

MODELO DE CAÍDA STOKESIANA PARA EL MOVIMIENTO DE UNA ESFERA EN UNA PISTA INCLINADA RUGOSA.

Jorge Alberto NARANJO*, Alexánder QUINTERO† y Rafael Andrés NANCLARES†

RESUMEN

En este artículo se reportan los resultados de un estudio teórico y experimental del movimiento de una esfera en un plano inclinado rugoso. Los experimentos realizados muestran que si la esfera se suelta con cierta velocidad inicial que la saque de la hendidura debida a la rugosidad, ocurre que ésta se detiene después de recorrer cierta distancia en una hendidura semejante. Por otro lado, cuando el ángulo de inclinación del plano es mayor que cierto valor crítico, la esfera se mueve con un movimiento 'regular', uniforme en el cual la velocidad 'límite' (velocidad promedio constante) es independiente de la velocidad inicial. De esta manera, se sugiere un análisis semejante al que se desarrolla en la mecánica de fluidos, asumiendo que la pista actúa como un medio disipativo. Los experimentos muestran que sólo hasta un cierto ángulo la caída se puede considerar 'laminar-viscosa'. Por encima de este ángulo la esfera salta, rueda, desliza, en un flujo 'turbulento'. Se reproducen aquí algunos aspectos del diagrama de fase del movimiento, que se discute en detalle. Finalmente se presentan algunas inferencias y conclusiones.

ABSTRACT

In this paper we report the results of a theoretical and experimental study of the motion of a sphere on a rough inclined plane. The experiments show for small inclination there is a desaccelerated regime where the ball always stops. On the other hand, when the angle of inclination of the plane is bigger than a certain value the sphere moves with a uniform 'steady' motion, in which the limit speed (average constant speed) is independent of the initial speed. Thus, we suggested an analysis similar to which is developed in the fluid mechanics assuming that the rough surface acts as a dissipative environment. The experiments show that only until a certain angle the sphere's fall can be considered as 'Laminar-viscous'. Above this angle the sphere jumps, rotates, slips, in a turbulent flow. We reproduce some aspects of the phase portrait of the sphere motion in detail. Finally we present some inferences and conclusions.

INTRODUCCIÓN

* Profesor Titular, Universidad Nacional de Colombia Facultad de Minas, Medellín.

† Ingeniero Civil, Universidad Nacional de Colombia Facultad de Minas, Medellín.

Los materiales granulares exhiben un juego muy diverso de conductas tales como ondas de densidad, avalanchas y segregación, debido al carácter disipativo y no lineal de sus interacciones. Una de las propiedades características es que pueden comportarse como un sólido y como un fluido. Uno puede verter (como si fuera un líquido) granos de arena sobre una mesa, para formar una pila estable con una inclinación determinada (como un sólido). El comportamiento sólido es debido en parte a la fricción estática. Desde los tratados de Coulomb sobre la fricción estática muchos trabajos han sido dedicados al *ángulo de reposo* θ_r de una pila de arena, el cual se define como el ángulo entre la superficie estable de la pila y la horizontal. Claramente este ángulo no depende sólo del coeficiente de fricción estática introducido por Coulomb, sino también de la geometría y la densidad del sistema. Jaeger ha propuesto una generalización de la fricción dinámica, para tratar de explicar el ángulo de histéresis observado en avalanchas. En contraste con los fluidos ordinarios, los materiales granulares pueden formar pilas con una superficie de deslizamiento. Cuando el ángulo de la superficie excede algún valor crítico, la pila no puede ser estable por si misma y ocurre una avalancha. La pila es estable hasta un cierto *ángulo máximo* θ_m en cuanto la pendiente rebasa este valor, se produce una avalancha, que reduce el ángulo a un valor menor, el ángulo de reposo θ_r .

La segregación en superficies de flujo está fuertemente relacionada con la estabilidad del flujo granular en superficies rugosas, es decir, con la determinación de condiciones límites que garanticen la existencia de un estado 'regular' donde el flujo ni se detiene completamente ni se acelera. Mientras mayor sea la rugosidad encontrada por las partículas en movimiento, su flujo será mas lento e incluso pueden llegar a detenerse. El umbral para que comience el flujo granular y las condiciones límites para que exista el flujo estable (es decir un estado 'regular') son poco comprendidas y difíciles de determinar en condiciones reales. En particular las propiedades histeréticas de los materiales granulares se manifiestan, como vimos, en la diferencia entre el ángulo de reposo estático y dinámico de pilas de arena, complicando aun más la situación.

Varios experimentos estudiados recientemente han conducido al problema de una esfera que cae bajo la acción de la gravedad sobre un plano inclinado rugoso. Este trabajo ha revelado nuevos e interesantes aspectos de la dinámica granular que todavía no se comprenden suficientemente. Se encuentran tres regímenes para la caída de la esfera por el plano (JAN et al.,1992, RIGUIDEL et al.,1994, RISTOW et al.,1994): (A) Un régimen de hundimiento o estancamiento donde la esfera sufre un detenimiento repentino después de recorrer cierta distancia; (B) Un régimen donde la esfera alcanza un estado regular con una velocidad constante, independiente de la velocidad inicial; (C) Un régimen de saltoneo donde la esfera experimenta grandes saltos y no obedece a un estado regular. Simulaciones con computador (RIGUIDEL et al.,1994, RISTOW et al.,1994, BATROUNI et al.,1996, DIPPEL et al.,1996) han confirmado estos resultados, particularmente los regímenes A y B (BATROUNI et al.,1996, DIPPEL et al.,1996). Se ha propuesto un modelo teórico en el cual las soluciones del estado regular (más no la dinámica detallada) pueden obtenerse analíticamente (ANCEY et al.,1996). Más recientemente se introdujo un mapeo unidimensional para el estudio del régimen de saltoneo (VALANCE y BIDEAU,1997). Este mapeo es simplemente una versión lineal, y para obtener un comportamiento no lineal se deben variar las propiedades geométricas de la superficie rugosa. En este caso el modelo se vuelve

analíticamente inaccesible. También se propuso un simple modelo geométrico en el que la dinámica se describe por un mapeo unidimensional (VASCONCELOS y VEERMAN,1995). Este mapeo se estudia en detalle y se muestra que exhibe varios regímenes dinámicos (estado regular, comportamiento caótico y movimiento acelerado) a medida que los parámetros del modelo varían.

En este artículo presentamos un modelo para un esfera que se mueve a lo largo de una pista inclinada rugosa. Consideraremos las ecuaciones de movimiento de la esfera, buscando un análisis semejante al que se desarrolla en la mecánica de fluidos con resultados muy interesantes, aunque apenas cualitativos. Nuestro objetivo es tener la base de un modelo que esté de acuerdo con los experimentos y reproduzca varias propiedades del movimiento. A continuación afinaremos estos análisis y daremos criterios seguros para describir los distintos regímenes observados en el movimiento de esferas en planos inclinados rugosos.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

El plano rugoso consiste en una lámina de triplex de 70 cm \times 150 cm, en cuya superficie se pegaron seis cintas de papel de lija de diferente calibre, separadas por bandas de madera. El plano está soportado por un marco de madera con rieles que permite un ajuste preciso de la altura y una medida del ángulo de inclinación, θ , que es uno de los parámetros de control del experimento. Los papeles de lija están constituidos por granos de arena de radio promedio, r , $0.213\text{mm} \leq r \leq 0.718\text{mm}$, que corresponde a las mallas de tamiz números 80, 60, 50, 40, 36 y 24. Utilizamos estas superficies para estudiar el movimiento de ocho diferentes esferas de acero de radio R , $1.98 \text{ mm} \leq R \leq 12.70 \text{ mm}$.

Con el fin de controlar la energía cinética inicial suministrada a la esfera (esto es, la velocidad inicial que la esfera alcanza en la superficie rugosa), se dibuja una línea blanca en cada pista a una distancia de 20 cm de la región desde donde la esfera es lanzada. Un conjunto de hilos paralelos, igualmente espaciados, es puesto cada 10 cm, perpendicularmente a la dirección del movimiento a lo largo de los 120 cm de longitud de recorrido, que se señalan en cada pista con una línea blanca.

El procedimiento experimental es como sigue: el ángulo de inclinación se fija en un valor deseado, y se coloca una esfera de radio dado, R , sobre una de las seis pistas de radio R . Con un ligero golpe, la esfera se acelera y se mueve a lo largo de los 20 cm sobre la superficie rugosa, hasta alcanzar una velocidad límite constante. Mientras el ángulo de inclinación, θ , se encuentre en el rango correspondiente al régimen de hundimiento, A , las esferas que son arrojadas deberán detenerse a diferentes distancias L_i . El subíndice i denota un lanzamiento en particular. Si el ángulo de inclinación, θ , y el coeficiente de hundimiento, $\Phi = R/r$, se encuentran en un rango correspondiente al régimen laminar, B , el movimiento de la esfera es muy rápido, y, después de recorrer los 20 cm, alcanza un estado regular con velocidades medias bien definidas en las direcciones x e y . Claramente, la velocidad v_y (velocidad de fluctuación) es, en promedio,

aproximadamente cero, así que sólo nos interesa la velocidad media v_x , que denotaremos por \bar{v} . Para obtener esta velocidad media, se mide el tiempo t_i que demora la esfera en recorrer una distancia L_i . Este procedimiento se repite 10 veces para cada esfera en cada una de las pistas. Como el modelo de ajuste de los datos tiene la forma de una línea recta que pasa por el origen, $L=vt$, el valor de la velocidad está dado por

$$v = \bar{v} \pm \Delta v = \frac{\sum L_i t_i}{\sum t_i^2} \pm t_\alpha \sqrt{\frac{\sum (L_i - \bar{v} t_i)^2}{9 \sqrt{\sum t_i^2}}}, \quad (1)$$

donde t_α es el factor de corrección de Student; en nuestro caso, para una confiabilidad del 95% ($\alpha=0.05$), $t_{0.05}(9)=2.2622$. En el régimen B, se tiene que $L_i=120$ cm para todo $i=1, \dots, 10$, y por lo tanto la velocidad límite está dada por

$$v_\infty \equiv 120 \frac{\sum t_i}{\sum t_i^2} \pm 2.2622 \sqrt{\frac{\sum (120 - \bar{v} t_i)^2}{9 \sqrt{\sum t_i^2}}} \quad (2)$$

Este valor es mucho mayor que el que se obtiene al promediar las fluctuaciones que ocurren durante las colisiones, siempre y cuando éstas permanezcan pequeñas y la esfera se mueva tan solo una distancia pequeña. Claramente, este valor promedio nos daría la velocidad de fluctuación, pero, como ya dijimos, las fluctuaciones son pequeñas, y \bar{v} , el valor medio de la velocidad, está bien definido. Este experimento se repite para diferentes valores de R , γ y θ . La incertidumbre en las medidas de longitud es del orden de ± 10 mm y en las medidas del tiempo es del orden de ± 0.01 s.

EL MODELO

En el desarrollo que nosotros haremos, discutiremos el caso de una esfera de densidad homogénea ρ' y radio R , que se mueve bajo la acción de la gravedad, sobre una pista rugosa inclinada un ángulo θ con respecto a la horizontal, con R el radio de la rugosidad (NARANJO, 1999). Supondremos que la resistencia que se opone al movimiento de la esfera es una fuerza viscosa. De esta manera, ya que las fuerzas que actúan sobre la esfera son la fuerza de dragado o arrastre, $F(v)$, y la componente de la fuerza gravitacional, $mg \sin \theta$, la ecuación de movimiento para la esfera es

$$mg \sin \theta - Fv = m \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

donde m es la masa de la esfera, g es la aceleración de la gravedad y v la velocidad de la esfera.

Para una esfera que se mueve con velocidad v en un medio viscoso, la *fuerza de dragado* se expresa usualmente (LANDAU y LIFSHITZ, 1996) como:

$$F_v = \frac{C_D R_D}{24} 6\pi\eta Rv, \quad (4)$$

donde C_D en este caso representa el 'coeficiente de dragado', R_D es el 'número de Reynolds' para la pista, R es el radio de la esfera y η es la 'viscosidad dinámica' de la pista. El número de Reynolds para la pista se define por

$$R_D = \frac{2R\rho v}{\eta}, \quad (5)$$

donde se ha asumido que la pista tiene una densidad ρ . Si se reemplaza la ecuación (5) en la ecuación (4) se obtiene que la pista se resiste a la esfera de acuerdo a la ley de Newton

$$F_v = \frac{C_D}{24} \frac{2R\rho v}{\eta} 6\pi\eta Rv = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 \pi R^2 \quad (6)$$

En este caso el movimiento de la esfera a lo largo de la pista está dado por

$$mg \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} C_D \rho v^2 \pi R^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (7)$$

A partir de la condición que determina el régimen de movimiento a velocidad terminal o velocidad límite (que corresponde al régimen B), $\frac{dv}{dt} = 0$, haciendo $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho'$, se obtiene

$$\frac{4}{3} R \rho' g \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} C_D \rho v_\infty^2 = 0,$$

donde ρ' es la densidad de la esfera y v_∞ la velocidad límite del movimiento. En esta ecuación se conocen las cantidades R y $\operatorname{sen} \theta$ y se puede determinar experimentalmente v_∞ . En consecuencia se puede calcular a $C_D \frac{\rho}{\rho'}$ en términos de las cantidades R , $\operatorname{sen} \theta$, v_∞ :

$$C_D \frac{\rho}{\rho'} = \frac{8 g R \operatorname{sen} \theta}{3 v_\infty^2}. \quad (8)$$

Ahora, para valores pequeños del número de Reynolds, es decir, considerando que la esfera cae en un régimen 'laminar', se tiene que $C_D R_D / 24 = 1$, y se sigue, a partir de la ecuación (4) que el movimiento de la esfera sobre la pista rugosa puede ser descrito por la ley de Stokes

$$F(v) = 6\pi\eta Rv. \quad (9)$$

En este caso, el movimiento de la esfera a lo largo de la pista viene dado por

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho' g \text{sen} \theta - 6\pi\eta Rv_{\infty} = 0.$$

A partir de esta última ecuación se obtiene que η/ρ' puede calcularse en términos de R , $\text{sen}\theta$, v_{∞} :

$$\frac{\eta}{\rho'} = \frac{2gR^2 \text{sen}\theta}{9v_{\infty}}. \quad (10)$$

Como ya se dijo, en el régimen laminar, para valores pequeños del número de Reynolds, el coeficiente C_D , que en éste caso denotaremos por C_{DL} , satisface la ecuación de una esfera en caída stokesiana

$$C_{DL} = \frac{24}{R_D}. \quad (11)$$

Aquí hemos asumido que las fuerzas inerciales son despreciables con respecto a las fuerzas viscosas. Por medio de la ecuación (11) se llega a que

$$C_{DL} \frac{\rho}{\rho'} = \frac{24}{R_D} \frac{\rho}{\rho'} = \frac{24}{2\rho'Rv/\eta} = \frac{12}{Rv} \frac{\eta}{\rho'}. \quad (12)$$

Ahora bien, los experimentos realizados por nosotros muestran que sólo hasta cierto valor umbral para el ángulo de inclinación, la caída de la esfera se puede considerar laminar y viscosa. Por encima de este valor, la esfera se acelera, salta, rueda, desliza, en lo que podría denominarse un flujo 'turbulento'. En este caso, el dragado sobre la esfera induciría fuerzas inerciales y se tiene que $C_D \neq C_{DL}$. Teniendo esto presente, proseguiremos de la manera siguiente: se desarrolla una expresión para determinar η/ρ' a muy bajas inclinaciones, observando cual es su variación con el ángulo de inclinación θ , el radio de la esfera R y el radio de la pista r . Puede establecerse que η/ρ' es una función desconocida de estas variables. Es decir

$$\frac{\eta}{\rho'} = f(\theta, r, R).$$

Empleando el análisis dimensional, se llega a que

$$\frac{\eta}{\rho'} = \lambda(\theta)\sqrt{r}R, \quad (13)$$

donde la naturaleza de la función λ se desconoce. Sin embargo, mediante los experimentos puede establecerse que $\lambda(\theta)$ puede escribirse, para bajas inclinaciones, en la forma

$$\lambda(\theta) = A \operatorname{sen} \theta + B,$$

donde A y B son constantes que deben ser determinadas. Mediante un ajuste de nuestros resultados experimentales, para $1^\circ \leq \theta \leq 4^\circ$, se encuentra que

$$\lambda(\theta) = 14.112 \operatorname{sen} \theta + 1.675.$$

A partir de esta expresión se puede calcular el valor de la viscosidad aún para régimen no laminar

$$\frac{\eta}{\rho'} = (14.112 \operatorname{sen} \theta + 1.675) \sqrt{r} R.$$

Ahora puede evaluarse el coeficiente de dragado C_{DL} en cualquier régimen de movimiento. Experimentalmente se obtuvo que para flujos realmente laminares resulta que $C_D \approx C_{DL}$, mientras que para flujos no laminares, digamos transicionales o turbulentos, $C_D \neq C_{DL}$.

Uno de los errores más frecuentes, causa de muchos malentendidos y confusiones irremediables de interpretación, es asumir que la ecuación (10) siempre es válida, con lo cual en todos los casos ha de resultar que $C_D \equiv C_{DL}$. Nótese que en el rango laminar se supone que el dragado obedece a la ley de Stokes, y por lo tanto, la ecuación (12) sólo es válida si (10) es aplicable, en tanto que la ecuación (8) es general. Por esta razón, hemos buscado la forma funcional de η/ρ' únicamente en los casos laminares, y como es usual en hidrodinámica, supusimos que dicha forma se conserva aún en el régimen no laminar, teniendo en cuenta que la resistencia no será exclusivamente de naturaleza viscosa, sino inercial. Si se utiliza siempre la ecuación (10) se está asumiendo que toda la resistencia es viscosa y se sobrestima por lo mismo el coeficiente de viscosidad. En cambio, si se logra discernir qué porción del dragado es de responsabilidad puramente viscosa, puede indagarse cuál es la forma específica del dragado remanente.

En general, para estos casos conviene buscar expresiones de la forma

$$C_D \frac{\rho}{\rho'} = k \Phi^\alpha R_D^\beta, \quad (14)$$

donde $\Phi = R/r$ es el coeficiente de hundimiento y R_D es el número de Reynolds para la pista. Mediante una regresión múltiple de los datos experimentales para valores del ángulo de inclinación comprendidos entre 5° y 8° , donde casi todas las medidas corresponden a los regímenes C, C' y D (ver diagrama de fase), se obtienen las siguientes relaciones para la dependencia de $C_D \frac{\rho}{\rho'}$ con Φ y R_D .

$$C_D \frac{\rho}{\rho'} = 107.989 \Phi^{1.0} R_D^{-2.00002}, \quad (\theta = 50 \times 60)$$

$$C_D \frac{\rho}{\rho'} = 110.128 \Phi^{0.99997} R_D^{-1.99997}, \quad (\theta = 60 \times 60)$$

$$C_D \frac{\rho}{\rho'} = 110.564 \Phi^{0.99999} R_D^{-2.00002}, \quad (\theta = 70 \times 60)$$

$$C_D \frac{\rho}{\rho'} = 109.882 \Phi^{1.0} R_D^{-2.00001}, \quad (\theta = 80 \times 60).$$

A partir de esto podemos decir que el coeficiente de dragado C_D , para números de Reynolds grandes, tiene la forma

$$C_D \sim \frac{\Phi}{R_D^2}. \quad (15)$$

De esta manera, el movimiento de la esfera en régimen turbulento, según la ecuación (6), está descrito por un dragado de la forma

$$F \sim \frac{1}{2R_D^2} \Phi \rho v^2 \pi R^2 = \frac{1}{24} \frac{\Phi}{\rho^2 R^2 v^2 / \eta^2} \rho v^2 \pi R^2 = \frac{\pi \eta^2}{8\rho} \Phi,$$

o sea

$$F \sim \frac{\pi \eta^2}{8\rho} \Phi, \quad (16)$$

que corresponde a una fuerza disipativa proveniente de fricción en seco. De este modo hemos encontrado que a grandes velocidades, la esfera se mueve a lo largo de la superficie rugosa sometida a una fuerza de fricción seca, $F=K_1$. En otras palabras, el movimiento de una esfera de radio R , cayendo a lo largo de una pista rugosa inclinada un ángulo θ respecto a la horizontal, con γ el radio de la rugosidad, experimenta una fuerza de disipación *constante* ($F=K_1$), mientras su velocidad sea mayor que v_∞ ; una fuerza de disipación viscosa $F=K_2v$ cuando su velocidad se encuentra entre v_∞ y v_{min} , y es atrapada por los nichos y hendiduras de la superficie rugosa cuando $v \leq v_{min}$, donde v_{min} es el valor umbral de la velocidad para que la esfera se mueva, pero sin alcanzar nunca el régimen laminar.

Diagrama de Fase

Se dispone de tres parámetros de control para analizar el movimiento de la esfera: el ángulo de inclinación θ que nos da la cantidad de energía suministrada al sistema, el coeficiente de hundimiento Φ y eventualmente el radio de la rugosidad γ . Las Figuras 1 y 2 nos dan en el plano (Φ, θ) el diagrama de fase en el que se pueden apreciar los diferentes regímenes observados para el movimiento de la esfera: se cortan ahora, en el espacio de fase Φ vs θ , cuatro zonas típicas: hundimiento con detención, rodamiento puro viscoso-laminar, rodamiento-saltoneo inercial turbulento y rodamiento acelerado. Quedan además unas fronteras difusas, no tan nítidas como se recortó el contorno dinámico en la pista lisa (NARANJO, 1997). La gráfica permite saber, de una vez, cómo caerá la esfera según sea el valor de Φ y θ . Las pequeñas incertidumbres fronterizas requieren más experimentos, pero el grueso del espacio de fase queda así clasificado según cuatro regímenes. Para pequeñas rugosidades y/o pequeños valores de θ (zona A), se observa un régimen desacelerado donde la esfera siempre se detiene. Para inclinaciones mayores, la esfera adquiere una velocidad promedio constante donde el valor de esta velocidad es independiente de la velocidad con que es lanzada (zona B), régimen que corresponde al rodamiento puro viscoso-laminar; si se aumenta el ángulo θ , para pequeños valores de Φ se observa un régimen donde la esfera cae con visibles saltos y de manera 'turbulenta' (zona C, zona C') para grandes inclinaciones); finalmente si se aumenta el valor de Φ , se observa un régimen donde la esfera cae en forma acelerada (zona D). El plano en que se realizaron los experimentos no es lo suficientemente largo para discernir si existe una transición entre el régimen C y el régimen D para grandes inclinaciones.

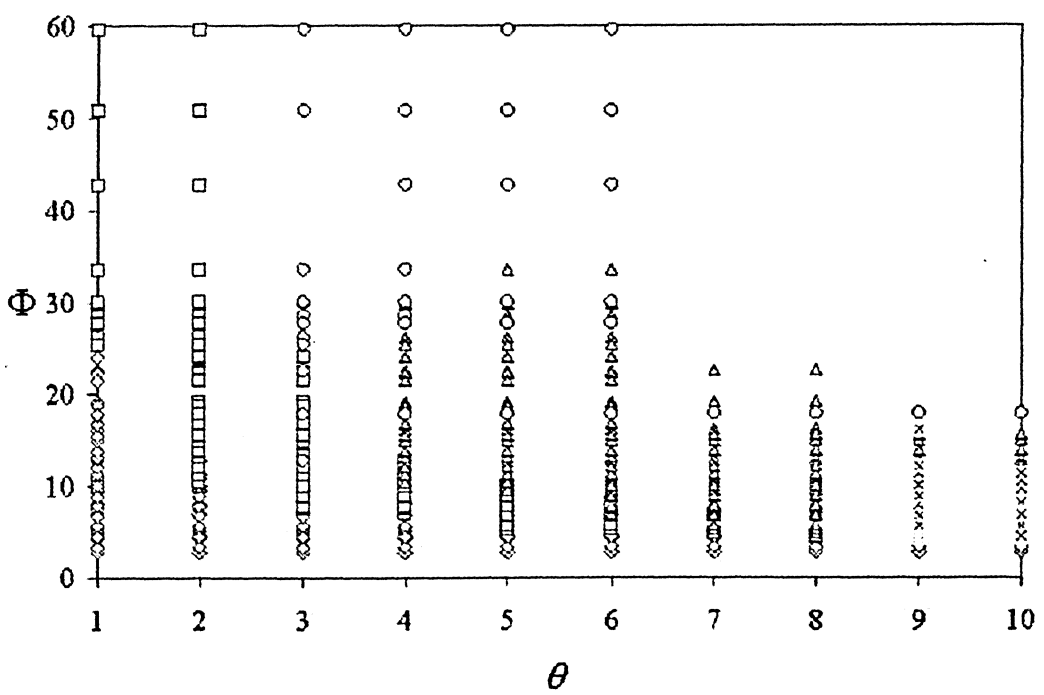


FIGURA 1. Diagrama de fase de los diferentes regímenes observados. Régimen A (\diamond), régimen B (\square), régimen C (Δ), régimen D (O).

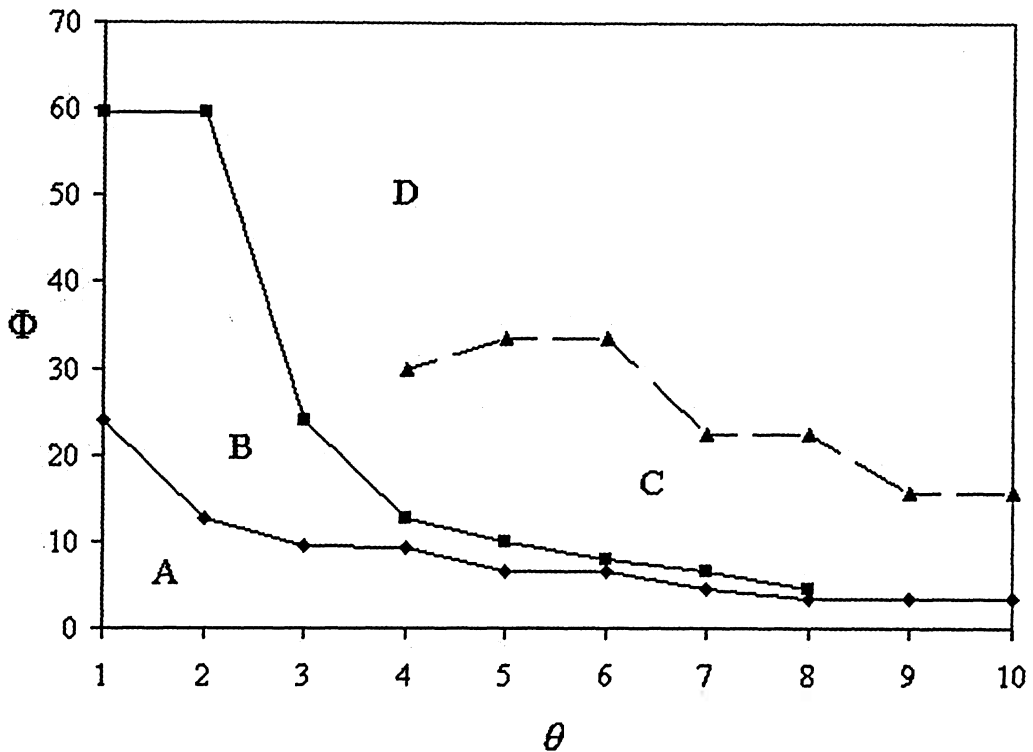


FIGURA 2. Contornos dinámicos de los distintos regímenes. Las líneas sólidas representan los contornos $\theta_{AB}(\Phi)$ y $\theta_{BC}(\Phi)$, la línea discontinua corresponde al límite difuso entre el régimen C y el régimen D.

El diagrama de fase da una descripción incompleta del movimiento de la esfera. Aceleración, desaceleración o saltoneo son consecuencia del balance promedio de energía entre la ganancia de energía cinética y la pérdida o disipación de energía por fricción durante las colisiones. Pero además, la esfera puede parar de manera súbita en cualquiera de los cuatro regímenes como puede verificarse durante los experimentos o en la sesión de video (esto es válido para valores de Φ pequeños, pues de lo contrario la esfera no 'sentiría' rugosidad y cae sin detenerse, en forma acelerada).

CONCLUSIONES

En nuestro modelo consideramos las ecuaciones de movimiento de una esfera a lo largo de una pista inclinada rugosa, partiendo de un análisis semejante al que se desarrolla en mecánica de fluidos. Se ha supuesto que la pista se comporta como un medio disipativo al cual podemos asociarle una densidad ρ y una 'viscosidad dinámica' η . Con base en éstos parámetros hemos definido el número de Reynolds R_D . Para el régimen B o régimen 'laminar', el movimiento de la esfera se describe por medio de la ley de Stokes. El valor de la viscosidad para bajas

inclinaciones varia linealmente con el $\sin\theta$, la raíz cuadrada de la rugosidad γ y el radio de la esfera R , $\eta \sim (A \sin\theta + B)\sqrt{\gamma}R$. Los experimentos muestran la existencia de cuatro regímenes: un régimen A que corresponde a hundimiento con detención, un régimen B de rodamiento puro 'viscoso-laminar', un régimen C (régimen C' para grandes inclinaciones) de rodamiento-saltoneo inercial 'turbulento' y un régimen D de movimiento acelerado. En caso de que la esfera se mueva en régimen laminar, se obtiene que $C_D = C_{DL}$. Si la esfera se mueve en régimen turbulento, resulta que $C_D \neq C_{DL}$. En este último caso la resistencia no será de origen viscoso, sino inercial, ya que los resultados obtenidos para el coeficiente de dragado, $C_D \sim \Phi R_D^2$, implican que el dragado tiene la forma: $F \sim (\pi\eta^2/8\rho)\Phi$; esto significa que la fuerza de disipación proviene de fricción seca. De esta manera, sólo son posibles dos tipos de fuerzas de fricción: en régimen laminar, $F = K_2 v$, y en regímenes transicionales o turbulentos, $F = K_1$.

A pesar de su simplicidad, este modelo proporciona un marco teórico en el que el comportamiento general observado en los experimentos puede ser *cualitativamente* entendido.

BIBLIOGRAFÍA

ANCEY C., EVESQUE P., and COUSSOT P., J. Phys. I France 6, 725 (1996).

BATROUNI G.G, DIPPEL S., and SAMSON L., Phys. Rev. E 53, 6496 (1996).

DIPPEL S., BATROUNI G. G., and D. E. Wolf, Phys. Rev. E 54, 6845 (1996); 56, 3645 (1997).

JAN C. D., SHEN H. W., LING C. H., and CHEN C. I., en *Proc. of 9th Conf of Eng. Mech., College Station, Texas*, 768 (1992).

LANDAU L. D. y LIFSHITZ E. M., *Mecánica de Fluidos*, Ed. Reverté, Barcelona, 1986.

NARANJO J. A., *Caida de Esferas en Planos Inclinados Lisos y Rugosos*, Grupo Galileo, Universidad Nacional (1999).

NARANJO J. A., *Los Trabajos Experimentales de Galileo Galilei*, Ed. U. Nal, Bogotá, 1987.

RIGUIDEL F. -X., HANSEN A., and BIDEAU D., Europhys. Lett. 28, 13 (1994).

RIGUIDEL F. -X., JULIEN R., RISTOW G. H., HANSEN A., and BIDEAU D., J. Phys. I France 4, 261 (1994).

RISTOW G. H., RIGUIDEL F. -X., and BIDEAU D., J. Phys. I France 4, 1161 (1994).

VALANCE A. and BIDEAU D., Phys. Rev. E 57, 1997.

VASCONCELOS G. L. and VEERMAN J. J. P., *Geometrical model for particle on a rough inclined surface*, e-print cond-mat/9501131.