesor durante la resolución de tareas de tipo aditivo en los naturales? Con el propósito de poner en movimiento esta pregunta de investigación se ha propuesto como objetivo general caracterizar las formas de pensamiento aditivo que aparecen a través del encuentro con saberes histórico-culturales aritméticos en la labor conjunta entre estudiantes de tercer grado de Educación Básica Primaria y el profesor durante la resolución de tareas de tipo aditivo en los naturales. Esta investigación está enmarcada en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo e interpretativo (ERNEST, 1991).

La investigación se desarrolló con 35 estudiantes de tercer grado de Educación Básica Primaria de una institución educativa de carácter oficial y público de la localidad de Usme, perteneciente a la ciudad de Bogotá. Así mismo, se realizó en el transcurso de las sesiones de la clase de matemáticas que hacen parte del programa institucional propuesto por la institución. Cada sesión tenía una duración de 120 minutos. Éstas eran dirigidas por la profesora titular de la asignatura de matemáticas.

La recolección de la información se realizó en cuatro fases teniendo en cuenta las orientaciones de MIRANDA, RADFORD, GUZMÁN (2007). La primera fase corresponde a la grabación en video y audio de la actividad en el aula de clase. Se utilizaron dos cámaras de video, las cuales registraron la actividad que emergió entre los estudiantes y la profesora durante toda la resolución de cada una de las tareas propuestas. La segunda fase corresponde a la obtención de las hojas de trabajo y a la toma de fotografías de las anotaciones realizadas en el tablero. El análisis de las grabaciones en video y audio constituyen la tercera fase. Finalmente, la cuarta fase está asociada a la realización de transcripciones del discurso verbal y no verbal, es decir, de las acciones multimodales que fueron movilizadas

por los estudiantes y la profesora.

El análisis de los datos de investigación se enmarca en la metodología multi-semiótica (RADFORD, BARDINI, SABENA, 2006; 2007). En esta metodología se centra la atención en las relaciones, la dialéctica y la dinámica entre lo enunciado, los gestos, el ritmo, la actividad perceptual, la postura corporal, el uso de signos y artefactos (RADFORD, BARDINI, SABENA, 2006). El análisis de los datos es refinado a través de la articulación de las diferentes fuentes de información con el propósito de rastrear las relaciones y refinamientos entre los diferentes medios semióticos de objetivación² que son movilizadas por los estudiantes para materializar su pensamiento matemático. De acuerdo con RADFORD (2012b, p. 120)

El pensamiento es una práctica social tangible materializada en el cuerpo (por ejemplo, a través de acciones kinestésicas, gestos, percepción, visualización), en el uso de signos (por ejemplo, símbolos matemáticos, gráficos, palabras escritas y habladas) y artefactos de diferentes tipos (reglas, calculadoras, etc.).

4. Resultados

Inicialmente, la profesora hace una presentación general de la tarea ante el grupo de estudiantes. Ella enfatiza en cada uno de los ítems, las preguntas y acciones asociadas a cada uno de éstos y la manera cómo se debe proceder en su solución, resaltando que la tarea debe ser resuelta de manera individual con el propósito de que se familiaricen con cada uno de los ítems propuestos en ésta y emerjan formas de reflexión, acción y expresión para dar solución a la misma. Una vez son revisados los ítems de manera individual se conforman pequeños grupos de trabajo con el propósito de discutir y unificar las formas de reflexión, acción y expresión que fueron utilizadas de manera individual. Cada estudiante dispone de sus propias hojas de trabajo, en las cuales se encuentra consignada una imagen

² Son aquellos recursos materiales, corpóreos, lingüísticos y simbólicos a los que recurren los estudiantes y profesores para hacer aparente algo frente a ellos, para hacer evidentes sus intenciones y para llevar a cabo sus acciones con el propósito de alcanzar la meta de sus actividades (RADFORD, 2003; 2009).

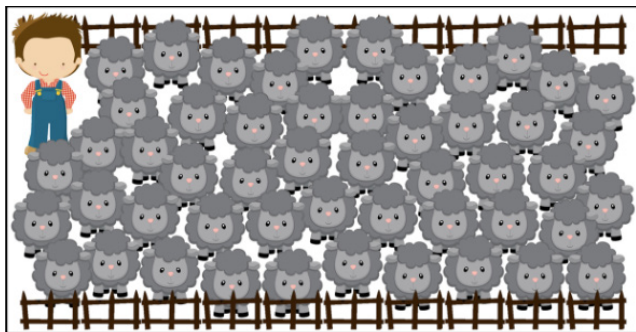


Figura 2. Dibujo correspondiente al rebaño de ovejas y enunciado del ítem número uno. Fuente: PANTANO. Tarea1.

del rebaño de ovejas (ver Figura 2), junto con cada uno de los ítems que conforman la tarea.

En este episodio de la actividad se presenta, específicamente, la manera como el estudiante Carlos aborda el primer ítem de la tarea, resaltando las formas de reflexión, acción y expresión utilizadas por él, las cuales dan cuenta de las formas de pensamiento aditivo que han sido constituidas histórica y culturalmente por las generaciones precedentes y que emergen y se actualizan en la actividad que él desarrolla de manera individual³. El primer ítem, consiste en ayudarlo a Willy, el granjero, a determinar la cantidad de ovejas que hay en el rebaño.

A continuación, presentamos el diálogo que emerge entre la profesora y Carlos.

Línea 1. Profesora: Primero [Refiriéndose al primer ítem]. Ayúdale a Willy, el granjero, a determinar la cantidad de ovejas que hay en el rebaño.

Línea 2. Carlos: Las contamos.

Línea 3. Profesora: Cada uno de manera individual va a hacer esa actividad y yo voy a pasar mirando como lo están haciendo.

Línea 4. Carlos: ¿Cómo así? ¿Tenemos que contarlas? [Interrumpe a la profesora, dirigiendo su mirada a ella].

Línea 5. Profesora: Entonces dice: Ayúdale a Willy a contar. [Observa atentamente las acciones realizadas por Carlos mientras que termina su intervención.

³ Aunque Carlos esté abordando la tarea de manera individual, él no está solo porque está recurriendo a recursos históricos, culturales y sociales, por ejemplo, el lenguaje, la escritura, el uso de signos numéricos, el lápiz, etc. que hacen que su actividad sea una actividad social.

Carlos inicia el conteo de las ovejas antes de que la profesora resuelva su pregunta].

Línea 6. Carlos: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, [...] [Golpea con su lápiz el dibujo de cada una de las ovejas que simultáneamente que enuncia cada palabra que refiere a cada uno de los números naturales desde el uno hasta el once]. [Al contar la oveja número once hace una pausa para determinar con certeza cuál es la oveja que inmediatamente debe ser contada. Para ello, levanta su cabeza desplazándola de derecha a izquierda en varias ocasiones]. Doce, trece, catorce, quince, dieciséis. [Golpea con su lápiz el dibujo de cada una de las ovejas simultáneamente que enuncia cada palabra que refiere a cada uno de los números desde el doce hasta el dieciséis. Cada golpe realizado sobre la hoja de trabajo emite un sonido]. ¡Ah! [Al contar la oveja número dieciséis manifiesta verbalmente su insatisfacción, la cual acompaña llevando su mano derecha a su cabeza].

Línea 7. Carlos: Uno, dos. [Inicia nuevamente el conteo de las ovejas, golpeando con su lápiz a cada una de éstas simultáneamente que enuncia la palabra uno y dos]. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte... [Simultáneamente que enuncia cada palabra que refiere a los números desde el uno hasta el veinte escribe en cada una de las ovejas el número que ha sido enunciado].

Fuente. Diálogo entre la profesora y Carlos PANTANO, Transcripción 1.

Una vez que la profesora termina de leer el primer ítem Carlos afirma de manera espontánea que se deben contar las ovejas [L2]. Esta expresión utilizada por él manifiesta tanto la forma cómo está reflexionando la tarea como la acción que desarrollaría para solucionarla, dado que él reconoce que a través de esta estrategia puede determinar con certeza la cantidad de ovejas que Willy tiene en su rebaño. Posiblemente este reconocimiento sea el producto de procesos de conteo que ha llevado a cabo con anterioridad

y que le han permitido determinar con éxito el cardinal de una colección.

Sin embargo, cuando la profesora hace énfasis en la manera cómo debe ser resuelto el primer ítem Carlos se cuestiona acerca de si las ovejas deben ser contadas [L3-L4]. La profesora para dar solución a su pregunta sintetiza el primer ítem, usando la expresión Ayúdale a Willy a contar. Una vez que termina de mencionar la palabra ayúdale Carlos inicia el conteo de las ovejas que se encuentran en el rebaño, ocasionado así, que la profesora centre su atención en las acciones realizadas por él, con el propósito de verificar que Carlos está comprendiendo el ítem propuesto [L5].

De esta manera, Carlos comienza a contar las ovejas del rebaño por filas, de izquierda a derecha, iniciando por aquella que se encuentra en la parte superior del rebaño (ver Figura 2). Esta forma de proceder con el conteo se constituye en una estrategia sistemática de conteo que le permite establecer un orden en el conteo, garantizando así, que posiblemente ninguna oveja quede sin ser contada o sea contada más de una vez.

Carlos al contar, una a una, a las ovejas, golpea con su lápiz el respectivo dibujo, dejando un leve trazo en cada uno. Esta acción es acompañada simultáneamente por la enunciación de la palabra que refiere al número que representa la cantidad de ovejas que se ha obtenido al *añadir* una unidad a las que se habían contado inmediatamente con anterioridad. Aquí las palabras enunciadas vienen a apoyar sus acciones corpóreas. En este sentido, la acción de golpear con el lápiz a cada una de

las ovejas y de enunciar cada una de las palabras que refieren a los números naturales le permite actualizar en la actividad, una forma de pensar matemáticamente la correspondencia uno a uno entre los elementos de las dos colecciones que están siendo comparadas. La colección conformada por las ovejas y la colección conformada por las palabras que refieren a los números naturales.

Carlos al realizar cada golpe con el lápiz, está sintiendo la producción de este gesto. No sólo a través de cada sonido que emite el lápiz al golpear el dibujo de cada una de las ovejas, sino también, a través del desplazamiento de éste de izquierda a derecha y de la actividad perceptual con la que sigue cautelosamente tanto el desplazamiento del lápiz como el golpe realizado por éste. Esta secuencia de golpes, de desplazamientos del lápiz de izquierda a derecha en hileras y de enunciaciones de las palabras que refieren a los números naturales es acompañada por una intensa actividad perceptual, que constantemente lucha por diferenciar entre la multitud de ovejas, aquellas que han sido contadas de aquellas que no. VERGNAUD (1991, p. 102) plantea que

[...] la recitación de la serie numérica se acompaña de gestos manuales y movimientos de los ojos, que muestran que el niño ejerce su actividad al establecer una correspondencia entre el conjunto de los objetos, por una parte, y la serie numérica, por la otra.

La coordinación de acciones corpóreas, lingüísticas y perceptuales realizadas por Carlos, se constituye

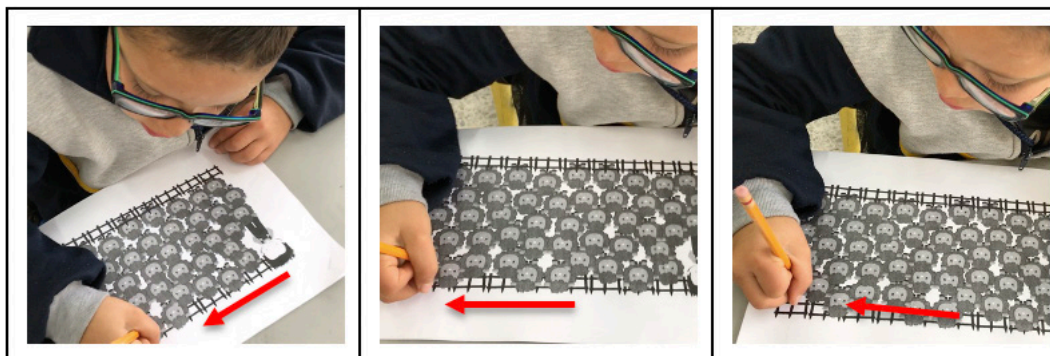


Figura 3. Secuencia de golpes y deslizamientos del lápiz de izquierda a derecha para contar la primera hilera de ovejas. **Fuente:** AUTOR, 2019. Tarea 1.

en un nodo semiótico (RADFORD, 2009), es decir, un segmento de la actividad de enseñanza-aprendizaje en la que signos que provienen de diferentes sistemas semióticos (RADFORD, 2003) se complementan para hacer emerger una toma de conciencia. Para este caso, una toma de conciencia en relación con la manera cómo la tarea está siendo abordada desde un punto de vista aditivo. Para clarificar por qué la tarea es abordada desde un punto de vista aditivo, es necesario detenernos por un momento para considerar los planteamientos derivados de las investigaciones históricas que ha desarrollado Peter Damerow. DAMEROW (1996) señala que en la aritmética del antiguo Egipto fue empleada la representación de un número a través de un signo individual, el signo para la unidad, el cual mediante su iteración permite construir otros números. Profundizando en esta idea, DAMEROW (1996, p. 191) plantea que “el principio dominante para construir números en tal sistema de signos es la seriación, y aquí la seriación significa adición. Por lo tanto, podríamos llamar a esta forma de representación; representación constructiva-aditiva”.

Con base en estos planteamientos se puede afirmar que en las formas de reflexión y acción movilizados por Carlos para dar solución a la tarea está emergiendo una seriación, es decir, una adición. Adición que es actualizada a través de cada uno de los golpes, signo individual y su iteración, que realiza en cada una de las ovejas y que se adicionan a los que han sido realizados inmediatamente con anterioridad. Pero que, a su vez, es coordinada y refinada por cada una de las palabras que refieren a los números naturales, las cuales también se constituyen en signos individuales que son iterados.

De este modo, en la actividad matemática realizada por Carlos son puestas en movimiento y actualizadas formas de pensamiento aditivo que han sido constituidas cultural e históricamente en la actividad laboral realizadas por las generaciones precedentes, tales como resolver sistemáticamente problemas que implican conteo y medición en

tareas asociadas a la administración del Imperio del Antiguo Egipto, el control constante del número de animales domésticos, el almacenamiento y contabilización de los alimentos, entre otras (DAMEROW, 1996; KILPATRICK *et al.* 1975).

Ahora bien, al momento de querer contar la oveja número doce, Carlos recurre a su actividad perceptual para delimitar un nuevo orden en el conteo, puesto que las ovejas que conforman la primera hilera han sido contadas por completo. Es por esta razón, que él levanta su cabeza para visualizar en su totalidad al rebaño. Seguido acompaña esta acción, desplazándola de derecha a izquierda, con el propósito de establecer, primero, el enlace entre la última oveja contada y la que será contada inmediatamente y, segundo, la hilera de ovejas que se puede formar a partir de ésta.

Una vez es delimitada la oveja número doce continúa con el conteo de la segunda hilera, de izquierda a derecha, golpeando con el lápiz a cada una de ellas. Acción que coordina con la enunciación, simultáneamente, de cada palabra que refiere al número que representa la cantidad de ovejas que se ha obtenido al añadir una unidad a las que se habían contado inmediatamente con anterioridad [L6]. No obstante, al pronunciar la palabra que refiere al número dieciséis, Carlos a través de la expresión ¡Ah! y de la movilización de su mano derecha hacia su cabeza manifiesta su limitación, por una parte, para diferenciar aquellas ovejas que han sido contadas, golpeadas con el lápiz, de aquellas que no y, por otra parte, para mantener un orden o trayecto espacial a seguir en el conteo.

Su limitación radica en la multitud y disposición espacial en la que se encuentran las ovejas en el rebaño, en la cercanía entre una y otra, y en que todas tienen el mismo color y tamaño, haciendo imposible seguir un orden en el conteo y diferenciar unas de otras con más facilidad. No obstante, la limitación puede estar fuertemente influenciada por el hecho de que el golpe con el lápiz deja una leve huella en cada una de las ovejas que no posibilita perceptualmente diferenciarlas. Es por

esta razón, que Carlos decide iniciar nuevamente con el conteo de las ovejas, reiterando las acciones realizadas con anterioridad [L7].

En este punto es necesario resaltar que en la actividad matemática desarrollada por Carlos las formas de reflexión y acción para dar solución a la tarea no se encuentran en su mente. Todo lo contrario, estas formas se actualizan en el mundo concreto, como fenómeno material, corporal y sensual. Nótese que esta actualización está determinada, particularmente, por acciones corpóreas, golpes con el lápiz, deslizamientos de izquierda a derecha de éste, enunciación de las palabras que refieren a los números naturales y actividad perceptual.

Sin embargo, la actividad matemática desarrollada por Carlos es transformada, es decir, evoluciona, puesto que los golpes con el lápiz son *modificados* y *refinados* por el uso de los signos numéricos que representan a los números naturales. En esta modificación y refinamiento subyace una contracción de la actividad semiótica movilizada por Carlos que le permite alcanzar niveles más profundos de conciencia en relación con las formas de reflexión y acción utilizadas inicialmente para resolver la tarea. Este refinamiento, en armonía con los planteamientos de la Teoría de la Objetivación es denominada por RADFORD (2012a) contracción semiótica.

Carlos con el propósito de reiniciar el conteo de las ovejas reitera las acciones desarrolladas con anterioridad para las primeras dos ovejas [L7]. Sin embargo, cambia radicalmente la forma de

realizar el conteo, puesto que toma conciencia de que esta forma de abordar la tarea no es sistemática, ni permite obtener garantías de éxito en el establecimiento de correspondencias uno a uno entre cada una de las palabras que refieren a los números naturales y cada una de las ovejas.

De esta manera, Carlos empieza a escribir en cada una de las ovejas los signos numéricos que representan los números naturales, dejando así una huella en el tiempo y en el espacio, la cual puede contemplar, utilizar y mencionar una y otra vez. Esta acción de escribir le permite, sin ningún inconveniente, diferenciar aquellas ovejas que han sido contadas de aquellas que no. Esta escritura de los números es acompañada simultáneamente por la enunciación de cada palabra que refiere al número que representa la cantidad de ovejas que se ha obtenido al añadir una unidad a las que se habían contado inmediatamente con anterioridad. En este segmento de la actividad matemática el uso de los signos numéricos o como lo ha denominado PANTANO (2014) conteo escrito⁴ se constituye en un sofisticado medio semiótico de objetivación que le permite a Carlos organizar sus acciones. Este medio semiótico de objetivación le posibilita diferenciar con exactitud las ovejas que han sido contadas hasta el momento de aquellas que no, puesto que es consignada en cada una de

⁴ Este medio semiótico de objetivación ofrece una manera eficiente de determinar el tamaño de una colección sin importar su organización espacial y su numerosidad. Conteos que pueden llegar a ser más difíciles, usando otros medios semióticos de objetivación como los señalamientos sin huella o a través de la actividad perceptual.

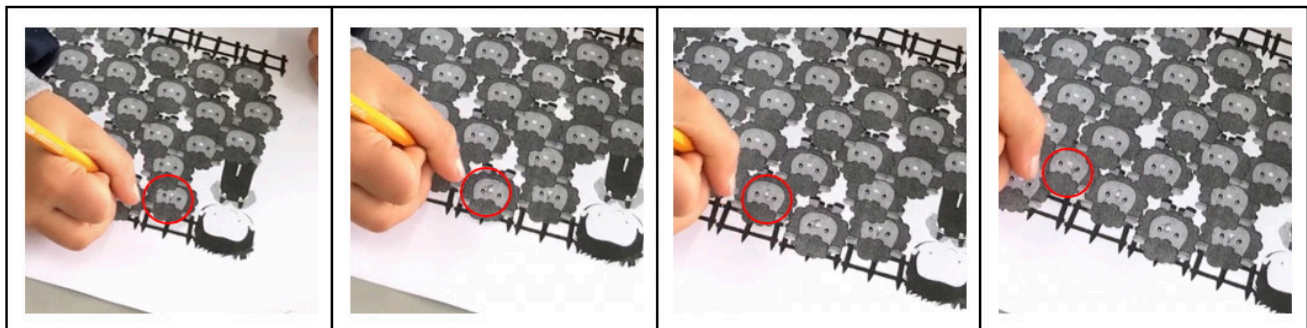


Figura 4. Secuencia de trazos de los signos numéricos (1, 2, 3, 4) en las cuatro primeras ovejas del rebaño. **Fuente:** AUTOR, 2019. Tarea 1.

ellas una marca distintiva. Esta marca, además, de quedar encarnada en el tiempo y en el espacio, se convertirá en objeto de conciencia y reflexión.

Adicionalmente, esta marca captura el cardinal de ovejas que han sido contadas en cualquier momento de la actividad matemática, lo cual contribuye, en gran medida, a que no sea necesario retomar continuamente el conteo desde la primera oveja, debido a la constante dificultad que se presentan para diferenciar las que han sido contadas de aquellas que no, como le sucedía a Carlos cuando simplemente golpea con el lápiz a cada una de ellas.

En este punto es necesario resaltar que la manera de observar el rebaño por parte de Carlos es modificada, puesto que su atención ya no recae por completo en las ovejas y su distribución en la hoja de trabajo sino en los signos numéricos que han sido consignados en éstas. En este sentido, la manera de observar de Carlos es más refinada, al parecer él hace un trabajo de observación en el terreno fenomenológico. En términos de RADFORD (2013b), hay evidencias de una serie de determinaciones sensibles que sugieren una domesticación del ojo.

Por su parte, DAVYDOV (1978, p. 288) plantea que “en los órganos de los sentidos se desarrollaron formas de actividad que aseguraban el planteamiento y regulación de complejos procedimientos y manipulaciones del hombre con los objetos y medios de trabajo”. En este sentido, Carlos a través del órgano del sentido de la vista y más específicamente, a través de su actividad perceptual, está desarrollando formas de actividad asociadas a la manera de determinar el cardinal de una colección.

Carlos con el propósito de determinar la cantidad de ovejas que tiene Willy, continúa reiterando las formas de reflexión y acción que han sido actualizadas por él en la actividad. En este sentido, a medida que va enunciando cada palabra que refiere a los números naturales los va escribiendo en cada una de las ovejas [L7]. Formas de reflexión y acción que le posibilitan a Carlos dar solución

con éxito a la tarea propuesta por la profesora y que se han constituido histórica y culturalmente en la actividad de las generaciones de hombres precedentes.

Vale la pena resaltar que la actividad que emerge está caracterizada por *dos momentos distintos pero complementarios*. LEONTIEV (2009) afirma que la actividad es un sistema en constante desarrollo. Estos *momentos* se encuentran determinados por los medios semióticos de objetivación movilizados y en consecuencia por una toma de conciencia distinta. El primer *momento* está asociado al conteo de las ovejas a través de medios semióticos de objetivación primarios, es decir, por acciones corpóreas, tales como: golpear con el lápiz cada una de las ovejas, desplazarlo de izquierda a derecha sobre la hoja de trabajo, enunciar las palabras que refieren a los números naturales y la actividad perceptual.

El segundo *momento*, corresponde a la enunciación de las palabras que refieren a los números naturales, la escritura de los signos numéricos en cada una de las ovejas y a la observación de éstos. Este segundo *momento* está caracterizado por un refinamiento de los medios semióticos de objetivación primarios y por un nivel más profundo de conciencia en relación con las formas de pensamiento aditivo que están emergiendo. Es necesario precisar que en ambos momentos de la actividad Carlos cuenta las ovejas una a una. Al llevar a cabo esta acción en su actividad matemática está emergiendo el vector conteo simple.

El vector conteo simple consiste en determinar el cardinal de una colección o conjunto de objetos contándolos uno a uno, acción que exige establecer una relación o correspondencia biunívoca entre cada uno de los objetos que se pretende contar (concretos o imágenes de éstos) y un conjunto de objetos más abstractos (palabras que refieren a cada uno de los números de la secuencia numérica o representaciones escritas de los números de ésta) (PANTANO, 2014, pp. 72-73).

Ahora bien, este vector se actualiza en la actividad de dos modos distintos. En el primer momento la correspondencia entre cada una de las ovejas

y cada una de las palabras que refieren a los números naturales es establecida, actualizada, a través de cada uno de golpes que realiza Carlos en cada una de las ovejas. Estos golpes se constituyen en la acción kinestésica que le permiten no sólo organizar las acciones sino también establecer una *función* uno a uno entre cada oveja y cada palabra que refiere a cada uno de los números naturales. En el segundo momento la correspondencia es establecida, actualizada, entre cada una de las ovejas y cada uno de los signos numéricos que son escritos en cada una de éstas. Aquí, la escritura es coordinada con cada una de las palabras enunciadas. Éstas le permiten establecer una *función* uno a uno entre cada oveja y cada uno de los signos numéricos que representan a los números naturales.

En este punto es necesario mencionar que en la actividad emergen formas de pensamiento matemático asociadas con el vector conteo simple distintas, las cuales son cada vez más profundas, puesto que inicialmente, la correspondencia es establecida entre los objetos a contar, el golpe con el lápiz en cada uno de ellos y la enunciación de las palabras que refieren a los números naturales. Pero, a mediada que se desarrolla la actividad los golpes con el lápiz evolucionan en la enunciación de las palabras que refieren a los números naturales. Así mismo, la enunciación de las palabras evoluciona en el uso de los signos numéricos que son escritos en cada una de las ovejas.

Tanto la enunciación de las palabras como los signos numéricos que son escritos constituyen medios semióticos de objetivación más sofisticados. Los cuales no sólo le permiten establecer la relación de dependencia, inicialmente, con golpes y posteriormente con la pronunciación de las palabras, entre el conjunto de partida, los objetos a contar, y el conjunto de llegada, las palabras que refieren a los números naturales y posteriormente los signos numéricos, sino también delimitar las formas de designar, sistematizar y capturar tanto a cada oveja como a la totalidad que ha sido contada, inicialmente con la enunciación de las

palabras y posteriormente con la escritura de los números [L6-L7].

5. Conclusiones y/o consideraciones finales

A través de las evidencias empíricas presentadas se puede afirmar que en la actividad que despliega Carlos se actualizan y encarnan en el mundo formas de pensamiento aditivo que han sido constituidas histórica y culturalmente por las generaciones de hombres precedentes, es decir, sistemas de pensamiento aditivo que se encuentran codificados en la cultura. Formas que se encuentran relacionadas al conteo, de uno en uno, de los objetos que conforman a una colección, al uso de estrategias sistemáticas de conteo, a la asignación de expresiones que refieren a los números naturales o a la asignación de signos numéricos para determinar y registrar el cardinal de una colección y al establecimiento de correspondencias uno a uno entre los elementos de dos colecciones.

Estas formas de pensamiento aditivo se encarnan en el mundo concreto a través de las acciones corpóreas realizadas por Carlos, como, por ejemplo, los golpes realizados con el lápiz en cada una de las ovejas, el desplazamiento de éste de izquierda a derecha y la actividad perceptual. A su vez, a través de la enunciación de las palabras que refieren a los números naturales, y finalmente, a través de signos numéricos que representan a cada uno de los números naturales.

En este sentido constatamos que las formas de pensamiento aditivo que se encuentra Carlos en la actividad matemática que despliega son observables, que no son independientes de su actividad, ni tampoco del tiempo ni del espacio. Al contrario, estas formas de pensamiento están imbricadas en la actividad, en el trabajo que él realiza para dar solución a la tarea, constituyéndose así en algo visible al ámbito de la atención y del entendimiento no sólo para Carlos sino también para los profesores o los investigadores.

A su vez, a través de las evidencias empíricas

podemos observar que las formas de pensamiento aditivo que encuentra Carlos en su actividad matemática evolucionan en paralelo a la manera cómo se desarrolla la actividad, puesto que en la actividad se evidenciaron *dos momentos distintos pero complementarios*. Momentos que están determinados por los medios semióticos de objetivación que son movilizados para dar solución a la tarea y que en este caso son el producto de las limitaciones presentes al momento de diferenciar aquellas ovejas que habían sido contadas, es decir, golpeadas con el lápiz, de aquellas que no.

El *refinamiento* de los medios semióticos de objetivación que son movilizados conlleva a que la actividad se transforme, es decir, a que esté en constante movimiento. A su vez, este constante movimiento de la actividad conlleva a que las formas de pensamiento aditivo también se encuentren en constante transformación. En este sentido, las formas de pensamiento aditivo que se actualizan y encarnan en el mundo concreto a través de la actividad serán *distintas pero complementarias*, puesto que las formas de reflexionar, hacer y expresar son constantemente organizadas y refinadas, dando lugar así, a la constitución y codificación de formas cada vez más elaboradas de percepción, gestualidad, simbolización y discursividad.

En particular, la emergencia y materialización del vector conteo simple en la actividad se actualiza de *dos formas distintas pero complementarias*. En la primera forma, el vector conteo simple se constituye en objeto de conciencia a través de la correspondencia uno a uno entre cada objeto que se pretenden contar y la enunciación de cada palabra que refieren a los números naturales. Esta correspondencia uno a uno entre los elementos de ambas colecciones es articulada a través de cada uno de los golpes con el lápiz que son realizados en cada uno de los objetos a contar. Por su parte, en la segunda forma, el vector conteo simple es objeto de conciencia a través de la correspondencia uno a uno entre cada objeto que se pretende contar y la escritura de cada signo numérico que representa

a cada número natural. Esta correspondencia uno a uno entre los elementos de ambas colecciones es articulada a través de la enunciación de cada una de las palabras que refieren a los números naturales.

Estas dos formas en que se encarna el vector conteo simple, en el mundo concreto, permiten dar cuenta de la constitución y refinamiento de formas de pensamiento aditivo asociadas a este vector. Formas que están caracterizadas por los medios semióticos de objetivación que son movilizados y por su refinamiento en la actividad matemática que se despliega. Esta movilización y refinamiento de los medios puede estar determinada por la necesidad de superar las limitaciones que se presentan al abordar la tarea. Así mismo, por la necesidad de dotar de sentido y comunicar a los otros nuestras formas de reflexionar, actuar y expresar.

Finalmente, las consideraciones teóricas y empíricas en relación con la emergencia y evolución de formas de pensamiento aditivo, que han sido objeto de reflexión en el contenido de este artículo, contribuyen a la comprensión y reflexión acerca de la manifestación del pensamiento aditivo y su desarrollo a través, primero, de la identificación y caracterización tanto de los medios semióticos de objetivación como de uno de los vectores que caracteriza a este pensamiento, y, segundo, del reconocimiento de formas más elaboradas de percepción, gestualidad, simbolización y discursividad.

Esta reflexión posibilitará que los profesores en ejercicio y los estudiantes para profesor empiecen a notar que la emergencia y evolución del pensamiento matemático en general, y del pensamiento aditivo en particular, sí es observable y trasciende más allá de ser un fenómeno mental e inaccesible, que ocurre exclusivamente en el interior de cada individuo. Por esta razón, puede constituir en objeto de estudio y de reflexión, con el propósito de fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y así mismo los fines de la formación en matemáticas

en los grados de escolaridad que componen a la educación primaria.

6. Referencias

- DAMEROW, P. **Abstraction and representation: Essays on the cultural evolution of thinking**. Advisory Board. Dordrecht, The Netherlands 1996.
- DAVYDOV, V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Pueblo y Educación. La Habana: Cuba 1978.
- ERNEST, P. **The philosophy of Mathematics Education**. Routledge Falmer. London 1991.
- HEGEL, G. **Hegel's logic**. (W. Wallace, trans.). Marxists Internet Archive. Pacífica: Estados Unidos 2009.
- ILYENKOV, E. **Dialectical Logic: Essays on its History and Theory**. Aakar Books. New Delhi: India 1997.
- KILPATRICK, J.; *et al.* **Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. Volume XIV: Teaching Arithmetic in the Elementary School**. School mathematics study group Stanford University and survey of recent east European mathematical literature the University of Chicago, Chicago: USA 1975.
- LEONTIEV, A. **En el hombre y la cultura: problemas teóricos sobre educación**. Grijalbo. México 1968.
- LEONTIEV, A. **Activity and consciousness**. Marxists Internet Archive. Pacífica: Estados Unidos. 2009.
- MIRANDA, I.; RADFORD, L.; GUZMÁN, J. Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. **Educación Matemática**, v19, n3, pp. 5 – 30. 2007.
- PANTANO, O. **Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales**. p. 94. Maestría en Docencia de la Matemática, Maestría, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2014.
- RADFORD, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to student's types of generalization. **Mathematical thinking and learning**, 5, v. 1 n., pp. 37 – 70. 2003.
- RADFORD, L. "No! He starts walking backwards!": interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. **ZDM - The international Journal on Mathematics Education**, v41, n4, pp. 467 – 480. 2009.
- RADFORD, L. **Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental issues**. In International Congress on Mathematical Education, 12, Seoul, Korea. 2012a.
- RADFORD, L. On the development of early algebraic thinking. **PNA**, v6. N4, pp. 117 – 133. 2012b.
- RADFORD, L. Three key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, knowing, and learning. **Journal of Research in Mathematics Education**, v2, n1, pp. 7 – 44. 2013a.
- RADFORD, L. En torno a tres problemas de la generalización. En RICO, L *et al.* **Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Homenaje a Encarnación Castro**. Editorial Comares. Granada, España. 2013b.
- RADFORD, L. Rhythm as an Integral Part of Mathematical Thinking. In BOCKAROVA, *et al.* **Mind in Mathematics: Essays on Mathematical Cognition and Mathematical Method**. LINCOM GmbH. München, Germany. pp. 68 – 85. 2015.
- RADFORD, L. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En D'Amore, B.; Radford, L. (Eds.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá: Colombia, p 115 – 137. 2017.
- RADFORD, L.; BARDINI, C.; SABENA, C. Rhythm and the Grasping of the General. In NOVOTNÁ, *et al.* **Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Prague, Czech Republic. pp. 393 – 400. 2006.
- RADFORD, L.; BARDINI, C.; SABENA, C. Perceiving the General. The Multi-Semiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. **Journal for Research in Mathematics Education**, v28, n5, pp. 507 – 530. 2007.
- VALERA, T. **Antología del materialismo dialéctico e histórico**. Ediciones sudamericana S.A, Santa Fe de Bogotá. D.C, Colombia 1971.
- VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. Trillas. México 1991

