Geometría eres tú

You are Geometry

María Jesús Vázquez-Gallo

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XI, Número 1, pp. 069–089, ISSN 2174-0410
Recepción: 9 jul'20; Aceptación: 1 sep'20

1 de abril de 2021

Resumen

Hay toda una constelación de proteínas presentes en el cuerpo humano que expresan nuestro material genético y determinan el funcionamiento de nuestras células. Una mutación en uno de nuestros genes puede producir un cambio en una de esas proteínas que origina cierta enfermedad. Además, los virus pueden entrar en las células usando proteínas, como la proteína S de los coronavirus que forma espículas para adherirse a nuestras células. Pero, a la vez, se pueden diseñar vacunas fabricando proteínas en las que se encajen geométricamente nuestros anticuerpos, activando nuestro sistema inmunológico. Entendemos un cambio cuando comprendemos lo que ha permanecido sin alterarse tras él. Las diversas geometrías consideran propiedades que no varían -son invariantes- cuando actúa cierto grupo de transformaciones o simetrías. El concepto de grupo de simetrías tiene aplicaciones, no solo estéticamente, sino como algo constitutivo del espacio físico y de la biología. Los grupos de simetría influyen en las composiciones artísticas en bellas artes, en música o en poesía, pero también gobiernan el comportamiento de las partículas elementales de la física, de las conexiones neuronales, de la configuración de nuestro material genético y de la función de nuestras proteínas, así que somos geometría.

Palabras Clave: geometría, simetría, grupo, invariante, física, biología, proteína, virus.

Abstract

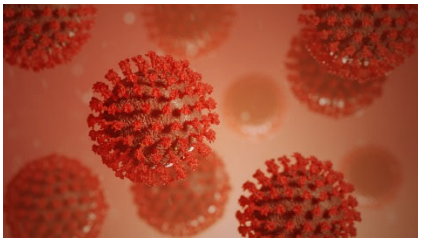
There is a constellation of proteins present in the human body that express our genetic material and determine the function of our cells. A mutation in our genes can produce a change in one of those proteins that causes disease. Viruses can enter cells using proteins, such as the coronavirus protein S that forms spicules to adhere to our cells. But, at the same time, vaccines can be designed by manufacturing proteins in which our antibodies geometrically fit, activating our immune system. We understand a change when we understand what has remained unchanged after that change. The different geometries consider properties that do not vary –that are invariant- under the action of a certain group of transformations or symmetries. The concept of group of symmetries has applications, not only aesthetically, but as something constitutive of the physical space and of the biology. Symmetry groups influence the artistic compositions in fine arts, music or poetry but they also govern the behavior of the elementary particles of physics, of the neural connections, of the configuration of our genetic material and of the function of our proteins, so we are geometry.

Keywords: Geometry, symmetry, group, invariant, Physics, Biology, protein, virus.

1. Introducción

La geometría -en sus orígenes, medida de la tierra- como disciplina de la matemática que se ocupa de comprender el espacio, está relacionada necesariamente con muchos otros campos de la matemática y de la física. Los conceptos y resultados geométricos subyacen de manera clara en multitud de aplicaciones prácticas como la cartografía, la óptica, la visión artificial, la animación por ordenador, la robótica, el diseño industrial o las estructuras de la ingeniería y de la arquitectura. Pero la ubicuidad de la geometría va más allá, pues ejerce su influencia a cualquier escala, gobernando desde las interacciones entre las partículas fundamentales, a nivel subatómico, a la evolución del universo, a nivel cosmológico, y desde la estructura de los minerales y la configuración vegetal a nuestra propia organización como seres vivos.

Los virus son organismos acelulares muy primitivos formados por asociaciones estructuradas de moléculas, con un tamaño minúsculo que varía entre unos 10 y unos 300 nanómetros. Un nanómetro (nm) es la unidad de longitud equivalente a una millonésima parte de un milímetro, es decir, 1 nm corresponde a 10^{-9} metros, algo así como el resultado de dividir por 50.000 el grosor de uno de nuestros cabellos. Los virus son la causa de muchas enfermedades de los seres vivos. De los dos ácidos nucleicos, ácido desoxirribonucleico o ADN y ácido ribonucleico o ARN, que contienen la información genética con la que se desarrollan las formas superiores de vida, los virus solo poseen uno de ellos y no pueden reproducirse por sí mismos. Ese único tipo de ácido nucleico presente en un virus va protegido por una capa llamada cápside, compuesta por unidades de estructura que se agrupan en unidades morfológicas, los capsómeros, de tal manera que la estructura final del cápside, helicoidal en unos casos y poliédrica en otros, forme un sello eficaz para contener el ácido nucleico. Un virus permanece inerte hasta que se introduce en una célula viva y la utiliza para replicar su ácido nucleico, con el fin de multiplicarse y liberarse, habiendo causado un daño en el proceso que puede llegar a la muerte de la célula.



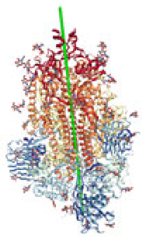


Fig. 1. Izquierda: Recreación de coronavirus (http://pixabay.com). Derecha: Esquema tridimensional de la proteína S del coronavirus (https://www.rcsb.org/pdb/).

Los coronavirus (CoV), pertenecientes a la familia *Coronaviridae*, subfamilia *Orthocononavirinae*, son patógenos reconocidos en humanos, mamíferos y aves. Los coronavirus humanos, encontrados por primera vez hacia 1960 en las fosas nasales de pacientes con resfriado común, tienen un tamaño de 120 a 160 nm. Presentan cápside helicoidal y una envoltura externa en la que se encuentran al menos 3 estructuras proteicas: la proteína M de membrana, la proteína E de ensamblaje viral, y la proteína S de las espículas (spikes, en inglés) implicada en la penetración del virus en las células huésped. Esas espículas dan a la parte externa del virus la apariencia de una corona, y de ahí su nombre.

Hay varias cepas diferentes de coronavirus, entre ellas las que habitualmente infectan a cualquier persona en diversos momentos de su vida, causando conjuntivitis, resfriados o problemas gastrointestinales. Pero también hay variedades que producen problemas respiratorios que pueden llegar a ser graves, como el SARS-CoV, MERS-CoV y la catalogada como 2019-nCoV o COVID-19, causante de una pandemia en 2020.

Además de estar presentes en los virus, afectando al modo en el que se produce una infección, las proteínas son sustancias constituyentes de la materia viva que expresan el material genético y regulan la actividad celular, entre otras muchas funciones. Un gen es una unidad funcional situada en cierta posición o locus en la estructura de doble hélice del ADN que se ocupa de codificar un producto específico, como proteínas, ARN y otros. Esas estructuras de ADN comprimidas forman los cromosomas que están contenidos en las células y controlan sus actividades. Cada gen consiste en una larga secuencia de las cuatro bases nitrogenadas del ADN -adenina (A), timina (T), citosina (C) y guanina (G)-.

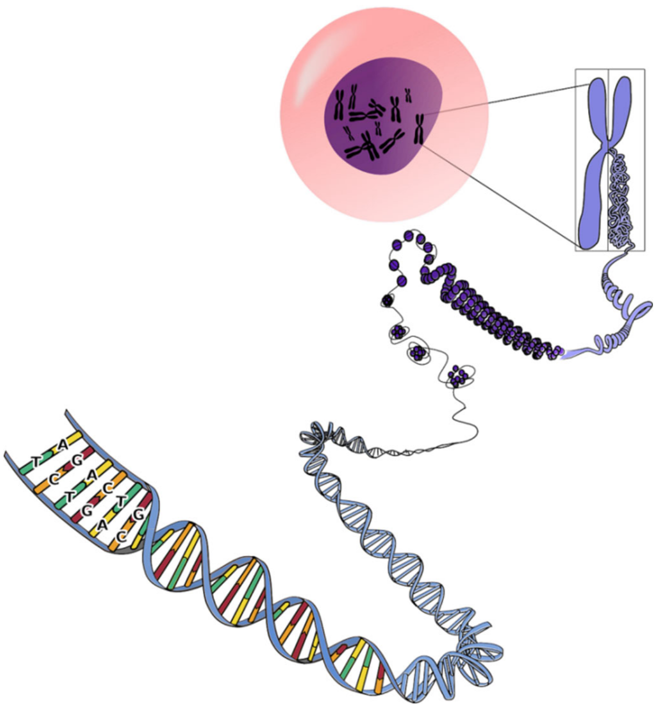


Fig. 2. Doble hélice de ADN. Genes y cromosomas (http://pixabay.com).

En el proceso de formación de las proteínas, cierto tipo de ARN va leyendo la secuencia de bases del gen, de modo que cada triplete de bases da lugar a un aminoácido. El grupo amino (NH_2) de cada aminoácido se va enlazando con el grupo carboxilo ($COOH$) de otro, dando lugar a una cadena o estructura lineal de aminoácidos que, cuando alcanza una estructura estable, se denomina proteína. Hay una variedad enorme de proteínas en los seres vivos, sin que todavía esté claro cuántas diferente existen, pero todas ellas se forman a partir de veinte tipos distintos de aminoácidos [Saint-Léger et al., 2016]. A veces, por efectos ambientales, por herencia o por la propia evolución, sucede una mutación en un gen y se altera la cadena de aminoácidos de las proteínas que lo expresan, pudiendo causar enfermedades.

Así que una proteína defectuosa puede originar enfermedades o una proteína presente en un virus puede facilitar su entrada en nuestro organismo pero, a la vez, algunas de las vacunas frente a virus están basadas en el diseño de proteínas adecuadas. Estas proteínas de las vacunas actúan como antígenos. Cuando en la sangre, una célula de tipo linfocito B se encuentra con su antígeno desencadenante, produce abundantes células plasmáticas que actúan como fábricas donde se generan anticuerpos específicos para ese antígeno. Cada anticuerpo se encaja en su antígeno a través de un acoplamiento estructural específico, como en la Figura 3 [Graille, 2001] y lo deja marcado para su destrucción. De esta manera, la inmunidad adquirida depende de la interacción antígeno-anticuerpo, en la que cada anticuerpo es estructuralmente específico para cada tipo de antígeno.

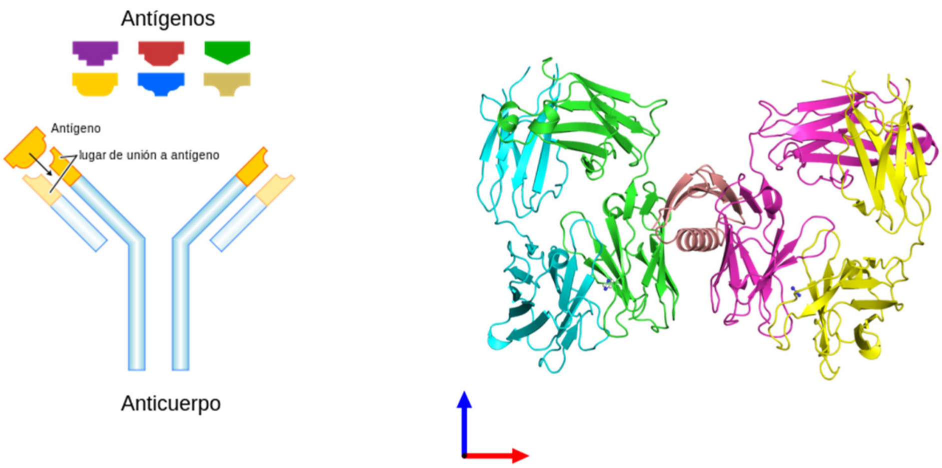


Fig. 3. Izquierda: Esquema unión antígeno-anticuerpo (https://es.wikipedia.org/wiki/Ant%C3%ADgeno). Derecha: Esquema complejo antígeno-anticuerpo de un estreptococo y un anticuerpo humano (https://www.ebi.ac.uk/pdbe/entry/pdb/1hez).

Desgraciadamente, en ocasiones las proteínas que constituyen nuestros anticuerpos interpretan a nuestras propias moléculas como antígenos y desencadenan respuestas inesperadas, generando enfermedades autoinmunes, a veces muy graves. En este tipo de enfermedades, la naturaleza exacta de la interacción antígeno-anticuerpo todavía plantea muchas incógnitas.

En resumen, entender la estructura geométrica de las proteínas puede contribuir a determinar cómo se comportan y cómo les afectan las mutaciones, con el fin de evitar enfermedades y de diseñar medicamentos y vacunas.

Queremos adentrarnos en la comprensión del espacio, en el paraíso de la geometría, descubriendo que la geometría es simetría en un sentido que precisaremos, que la simetría se relaciona con el concepto matemático de grupo y que conceptos abstractos como el de grupo de simetría pueden servir para explicar nuestro mundo y para mejorarlo.

2. Geometría: simetrías y grupos.

Comprender el espacio a través de sus medidas es algo que ya comenzaron a hacer los babilonios, en Oriente Medio, hace más de tres mil años. A base de prueba y error, fueron capaces de medir longitudes, áreas y volúmenes, e incluso cultivaron la astronomía. Con la caída de Babilonia unos seis siglos antes de Cristo, sus conocimientos se fundieron con los de egipcios y griegos. Los griegos convirtieron la geometría en una ciencia deductiva. Euclides (325 - 265 a. C.) recopiló el conocimiento matemático de su época en los trece volúmenes de los *Elementos*. En esta obra, utilizando como base cinco *axiomas o postulados* evidentes –como que dos puntos determinan un segmento de recta- se deducían, usando argumentos lógicos, numerosos resultados como el famoso *teorema de Pitágoras*, que constituyen el elegante edificio de la *geometría euclídea*, el único durante dos milenios... Hasta que G. Saccheri (1667-1733), entre otros, sugirió que quizá podía existir otra geometría distinta, con un quinto postulado diferente…

El quinto postulado de Euclides afirmaba:

… si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos...

Este postulado era el de enunciado más complicado y no se utilizaba en la demostración de las veintiocho primeras proposiciones de los Elementos. Esto hizo suponer que quizá era una consecuencia de los otros cuatro postulados y hubo muchos intentos de demostrarlo a partir de ellos. Nadie lo consiguió. Se comprobó que el quinto postulado era equivalente a otros enunciados como por ejemplo:

En un plano, dada una recta y un punto que no está en ella, a lo sumo se puede trazar por el punto una recta paralela a la dada.

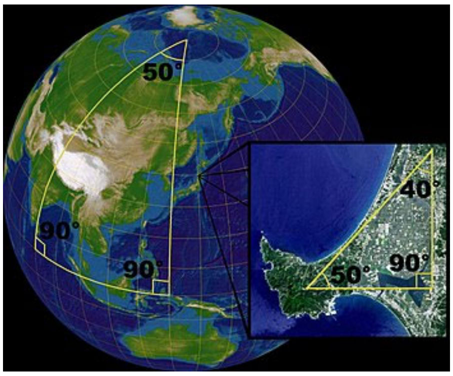
O también:

La suma de (las medidas de) los ángulos de cualquier triángulo es igual a (la suma de las medidas de) dos ángulos rectos.

De manera análoga, se puede ver que el hecho de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo sea menor (respectivamente, mayor) que dos ángulos rectos equivale al hecho de que por un punto exterior a una recta, haya más de una recta paralela a la dada (respectivamente, no exista ninguna).

Si en una hoja de papel dibujamos un triángulo cualquiera, las medidas de sus ángulos siempre suman 180°, y si dibujamos una recta y un punto exterior a ella, resulta evidente que solo podemos trazar una recta por dicho punto que sea *paralela* a la recta dada (y por tanto, no la corte).

Pero, en la superficie de una silla de montar, los ángulos de un triángulo parecen estrecharse y sumar una cantidad menor de 180°. Y sobre la piel de una naranja o de una esfera, sin embargo, los ángulos de un triángulo parecen agrandarse y sumar más de 180°. En una esfera tampoco se cumple el quinto postulado de Euclides puesto que en una esfera las "rectas", como camino más corto entre dos puntos, son los círculos máximos (los meridianos del globo terráqueo) y cada pareja de círculos máximos se corta en dos puntos (los polos).



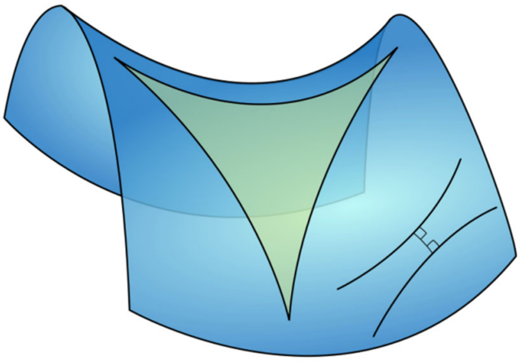


Fig. 4. Izquierda: Geometría elíptica. Imagen: Lars H. Rohwedder, Sarregouset (Licencia GFDL and CC-By-SA). Derecha: Geometría hiperbólica. https://es.wikipedia.org

Así que, como intuyó Saccheri, como imaginó C. F. Gauss (1777-1855) sin llegar a publicarlo, y como descubrieron, primero, J. Bolyai (1802-1860) y N. Lobachevsky (1792-1856) -independientemente- y después, B. Riemann (1826-1866), ¡sí!, ¡existen otras geometrías, y son distintas de la euclídea! En ellas, las premisas han cambiado pero el edificio geométrico sigue siendo consistente. Se trata de empezar con unas reglas de juego diferentes a los cinco postulados de Euclides y la geometría que resulta también es diferente. Con los cuatro primeros postulados de Euclides y el hecho de la suma de ángulos de un triángulo sea menor que 180°, se construye la *geometría hiperbólica* de Bolyai y Lobachevsky, y cambiando menor por mayor en este último postulado, se tiene la *geometría elíptica* de Riemann (que incluye la geometría esférica).

En el siglo XIX se desarrollaron más geometrías, como la *geometría proyectiva* cuyos antecedentes se remontan a los teorema proyectivos de Pappus de Alejandría, en el siglo III, y a los problemas de perspectiva en el contexto artístico del Renacimiento [Vázquez-Gallo, 2002]. Esta geometría refleja el funcionamiento de la visión humana cuando, al mirar a lo lejos, las vías del tren parecen cortarse en un punto del horizonte. Pero aún hubo más geometrías, la *geometría conforme*, la *geometría diferencial*, etc. Distintas abstracciones que acaban formando parte de cómo entendemos la realidad.

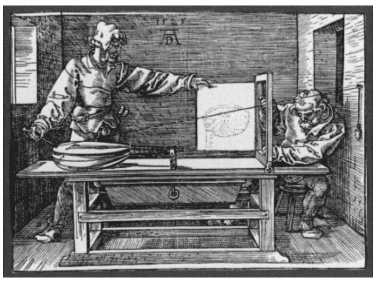


Fig. 5. Izquierda: grabado de Durero (1471-1528) sobre perspectiva (http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/durero.html). Derecha: percepción visual de rectas paralelas cortándose en un punto del horizonte (http://pixabay.com).

La utilidad de estas nuevas geometrías que, en un principio, despertaban incredulidad y desconfianza, se iba a hacer patente en muchas ocasiones. En una de ellas, H. Poincaré (1854-

1912) y A. Einstein (1879-1955), independientemente, emplearon una *geometría pseudoeuclídea* como marco en la teoría de la *relatividad especial* que describe eventos o sucesos espaciotemporales en ausencia de gravedad y que explica los efectos de dilatación del tiempo o de contracción del espacio. Aunque estos efectos vayan en contra de nuestra intuición y no los percibamos directamente, intervienen en parte de la tecnología moderna, por ejemplo, en los sistemas de posicionamiento global o GPS [Fuente et al, 2020].

Ante esta gran variedad de geometrías, S. Lie (1842-1899), H. Poincaré (1854-1912) y F. Klein (1849-1925), con su *Programa Erlangen*, encontraron el principio unificador de todas ellas, al caracterizar cada *geometría*, no por sus objetos típicos -como circunferencias, polígonos, poliedros, etc., en la geometría euclídea,- sino por el *grupo de transformaciones* del espacio que la mantienen inalterada, que no la cambian. Así, por ejemplo, la geometría euclídea es la que no se altera cuando se le aplica cualquier traslación, rotación o reflejo, o una combinación de ellos, es decir, un *movimiento rígido* cualquiera, que conserva distancias y ángulos. Una circunferencia sigue siendo la misma si la trasladamos, giramos o reflejamos, y lo mismo ocurre con un triángulo, con un hexaedro, etc. Por otro lado, en la geometría proyectiva, las transformaciones consideradas son *proyecciones* que no mantienen ángulos ni distancias, pero sí envían rectas a rectas y dejan invariantes propiedades como la incidencia, es decir, el hecho de que un punto pertenezca a una recta o a un plano, y la razón doble de 4 puntos alineados.

Bajo este principio, una colección concreta de transformaciones da lugar a una geometría particular cuyas propiedades típicas son las que no se alteran por las transformaciones consideradas. Esta colección de transformaciones se denomina *grupo de simetrías.* El diccionario define "simetría" como una correspondencia exacta en forma, tamaño y posición de las partes de un todo. Eso es lo que percibimos cuando una mariposa cierra sus alas y por eso decimos que es simétrica: sus mitades parecen ser el reflejo la una de la otra, tomando como espejo un eje a lo largo de su cuerpo.

Fig. 6. Simetría de la mariposa: reflejo respecto a un eje (http://pixabay.com).

La simetría produce en nosotros una sensación particular de armonía y belleza, y no solo está presente en la Naturaleza, sino también en multitud de composiciones pictóricas, arquitectónicas, musicales y poéticas, como en la rima XXI del romántico G.A. Bécquer (1836-1870) a la que alude el título de este trabajo (alusión que ya utilizó C. Alsina [Alsina et al., 1997]).

¿Qué es poesía?, dices mientras clavas

en mi pupila tu pupila azul.

¿Qué es poesía? ¿Y tú me lo preguntas?

Poesía... eres tú.

En la jerga matemática, el término simetría se refiere precisamente a esa correspondencia entre partes que señala el diccionario. En el caso de la mariposa, simplificando y asumiendo que fuera plana, la simetría es el reflejo a lo largo del eje que recorre su cuerpo y lo que se queda invariante es la imagen de la mariposa con las alas abiertas. *Una simetría es una transformación que deja algo inalterado o invariante*. En el lenguaje común, la palabra simetría suele indicar este tipo de simetría bilateral - reflejo respecto a eje o reflejo respecto a plano- frecuente en el reino animal, en los objetos diseñados para llevar en nuestro cuerpo o en multitud de objetos artificiales como utensilios, muebles, vehículos, fachadas de edificios, etc. También una circunferencia posee este tipo de simetría bilateral aún más rica porque el reflejo respecto a cualquiera de sus diámetros no cambia. Un reflejo es un ejemplo de simetría muy común y, de hecho, lo más habitual es llamar simetría a un reflejo pero ¡hay más!, existen simetrías que no son reflejos, aunque no tengamos tanta costumbre de percibirlas.

Por ejemplo, si escogemos un ángulo y un punto en un plano, la transformación que consiste en girar alrededor de ese punto ese ángulo, movería cada punto de una circunferencia cuyo centro sea el punto elegido, mientras que la circunferencia como un todo, no cambiaría. El giro la dejaría invariante y por tanto decimos que cualquiera de esos giros es una simetría de la circunferencia.

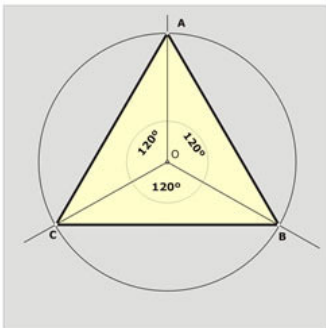


Fig. 7. Circunferencia y triángulo equilátero (http://recursostic.educacion.es/artes/plastic/web/cms/index.php?id=3691).

Sin embargo, al aplicar estos giros a un triángulo equilátero centrado en el punto escogido, la posición del triángulo cambiaría excepto cuando el ángulo es 120°, 240° ó 360° (que equivale al giro de 0°) o cualquier múltiplo (entero) suyo -que tiene el mismo efecto y no se considera un nuevo giro-. Con estos tres giros, el triángulo equilátero permanece invariante: mirándolo antes y después sería imposible detectar si esa transformación ha sucedido o no. Así que estos tres giros también son simetrías del triángulo equilátero. Y si consideramos reflejos para el triángulo equilátero, observamos que solo escogiendo como eje una recta que vaya de un vértice al punto medio del lado opuesto (una *mediana*), el triángulo quedará invariante.

Se puede comprobar que las simetrías que dejan invariante un triángulo equilátero son los tres giros y los tres reflejos descritos antes, en total seis transformaciones. Si hacemos que actúe una simetría detrás de otra, es decir, componemos dos de estas simetrías, la transformación que resulta vuelve a dejar el triángulo equilátero invariante, con lo cual tiene que ser una de esas seis transformaciones. En lenguaje matemático, esto se describe diciendo que la *composición* es una *operación cerrada* en el conjunto de las seis simetrías, ya que al combinarlas con esa operación, "no se salen fuera" del conjunto.

¿Pero qué ocurrirá cuando componemos tres de estas simetrías? Según lo anterior, se obtendrá otra simetría de la colección y, además, se puede comprobar que todo funciona bien, es decir, se obtiene la misma simetría *asociándolas* de dos maneras diferentes. Llamando s_1, s_2 y s_3 a las tres simetrías, para no perderlas de vista: si la simetría s_3 actúa tras la que resulta de componer s_1 con s_2, se obtiene la misma simetría que componiendo primero s_2 con s_3 y haciendo actuar la simetría que resulta tras s_1. Usando " $\circ$ " como símbolo para la composición, se cumple siempre: $s_3 \circ (s_2 \circ s_1) = (s_3 \circ s_2) \circ s_1$.

Por supuesto, al componer una simetría cualquiera de un triángulo equilátero con el giro de 360° , que equivale al giro de 0°, como este giro no produce ningún efecto, el resultado de la composición es la simetría original -por eso al giro de 0° se le denomina *identidad*-. Y es posible encontrar, para cada simetría de la colección, otra con el efecto *opuesto o inverso*, es decir tal que al componerlas en cualquier orden el resultado es la identidad (es como no hacer nada). Por ejemplo, la simetría inversa del giro de 120° es el giro de 240° y la inversa de cualquier reflejo es el mismo reflejo.

Así que este *grupo* de simetrías de un triángulo equilátero no es un grupo cualquiera, no es un conjunto sin más sino que, cuando lo consideramos con la *operación de composición*, sucede que la operación es *cerrada*, es *asociativa*, hay un elemento *identidad* y cada elemento tiene un *opuesto o inverso*. Este es el concepto abstracto de grupo: un conjunto con una operación tal que se cumplen las propiedades mencionadas.

	$g_0 = I$	g_{120}	g_{240}	L_1	L_2	L_3
$g_0 = I$	I	g_{120}	g_{240}	L_1	L_2	L_3
g_{120}	g_{120}	g_{240}	I	L_3	L_1	L_2
g_{240}	g_{240}	I	g_{120}	L_2	L_3	L_1
L_1	L_1	L_2	L_3	I	g_{120}	g_{240}
L_2	L_2	L_3	L_1	g_{240}	I	g_{120}
L_3	L_3	L_1	L_2	g_{120}	g_{240}	I

Fig. 8. Tabla del grupo de simetrías de un triángulo equilátero que resume su estructura. L_i denota el reflejo respecto a la mediana que pasa por el vértice número i.

Se podría pensar que en la definición de grupo falta una propiedad muy familiar, la conmutativa, es decir, que cuando se operan dos elementos del conjunto, el orden no afecta. Pero la conmutatividad se considera una propiedad extra para un grupo y a los que la poseen se les llama *grupos conmutativos o abelianos* -por N. H. Abel (1802-1829) que aparecerá enseguida-. El grupo de simetrías de un triángulo equilátero (con la composición) no es abeliano, como puede verse fácilmente en su tabla de grupo de la Figura 8, que no es simétrica.

También existen grupos que no tienen un número finito de elementos, como el grupo de simetrías de una circunferencia pues incluye a los giros de cualquier ángulo alrededor de su centro y a los reflejos respecto a cualquier diámetro de la circunferencia.

Hay grupos discretos, finitos o no, cuyos elementos están aislados. El grupo de las simetrías de un triángulo equilátero y el grupo que forman los números enteros con la operación suma son ejemplos de grupos discretos. El grupo de simetrías de una circunferencia no lo es.

El grupo de las simetrías de un triángulo equilátero es un ejemplo de *grupo diédrico*, D_n, que, en general, describe las simetrías de un polígono regular de n lados y, su orden es $2n$ ya que contiene n reflejos y n giros. Estos n giros forman por sí mismos otro grupo más pequeño –un *subgrupo* del grupo diédrico- llamado *grupo cíclico* de orden n, C_n, en el que cada giro se puede generar componiendo cierto número de veces un mismo giro, el de ángulo una n-ésima parte de $360°$ alrededor del centro del polígono, como se observa en la subtabla morada de la Figura 8. Es claro que los grupos cíclicos son abelianos. Los grupos cíclicos y los grupos diédricos, como grupos de transformaciones del plano, se conocen como *grupos de Leonardo* ya que el mismísimo Leonardo da Vinci (1452-1519) estudió estos grupos, utilizados en el Renacimiento para proyectar plantas de capillas adyacentes a un núcleo central, manteniendo la simetría central [Moratalla y Sanz, 2008]. Un grupo de Leonardo es entonces un *grupo puntual*, es decir, un grupo de simetrías de cierta figura, todas ellas con un punto invariante en común, el *centro de simetría*.

Fig. 9. Planta, secciones y capiteles del Cristo de la Luz en Toledo. MARTÍNEZ APARICI, DOMINGO, CALCOGRAFÍA NACIONAL, PICÓN GARCÍA, JOSÉ. Copyright de la imagen ©Museo Nacional del Prado.

El concepto abstracto de *grupo* es un ejemplo de *estructura* matemática y, como tal, constituye una potente herramienta de reconocimiento de patrones: puede haber dos colecciones de elementos completamente distintas, pero que posean la misma estructura (que sean *isomorfas*) y eso permite tratar a las dos colecciones de la misma manera y trasladar resultados de un contexto a otro. Por ejemplo, el grupo de los giros alrededor de un punto de cualquier ángulo con la operación de composición es isomorfo al de los números complejos de módulo o tamaño 1 con la multiplicación [Dorronsoro y Hernández, 1996].

La definición de grupo, como pareja de conjunto y operación con ciertas propiedades, se extiende a la de *grupo topológico o grupo continuo*, cuando a esa pareja se le añade una *topología* compatible con la operación de grupo –es decir, la operación del grupo y la inversión son aplicaciones *continuas*-. Entre los grupos topológicos se encuentran los *grupos de Lie*, aquellos que además tienen estructura de *variedad diferenciable* y las aplicaciones anteriores son *diferenciables* [Fulton y Harris, 2004]. Por ejemplo, el conjunto de los números reales no nulos con la multiplicación es un grupo de Lie. Los grupos de Lie proveen del lenguaje para manejar las simetrías de las *ecuaciones diferenciales* tan frecuentes en los modelos físicos.

En la próxima sección veremos cómo los grupos, en general, juegan un papel central no solo en física, sino también en biología, pero antes, veamos otro ejemplo importante de grupo.

Un grupo con seis elementos, los que tenía el grupo de simetrías de un triángulo equilátero, es el de las posibles ordenaciones o *permutaciones* de un conjunto de tres elementos, digamos $\{a, b, c\}$, que son $\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$. Pensemos en cada permutación como una *simetría* del conjunto que forman (puesto que al reordenar los elementos de un conjunto, este no cambia, permanece invariante). Entonces, es sencillo comprobar que el conjunto de estas seis permutaciones es un grupo con la composición, conocido como *grupo simétrico de 3 elementos* y que, en general, las $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutaciones de n elementos dan lugar al *grupo simétrico de* n elementos, o S_n para abreviar.

El grupo simétrico no es un ejemplo más de grupo, pues el *teorema de Cayley* (1821-1895) afirma que todo grupo finito es *isomorfo* a un subgrupo de un grupo simétrico, es decir, ambos tienen la misma tabla. ¿Serán isomorfos los grupos D_3 y S_3? ¿Lo serán D_n y S_n? Se trata de reconocer cuándo dos estructuras o esqueletos son iguales o no, aunque su apariencia externa pueda ser similar.

De hecho, Cayley se percató de que las permutaciones, las matrices (con la operación producto) y los cuaterniones (también con el producto) compartían la misma estructura. Antes de que surgiera el concepto axiomático de grupo tras los resultados de Cayley, se trabajaba directamente con colecciones de permutaciones. Eso tuvo tiempo de hacer E. Galois (1811-1832) en su corta vida, al proponer una teoría revolucionaria, según la cual, el que exista una fórmula para encontrar las soluciones de una ecuación polinómica –como la que solemos aprender para resolver una ecuación de segundo grado- depende del comportamiento de la colección de permutaciones de las supuestas soluciones, es decir, del grupo de simetrías del conjunto de soluciones de la ecuación, que acabó llamándose *grupo de Galois*. En relación con los trabajos de Galois, el matemático noruego Abel, que también murió muy joven, en 1824 demostró por *reducción al absurdo* que lo que tanto se había buscado durante tres siglos -esto es, una fórmula algebraica que diera las soluciones de una ecuación polinómica de quinto grado en función de sus coeficientes- ¡no podía existir! [Sánchez Muñoz, 2011].

En líneas generales, la demostración plantea que si existiera tal fórmula, el grupo simétrico de orden 5, S_5, con sus $5! = 120$ permutaciones, debería poseer una cadena de *subgrupos normales* -un subgrupo H de un grupo G es normal cuando los elementos de G conmutan con los de H-, todos ellos con orden un número *primo*. Eso ocurre con los grupos simétricos de orden 2, 3 y 4 pero, resulta que S_5 posee un subgrupo normal de 60 elementos (el de las permutaciones pares, es decir, permutaciones que se pueden escribir como composición de un número par de transposiciones o intercambios). Se puede ver que este subgrupo de las permutaciones pares de 5 elementos, con orden 60, es un *grupo simple*, o sea, no posee subgrupos normales no triviales (a diferencia de lo que ocurre con los grupos de permutaciones pares de un conjunto de 2, 3 o 4 elementos). Pero entonces, en la cadena de subgrupos normales de S_5, este subgrupo de permutaciones pares tendría un número de elementos que no es primo. Habríamos llegado a una contradicción que viene del hecho de suponer que existe una tal fórmula, así que… no puede existir.

Aparte del éxito en cuanto a la resolución de ecuaciones polinómicas y otros temas relacionados, como el de la construcción de polígonos regulares con regla y compás, o la estructura de *cuerpo* y en particular los cuerpos finitos –Galois fields, en inglés- y sus aplicaciones a todo lo relacionado con la informática y las telecomunicaciones, como la criptografía o los códigos detectores y correctores de errores, hay numerosas cuestiones de la matemática en las que el concepto de grupo y los vinculados con él, como el de invariantes o el de simetrías, tienen un papel importante.

Especialmente ubicuo es el problema de clasificar, para lo que se construyen *espacios cociente*, a partir de un espacio inicial dado y una relación de equivalencia establecida en él, de forma que elementos equivalentes del espacio inicial pertenecen a la misma clase y cada elemento del espacio cociente representa a una de esas clases, como una etiqueta en un cajón representa a los objetos de cierta clase que están contenidos en él.

Por ejemplo [Vázquez-Gallo, 2002], para clasificar las direcciones posibles a partir de un punto (distinguiendo en cada una de ellas dos sentidos posibles), se puede considerar el espacio de parejas de coordenadas (reales) con respecto al punto dado, salvo la pareja nula que no determina ningún dirección, y hacer cociente por la relación: dos parejas son equivalentes cuando son proporcionales. Así cada dirección por el punto dado corresponde a infinitas parejas de coordenadas, todas ellas con una proporción fija (digamos segunda coordenada entre primera). Y esta proporción puede ser infinitamente grande cuando la primera coordenada es cero. Identificando cada dirección original con la proporción asociada y señalando este número en una recta, se obtiene una *recta proyectiva* (real) con un punto en el infinito. De manera análoga, empezando con ternas de coordenadas se puede construir un plano proyectivo (real) con una recta de infinito en su horizonte en la que vemos cortarse las vías del tren, como en la Figura 5 derecha. Este tipo de espacio cociente describe las direcciones por un punto dado de forma geométrica: direcciones "cercanas" entre sí corresponden a puntos cercanos en el espacio cociente.

En general, para construir espacios cociente con buenas propiedades geométricas, D. Mumford (1937-) empleó ideas de la teoría clásica de invariantes para desarrollar la *teoría geométrica de invariantes* -GIT, por sus siglas en inglés- [Mumford, 1970], por lo que recibió la medalla Fields en 1974. En GIT, la relación de equivalencia viene dada por un grupo (de transformaciones) que actúa en una variedad algebraica (dada por los ceros de unos cuantos polinomios), o en espacios más generales como los esquemas, de forma que las clases de equivalencia son las órbitas buenas o *estables* del grupo y de este modo el espacio cociente resultante tiene propiedades geométricas razonables. Se construyeron así *espacios de moduli* –el término moduli indica variación y lo introdujo Riemann a mediados del siglo XIX- que parametrizan objetos como curvas de cierto tipo (a veces con estructura extra, como un conjunto de puntos marcados), fibrados vectoriales de cierto tipo, fibrados vectoriales (o conjuntos de ellos) con estructura extra, etc. Estos nuevos espacios tienen sus propias características geométricas y topológicas [Muñoz et al, 2008] y, en el contexto de la física matemática, se interpretan como espacios de parámetros de soluciones de ciertas ecuaciones o de ciertos tipos de partículas, relevantes para la moderna *teoría de supercuerdas* o para el concepto de *supersimetría* (SUSY, por sus siglas en inglés).

Por cierto, y ya que los grupos son útiles para clasificar, surge el problema de clasificación de los propios grupos (como grupos abstractos). Empecemos considerando los grupos finitos por un lado y los demás por otro.

Para los grupos finitos, en 1889, el *teorema de Jordan-Hölder* implica que cada grupo finito se puede construir usando grupos finitos simples como ladrillos básicos, es decir, los grupos finitos simples son, a los grupos finitos, lo que los números primos a los números naturales. Para los grupos finitos simples, el *teorema "enorme"* dice que cada grupo finito simple o bien es uno de los 26 grupos esporádicos o, si no, pertenece a una de entre 18 familias, pero ¡en cada una de estas familias hay infinitos grupos! [Alegría]. Por ejemplo, una de esas familias es la de los grupos cíclicos con un número primo de elementos. Lo de llamar enorme al teorema viene de que consiste en miles de páginas de resultados de una centena de matemáticos que comenzaron a demostrarse hacia 1940 y terminaron a principios del siglo XXI. Actualmente se trabaja en simplificar demostraciones y en el llamado problema de extensión, es decir, determinar las reglas de construcción de nuevos grupos a partir de grupos finitos simples.

Para los grupos infinitos, dada la inmensa variedad de formas en las que aparecen estos grupos, todavía no existe nada parecido a una clasificación...

Podría parecer que este punto de vista sobre la geometría, que incide en los conceptos de invariancia por un grupo y de grupo de simetrías, es innecesariamente complicado pero, es este enfoque más abstracto el que ha permitido predecir la existencia de ciertas partículas fundamentales subatómicas o el que ayuda a comprender la estructura de las proteínas, como se verá en la próxima sección. Estos versos del Bhagavad-Gita, texto hinduista escrito hacia el siglo III a. C., parecen hechos a medida [Gorini, 1996]…

He who in action sees inaction

and in inaction sees action is

wise among men. He is united,

he has accomplished all action.

3. Geometría en Física y Biología

El hecho de que la geometría influya en cuestiones de la realidad física suena razonable pero, la profundidad de esa influencia, de forma que los grupos de simetrías parecen regir lo que sucede en nuestro Universo, es más llamativa. Una de las muestras de esta profunda conexión de las leyes físicas con el concepto abstracto de grupo de simetrías y sus invariantes, puede verse en el trabajo de Emmy Noether (1882-1935), hija del también matemático Max Noether (1844-1921) que, pese a todas las dificultades que encontró por ser mujer y por su ascendencia judía, fue capaz de conectar la simetría del espacio y del tiempo con la compleja dinámica del mundo físico [Cariñena, 2004]. Noether realizó una tesis doctoral sobre invariantes algebraicos y demostró entre otros el imponente *teorema de Noether*:

Por cada simetría continua de las leyes físicas ha de existir una ley de conservación. Por cada ley de conservación, ha de existir una simetría continua.

De este modo, el que las leyes físicas sean invariantes respecto a cualquier traslación en el espacio da lugar a la ley de conservación del momento o cantidad de movimiento –la masa por el vector velocidad, en mecánica clásica-. Es lo que sucede cuando chocan dos bolas de billar pero también cuando interaccionan los átomos. Y al revés, el hecho comprobado de que el momento se conserva, implica que las leyes físicas no cambian al variar la posición en el espacio. Análogamente, la invariancia de las leyes físicas respecto a rotaciones equivale a la ley de conservación del momento angular y el que las leyes físicas permanezcan invariantes bajo traslaciones en el tiempo equivale a la ley de conservación de la energía.

El propio Einstein expresó su admiración ante este resultado iluminador sobre el papel de la conservación de la energía en el marco de la *relatividad general*, y ante el resto de la obra de E. Noether que se centró en cuestiones algebraicas como la teoría de *anillos* e *ideales.* Incluso intervino en el largo y difícil proceso para que ella obtuviera un puesto en la universidad alemana de Gotinga, a la que había llegado por invitación de Klein, entre otros, si bien el puesto no estuvo a su altura. Con la llegada de los nazis, E. Noether tuvo que emigrar a Estados Unidos, y trabajó en Princeton de forma fructífera y reconocida hasta su muerte [Blanco, 2011]. Einstein escribió un obituario en el New York Times afirmando que E. Noether había desarrollado métodos de enorme importancia y que la matemática pura es la poesía de las ideas lógicas [Lederman y Hill, 2006]. Una vez más: geometría eres tú…

La relatividad general fue concebida por Einstein como una teoría unificadora del espacio-tiempo y la gravedad, sin necesidad de realizar experimentos específicos, estableciendo que las leyes físicas son las mismas en todos los sistemas –bajo cualquier cambio en las coordenadas del espacio-tiempo-. Así que la relatividad general expresa una simetría continua de las leyes físicas, como en el teorema de Noether. Según Einstein, la invariancia por esta simetría implica la existencia de la gravedad que, bajo el principio de equivalencia, es una faceta de la aceleración –en el descenso brusco de un ascensor, sus ocupantes se sentirían ingrávidos, sin peso-. La gravedad/aceleración curva el espacio-tiempo como se comba la red de seguridad de un artista que cae súbitamente. Los planetas al moverse en sus órbitas cerradas y elípticas están en caída libre en un espacio-tiempo curvado. El marco en el que Einstein pudo formular su profunda teoría hacia 1915 fue el de una geometría no euclídea [Livio, 2005].

Y todavía más, en mecánica cuántica, a nivel subatómico, la existencia de algunas partículas fundamentales como los *quarks* que forman parte de protones y neutrones, se predijo gracias los grupos de simetría, en este caso gracias a los grupos de Lie y a las llamadas *representaciones de un grupo* [Gell-Mann, 1995]. Simplificando, las representaciones de un grupo son maneras de asociar a cada elemento del grupo, una matriz cuadrada con determinante no nulo, de forma compatible con la operación del grupo. El tamaño de la matriz es la *dimensión* de la representación. Hacia 1960, se conocía toda una gama de partículas denominadas *hadrones*, los protones y los neutrones eran ejemplos de hadrones pero había muchas más y existía la necesidad de comprenderlas mejor [Livio, 2004; Frenkel, 2015]. Entre todas esas partículas, se conocían 9 vinculadas a una representación de dimensión 10 de cierto grupo de Lie. Fue entonces cuando M. Gell-Mann (1929-2019) conjeturó que debía existir una décima partícula con una serie de propiedades determinadas por la simetría y… dos años después, en un acelerador se detectó esa partícula, la Ω^{-}, con las propiedades predichas por Gell-Mann, lo que le valió el premio Nobel en 1969. Este hecho no era algo aislado porque existen resultados teóricos de E. Wigner (1902-1995) que garantizan la relación entre simetrías de sistemas cuánticos y representaciones de grupos.

Actualmente, la Física y la Matemática siguen activas para encontrar una visión unificadora total que conectaría la mecánica cuántica con la gravedad. Películas de ciencia ficción como "Interestellar", de C. Nolan (2019), abordan este tema. El modelo estándar describe las fuerzas de electromagnetismo, interacción fuerte e interacción débil, a través de los llamados grupos de *simetría gauge* (que significa calibre o escala pero no suele traducirse) pero aún falta por incluir la gravedad de manera satisfactoria, incluso se debate sobre la existencia real de la supersimetría. En todo caso, parece probable que la eventual teoría física global se escribirá en términos de invariancia por ciertos grupos de simetría.

La faceta matemática de esta visión unificadora, que propone relaciones entre conceptos de áreas muy diversas como las representaciones de grupos y el análisis armónico [Castrillón et al., 2019], se conoce como *Programa Langlands*, por R. Langlands (1936-), el matemático que por azar -o quizá no- ocupa actualmente el mismo despacho que tuvo Einstein en Princeton [Frenkel, 2015].

Así que la geometría y los grupos de simetría se muestran como una potente herramienta de *clasificación* que parece dictar cómo se comporta el mundo físico, pero también lo hace en química y en biología. Los casos en los que este enfoque ha sido útil son numerosos: veamos algunos.

D. Mendeleiev (1834-1907) propuso su *tabla periódica* de los elementos químicos en 1869, bajo la hipótesis de que sus propiedades dependen del patrón de los electrones de sus átomos. La tabla periódica actual es una versión modificada de la propuesta por Mendeleiev. Los modelos atómicos actuales proponen el concepto de *orbitales* o regiones donde la probabilidad de encontrar a los electrones se maximiza. Los orbitales moleculares se obtienen por combinación de orbitales atómicos. Para que dos orbitales se solapen sus grupos de simetría deben tener unas propiedades compatibles. Los grupos de simetría permiten clasificar orbitales atómicos y moleculares y, por tanto, sirven para predecir el comportamiento de los elementos en las reacciones químicas.

En la mayoría de los casos, estos grupos de simetría son grupos de transformaciones en el espacio tridimensional que además son *grupos puntuales* en el sentido de que existe un punto fijo para todos los elementos del grupo (como ocurría en los grupos de Leonardo en el plano). Conocido el grupo puntual molecular se puede adivinar una serie de propiedades, entre ellas, el comportamiento de las vibraciones de los enlaces en moléculas sencillas, midiéndolas bajo luz infrarroja.

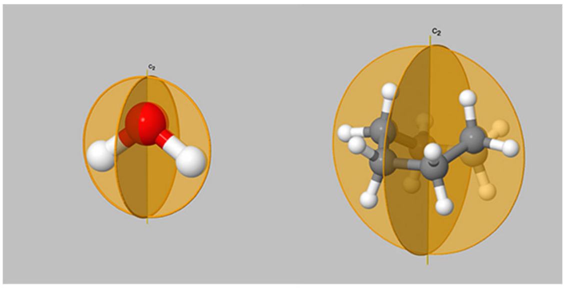


Fig. 10. El agua (H_2O) y el ciclohexano (C_6H_{12}) siendo moléculas diferentes poseen el mismo grupo de simetría molecular. https://symotter.org/assets/img/c2vfig.png

Por ejemplo, el agua y el ciclohexano (que se utiliza para producir nailon) en apariencia diferentes a nivel molecular, poseen el mismo grupo puntual de simetría que incluye cuatro transformaciones que dejan la molécula invariante (ver Figura 10: dos reflejos respecto a plano y dos giros respecto a la recta intersección de los dos planos anteriores -uno de los giros es la identidad del grupo-).

En los materiales cristalinos, los átomos y las moléculas se distribuyen de manera ordenada y paralela de acuerdo con ciertas reglas de simetría formando una red. En 1891, el geómetra y cristalógrafo ruso E.S. Fedorov (1853-1919) clasificó las redes cristalinas por medio de la teoría de grupos, resolviendo uno de los problemas fundamentales de la cristalografía [Alegría]. En sus inicios, la cristalografía era una ciencia descriptiva que se incluía como parte de la mineralogía, pero pronto se conectó con otras disciplinas como la química y la biología. Hoy en día, para entender el comportamiento de una proteína es útil conocer su estructura tridimensional molecular que, en general, no se puede predecir a partir de su secuencia de aminoácidos. El método más común para determinar esta estructura es la difracción por rayos X que consiste en hacer interferir un haz de rayos X con un cristal de proteína, es decir, con una agrupación ordenada de moléculas de proteína, obtenida por un proceso de cristalización bastante trabajoso. De esta forma, se ha construido la base de datos Protein Data Bank [PDB] que contiene archivos con las coordenadas tridimensionales de decenas de miles de proteínas, complejos de proteínas y ácidos nucleicos. Esto permite estudiar los grupos de simetría de cada uno de ellos y visualizar su estructura a través de esquemas o caricaturas.

En PDB, más de la mitad de las entradas son complejos de estructura, compuestos por subunidades idénticas. De esta manera, se requiere menor cantidad de información para codificar la proteína y se multiplican los lugares de unión. Usualmente, las estructuras simétricas cerradas son más estables. Aplicando teoría de grupos, se ha obtenido una lista completa de todos los patrones de movimiento global asociados a complejos con grupo de simetría cíclico, diédrico, *tetraédrico* (grupo de simetrías de un tetraedro) u *octaédrico* (grupo de simetrías de un octaedro) [Song, 2017].

Complejos con la misma simetría siguen los mismos patrones de movimiento global y pueden funcionar de manera similar. Las proteínas con grupos cíclicos de orden 2 suelen especializarse en funciones que requieren direccionalidad o distinción de mitades como la formación de tubos o la interacción con membranas. Los grupos de simetría diédricos proporcionan mayor variedad de interfaces y conducen a una mayor estabilidad de la proteína.

Las simetrías helicoidales con invariancia por traslación más rotación se vinculan con la formación de filamentos extendidos. En algunos virus, se empaquetan subunidades de proteína con envolturas icosaédricas usando cuasi-simetría.

Conocer la estructura de las proteínas y conectarla con la dinámica y con los mecanismos funcionales permite actualmente crear anticuerpos y moléculas basadas en ellos con un amplio espectro de indicaciones terapéuticas, entre ellas la acción antiviral. Es lo que se conoce como ingeniería de proteínas. El proyecto computacional distribuido Folding@home simula dinámica de proteínas implicadas en diversas enfermedades. Iniciado en la universidad de Stanford por V. Pande [FAH], es un proyecto de ciencia ciudadana en el que la contribución de cientos de miles de ordenadores de personas voluntarias realizando simulaciones de plegado de proteínas es capaz de alcanzar un capacidad de computación récord y ayudar a entender cómo las proteínas alcanzan su estructura final.

En el siglo XXI, han surgido nuevos agentes infecciosos para causar epidemias, tales como los coronavirus SARS-CoV, MERS-CoV y el 2019-nCoV, responsable una pandemia en 2020. El ARN de los coronavirus codifica poliproteínas que se dividen en varias proteínas responsables de la replicación en la célula huésped. Las proteasas que producen esta escisión son dianas terapéuticas preferentes para los fármacos antivirales.

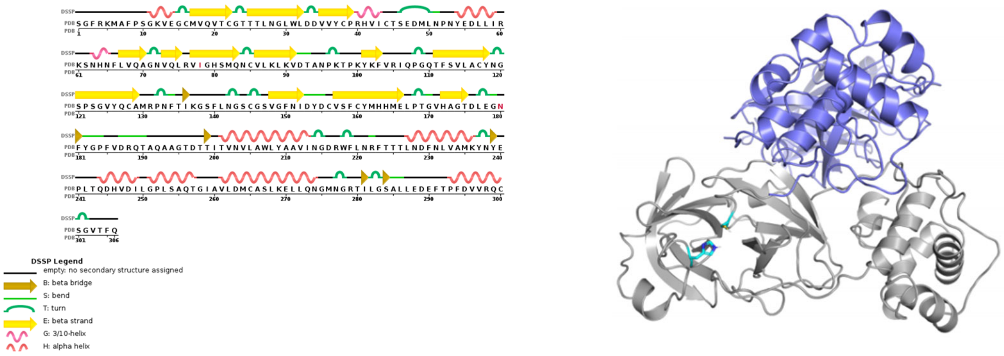


Fig. 11. Secuencia de aminoácidos de la Mpro del 2019-nCoV con su reconstrucción tridimensional a la derecha. (https://www.rcsb.org/pdb/).

En una situación de emergencia sanitaria, dado que el desarrollo de fármacos nuevos conlleva años de investigaciones y ensayos clínicos, una de las vías alternativas es identificar entre los fármacos ya aprobados, candidatos con capacidad de atenuar o controlar la infección viral. Las posibilidades de éxito aumentan si la acción de los fármacos se dirige a un sustrato común a una familia de virus, es decir, a lo que se mantiene invariante ante cambios o mutaciones de estos virus.

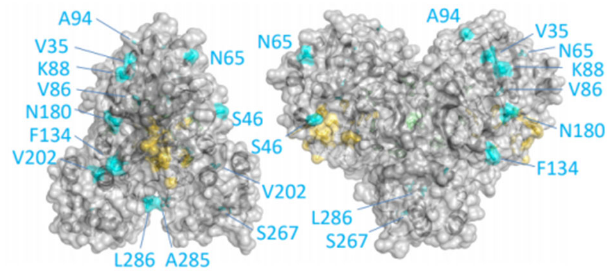


Fig 12. Reconstrucción de la proteasa Mpro del coronavirus 2019-nCoV con los aminoácidos diferentes de los de la Mpro del SARS-CoV coloreados en azul (https://www.rcsb.org/pdb)

La proteasa principal Mpro (por su abreviatura en inglés) es uno de esos sustratos que se conservan en gran medida entre los diferentes coronavirus. Solo 12 aminoácidos diferencian las Mpro del SARS-CoV y la del 2019-nCoV. Se cree que dos de estos aminoácidos están relacionados con una mayor capacidad de infectar para el nuevo coronavirus. Para atacar a la Mpro del 2019-nCoV, teniendo en la mano los datos cristalinos estructurales y de acoplamiento [PDB], es decir, información geométrica sobre los grupos de simetrías, se ha identificado por métodos computacionales el inhibidor N3 basado en un inhibidor conocido de la Mpro del SARS-CoV, entre otros [JIN et al., 2020].

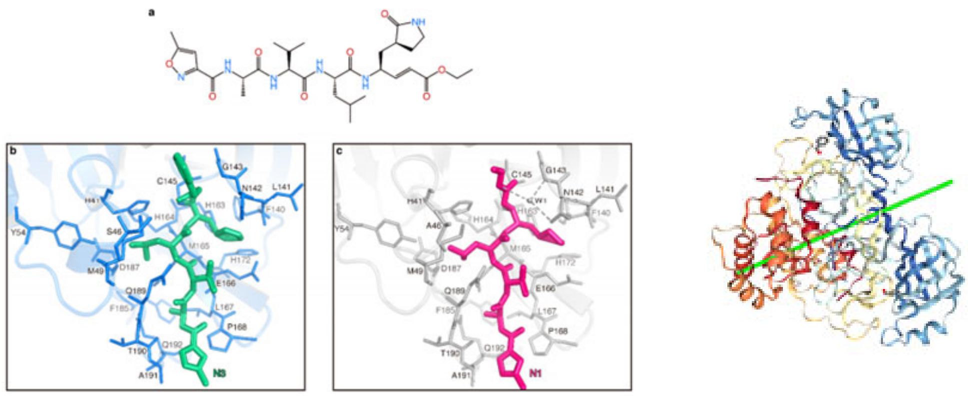


Fig. 13. Izquierda: a) Inhibidor N3. b) Complejo Mpro de2019-nCoV con inhibidor N3. c) Complejo Mpro de SARS-CoV con inhibidor N1. [JIN].Derecha: estructura cristalina del complejo Mpro de2019-nCoV con inhibidor N3, mostrando el eje de giro de 180°que lo deja invariante (https://www.rcsb.org/pdb).

Otras proteínas juegan un papel muy relevante en las infecciones por el virus 2019-nCoV uniéndose a receptores de las células huésped que en algunos casos son también proteínas. Evitar la entrada del virus a las células bloqueando esos receptores de las células humanas podría ser otra de las formas de detener al 2019-nCoV.

La relación entre estructura y función, mediada por los grupos de simetría, también comienza a tenerse en cuenta al estudiar conectomas, que son redes de conexiones neuronales. Al igual que los grupos de simetría gauge ayudan a describir las fuerzas de la mecánica cuántica en el modelo estándar, la invariancia por una serie de grupos puede ayudar a caracterizar las redes neuronales relacionadas con cierta función de un organismo. Es el caso de la locomoción del nemátodo Caenorhabditis elegans y ciertos grupos cíclicos, determinados vía factorización del grupo de simetría del circuito neuronal correspondiente. [Morone y Makse, 2019].

En resumen, con una mayor comprensión de la interrelación entre estructura y función, vinculada a conceptos teóricos como la invariancia por grupos de simetría, podría mejorar el diseño de fármacos antivirales o el desarrollo vacunas que generen inmunidad frente a virus, y en general la lucha contra las enfermedades.

4. Conclusiones

Cuando algo cambia, el considerar qué es lo que permanece sin alterarse pese al cambio, ayuda a entender cuestiones dinámicas. Así, la matemática abstracta, a través del concepto de invariantes por una transformación o simetría, junto con el concepto de grupo de simetrías, permite dar una visión unificadora de cuestiones aparentemente inconexas: las diferentes geometrías, las obras artísticas, la apariencia de muchos seres vivos, las leyes físicas, las partículas elementales, los cristales y la conexión de estructuras neuronales o proteicas con las funciones en las que están involucradas.

La predilección estética por aquello que posee más simetría, la sorpresa ante lo que rompe patrones simétricos, la selección natural vinculada a la simetría por razones funcionales que sucede tanto a nivel molecular, como a nivel celular y a nivel de organismo... De lo más pequeño a lo más grande, de lo exterior a lo profundo, de lo estético a lo funcional, la geometría nos da una medida del mundo y de nosotros mismos a través de los grupos de simetría. Geometría eres tú…

Referencias

[1] SAINT-LÉGER, A. ET AL. *Saturation of recognition elements blocks evolution of new tRNA identities*. Science Advances, Vol. 2, no. 4, 2016, https://doi.org/10.1126/sciadv.1501860

[2] GRAILLE M. et al. *Complex between Peptostreptococcus magnus protein L and a human antibody reveals structural convergence in the interaction modes of Fab binding proteins*. Structure 9, 679-87. http://dx.doi.org/10.1016/S0969-2126(01)00630-X, 2001.

[3] ALSINA C. ET AL. *¿Por qué Geometría?* Ed. Síntesis, 1997.

[4] VÁZQUEZ-GALLO, M.J. *Las 27 rectas de una superficie cúbica*. La Gaceta de la RSME, Vol. 5.2, 271–296, 2002.

[5] FUENTE, de la, D., SÁNCHEZ J. A., ZAMORA, A. *Enseñando relatividad especial gráficamente*, Pensamiento Matemático, vol. X, 73-82, 2020.

[6] MORATALLA, A., SANZ, M. A. *Grupos de Leonardo en la Mezquita del Cristo de la luz*. Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura. 63-74. http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/%C3%8Dndice%20SEG.htm , 2008.

[7] DORRONSORO, J., HERNÁNDEZ, E. *Números, grupos y anillos*. Ed. Addison-Wesley, 1996.

[8] FULTON, W., HARRIS, J. *Representation theory: a first course.* GTM, 129. Ed. Springer, 2004.

[9] SÁNCHEZ MUÑOZ, J.M. *Abel y la imposibilidad de resolver la "quíntica" por radicales*. Pensamiento Matemático, vol. I, 1-31, 2011.

[10] MUMFORD, D., *Introduction to the theory of moduli*. Algebraic Geometry, Oslo, F. Oort, ed. Woltes-Noordhoff, 171-222, 1970.

[11] MUÑOZ, V., ORTEGA, D., VÁZQUEZ-GALLO, MJ. *Hodge polynomials of the moduli spaces of triples of rank (2, 2)*. The Quarterly Journal of Mathematics 60 (2), 235-272, 2008.

[12] GORINI, C. *Symmetry — A Link Between Mathematics and Life*. Humanistic Mathematics Network Journal, 13, 19-22, https://doi.org/10.5642/hmnj.199601.13.08, 1996.

[13] CARIÑENA, J. F., *Emmy Noether: innovación y creatividad en Ciencia*. La Gaceta de la RSME, Vol. 7.2, 347-369, 2004.

[14] BLANCO, D. *Emmy Noether. Matemática ideal,* Editorial Nívola, 2011.

[15] LEDERMAN, L. M., HILL, C. T. *La simetría y la belleza del universo*. Tusquets Ed, 2006.

[16] Livio, M. *La ecuación jamás resuelta.* Ed. Ariel, 2007.

[17] GELL-MANN, M. *El quark y el jaguar. Aventuras de lo simple y lo complejo.* Tusquets Ed., 1995.

[18] FRENKEL, E. *Amor y matemáticas*. Editorial Ariel, 2015.

[19] CASTRILLÓN, M., GIL, O., VÁZQUEZ-GALLO, M.J. *Ingeniería y Matemática: Armonías*. Rev. Pensamiento Matemático, Volumen IX, Número 2, 37–48, 2019.

[20] ALEGRÍA, P. *Las simetrías en la Naturaleza.* http://www.ehu.eus/~mtpalezp/lassimetrias.pdf

[21] The Protein Data Bank (PDB; http://www.rcsb.org/pdb/

[22] SONG, G. *The finite number of global motion patterns available to symmetric protein complexes*. https://doi.org/10.1002/prot.25331, 2017.

[23] Folding@home https://foldingathome.org/

[24] JIN Z. et al. *Structure of Mpro from COVID-19 virus and discovery of its inhibitors*. bioRxiv. https://doi.org/10.1101/2020.02.26.964882, 2020.

[25] MORONE F., MAKSE, H. A. *Symmetry group factorization reveals the structure-function relation in the neural connectome of Caenorhabditis elegans*. Nat. Comm. https://doi.org/10.1038/s41467-019-12675-8, 2019,

Sobre el/los autor/es:

Nombre: María Jesús Vázquez Gallo
Correo Electrónico: mariaejesus.vazquez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

En memoria de Omar Gil (1965-2020):

"Que las partículas que somos se sigan encontrando con amor y alegría".