DOMINIO ESTOCASTICO: PROCEDIMIENTO CONVENCIONAL Y METODO CUANTIL

José Manuel Villanueva Saiz

RESUMEN.— Exponemos en este trabajo tres criterios para la elección entre dos alternativas de inversión con riesgo, según el concepto de Dominio Estocástico, por el procedimiento convencional y cuantil. Teniendo presente, que el inversor a la hora de optar por una u otra alternativa, eligirá aquella que le proporcione mayor utilidad esperada de los rendimientos, consideramos que las curvas de utilidad son de clase C^1, C^2 y C^3, para cada uno de los órdenes de dominio, y que indican distintas situaciones ante el riesgo.

1. INTRODUCCION

Ante el problema, que se le presenta a un inversor, de elegir entre dos alternativas u opciones de inversión con riesgo, éste le soluciona, eligiendo aquella inversión que le proporcione la mayor utilidad esperada de los rendimientos, para lo cual será necesario conocer su función de utilidad, así como su actitud ante el riesgo.

Consideraremos a dichas alternativas de inversión, como variables aleatorias independientes, cuantificadas por sus funciones de distribución y que representan el resultado monetario de una inversión dada; por tanto, serán adiciones o reducciones de la riqueza de un individuo que suponemos constante.

Basándonos en los trabajos sobre estudios relativos al fundamento del análisis de la eficiencia de las decisiones financieras, según los criterios de dominio estocástico, expuestas por J. Hadar y W. R. Russell (2), G. Hanoch y H. Levy (3) y por M. Rothschuild y J. E. Stiglitz (7) y G. A. Whitmore (9) desarrollamos, según el criterio convencional y el procedimiento cuantil, tres criterios de dominio estocástico, entre dos alternativas de inversión arriesgadas, teniendo presente que las familias de las curvas de utilidad, recogen ciertas acepciones de riesgo, ya que la decisión que toma el inversor ante situaciones inciertas de inversión, puede ser vista como opciones entre distribuciones de probabilidad alternativas de rendimiento y el individuo escoge de entre ellas de acuerdo con un conjunto consistente de preferencias. Von Neumann y Morgenstern (5) dieron una visión axiomática que justifica el uso de la utilidad, aduciendo, que, dadas las condiciones en las que se basa el análisis de indiferencia y que bajo suposiciones razonables sobre las preferencias de los individuos, el inversor escoge una alternativa que maximice la utilidad esperada de los rendimientos, donde la función de utilidad está determinada hasta su transformación lineal, por las preferencias individuales. Pero, sin embargo, en la mayoría de las situaciones es necesario tener mayor información, o información adicional expresada en su función de utilidad, como su situación frente al riesgo.

Por lo tanto, suponemos, que las familias de las curvas de utilidad son de clase C^1, C^2 y C^3, para los casos de dominio de primero, segundo y tercer orden, pero teniendo presente, como han apuntado K. J. Arrow (1) y J. W. Pratt (6), que la observación de ciertos fenómenos económicos, indican que las funciones de utilidad individuales muestran aversión al riesgo absoluta decreciente y con un menor alcance, aversión al riesgo relativa creciente, existiendo dudas si la aversión al riesgo relativa creciente es una suposición que se puede admitir. Así parece que la aversión al riesgo absoluta decreciente es la clase más restrictiva de las funciones de utilidad aceptable para la mayoría de los economistas que están interesados en las reglas de selección óptima para clases de funciones de utilidad mencionadas, siendo necesario, por tanto en C^3 que $u' \geq 0$.

Estamos ante el concepto de Dominio Estocástico de primer orden (DEP) cuando consideramos que el individuo es insaciable o prefiere más a menos, Dominio Estocástico de segundo orden (DES) cuando es insaciable y es adverso al riesgo y el Dominio Estocástico de tercer orden (DET) cuando además el individuo tiene aversión al riesgo absoluta decreciente.

No suponemos la forma específica de las funciones de utilidad, sino que definimos conjuntos eficientes, bajo hipótesis respecto a las características generales de la función de utilidad del inversor.

2. PLANTEAMIENTO

En este apartado, nuestro propósito es establecer el concepto de Dominio Estocástico entre dos opciones o alternativas de inversión con riesgo y caracterizarle por medio del las funciones de distribución asociadas.

Designemos por X e Y dos alternativas de inversión, que serán consideradas como variables aleatorias independientes, cuantificadas por medio de sus funciones de distribución $F(x)$ y $G(y)$ respectivamente.

Las variables X e Y representan el resultado monetario de una inversión dada, por tanto, serán adiciones o reducciones de la riqueza de un individuo que se supone constante.

Si un individuo, tiene que elegir entre la alternativa X ó Y, elegirá la primera si la utilidad esperada de ella supera a la utilidad esperada de la alternativa Y; pero, para tomar esa decisión, será necesario conocer la función de utilidad del individuo, así como su postura ante el riesgo.

Establecemos, ahora, cuando una opción X es preferida a una opción Y. Decimos que X domina a Y (XDY) si:

$$E_F u(x) \geq E_G u(x) \qquad \forall\, u(x) \in U$$

existiendo al menos una $u(x) \in U$, donde la desigualdad se satisface en estricto.

El conjunto U, es el conjunto de todas las funciones de utilidad no decrecientes $(u'(x) \geq 0)$ y con valores finitos para todo real x. La utilidad esperada $E_H u(x)$, asociada a una alternativa de inversión con función de distribución $H(x)$, viene definida:

$$E_H u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dH(x)$$

integral que siempre supondremos su existencia.

En numerosas ocasiones, en vez de utilizar la notación XDY, utilizaremos la análoga FDG, en alusión a las funciones de distribución asociadas.

La relación binaria establecida satisface la propiedad transitiva y el conjunto de opciones que no están dominadas por ninguna otra, diremos, que constituye un conjunto eficiente y por tanto, la elección entre ellas tendrá que atenerse a otros criterios. Si el conjunto de funciones de utilidad se restringe a un subconjunto propio de U, el conjunto de opciones eficiente puede reducirse, pudiendo constituir un subconjunto del anterior y de este modo podríamos llegar a encontrar una opción preferible.

Nos centramos en el análisis de tres conjuntos de funciones de utilidad que recogen distintas concepciones de riesgo.

Así U_1, corresponderá al conjunto de funciones de utilidad no decrecientes, que representan a un individuo que no hace ninguna consideración sobre el riesgo, individuo que atenderá únicamente a razones de obtener más a menos.

$U_2 \subset U_1$, recoge las funciones de utilidad no decrecientes, pero además cóncavas; tendremos por tanto un individuo adverso al riesgo.

Por útlimo, $U_3 \subset U_2 \subset U_1$, recoge las funciones de utilidad no decrecientes, cóncavas, y con tercera derivada positiva; esto es, tendremos un individuo con una aversión absoluta al riesgo decreciente.

En los apartados siguientes, establecemos las condiciones necesarias y suficientes de dominio entre dos opciones de inversión relativas a los tres conjuntos U_1, U_2, U_3. Cuando hagamos referencia al conjunto de los inversores insaciables, o que prefieren más a menos, hablaremos de dominio estocástico de primer orden (DEP), en el de los adversos al riesgo, de dominio estocástico de segundo orden (DES), y si consideramos aversión absoluta al riesgo decreciente, nos referiremos al dominio estocástico de tercer orden (DET). Estos tipos de dominio son también simbolizados por $F\ D_1\ G$, $F\ D_2\ G$ y $F\ D_3\ G$ respectivamente, donde el subíndice indica el orden de dominio.

3. DOMINIO ESTOCÁSTICO DE PRIMER ÓRDEN (DEP)

Considerando el conjunto conjunto U_1, trataremos de caracterizar la relación binaria establecida entre opciones o alternativas de inversión por medio de sus funciones de distribución.

TEOREMA I

Dadas dos funciones de distribución F y G asociadas a dos alternativas de inversión con riesgo X e Y, entonces, F domina a G sobre U_1, si y sólo si:

$$F(x) \leq G(x) \quad \text{para todo } x \tag{3.1}$$

con la condición de que al menos exista un número real x_o que verifique $F(x_o) < G(x_o)$.

La demostración de este teorema exige una presentación diferente en las expresiones de la utilidad esperada.

En efecto, para demostrar la suficiencia, teniendo en cuenta las definiciones de las utilidades esperadas, que como sabemos vienen dadas para cada una de las opciones, por las expresiones:

$$E_F u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dF(x)$$

$$E_G u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dG(x)$$

y denotando por Δ la diferencia de utilidades esperadas de las dos opciones:

$$\Delta \equiv E_F u(x) - E_G u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, d[F(x) - G(x)]$$

Supongamos, que el intervalo de definición de las variables aleatorias es $[a, b]$ pues la demostración sobre un intervalo infinito, no ofrece mayores dificultades y puede encontrarse para los tres órdenes de dominio que presentamos en este trabajo en Hanoch y Levy (3), en Levy H. y Paroush J. (4) y en Tesfatsion L. (8).

Integrando por partes:

$$\Delta \equiv u(x)\, [F(x) - G(x)] \Big|_a^b - \int_a^b [F(x) - G(x)] u'(x) dx$$

y teniendo en cuenta el comportamiento de las funciones de distribución en los extremos del intervalo de definición, obtenemos:

$$\Delta = - \int_a^b u'(x)\,[F(x) - G(x)]\,dx$$

análogamente

$$\Delta = \int_a^b u'(x)\,[G(x) - F(x)]\,dx \tag{3.2}$$

expresión que será de gran utilidad en la demostración del teorema.

En efecto, si $F(x) \leq G(x)$, para cualquier x, tendremos, dado el carácter no decreciente de las funciones que constituyen el conjunto U_1, que $\Delta \geq 0$, para todo $u \in U_1$.

Para probar que $\Delta > 0$, para al menos una función de utilidad, basta considerar la función de utilidad:

$$u_o(x) = \begin{cases} x_o & \text{para } x \leq x_o \\ x & \text{para } x_o < x \leq x_o + \varepsilon \\ x_o + \varepsilon & \text{para } x > x_o + \varepsilon \end{cases}$$

y tener en cuenta, debido a que las funciones de distribución son continuas por la derecha y que por hipótesis tenemos $F(x_o) < G(x_o)$ el signo de $[G(x) - F(x)]$ seguirá positivo en el intervalo $[x_o, x_o + \varepsilon]$ y por tanto, obtenemos:

$$\Delta = \int_{x_o}^{x_o + \varepsilon} [G(x) - F(x)]\,dx > 0$$

La condición necesaria, resulta asimismo inmediata razonando por el absurdo. En efecto, si suponemos que existe x_1 tal que $F(x_1) > G(x_1)$ de nuevo podemos construir una función de utilidad análoga a la anterior en x_1 y mediante el mismo razonamiento llegaríamos a que $\Delta < 0$, lo que es contradictorio con las hipótesis. Para el resto de la condición necesaria, de nuevo podremos razonar por el absurdo, entonces para todo x, tendremos $F(x) = G(x)$, lo que llevaría a que Δ sería nulo para toda función de utilidad, lo que no puede mantenerse, dadas las hipótesis.

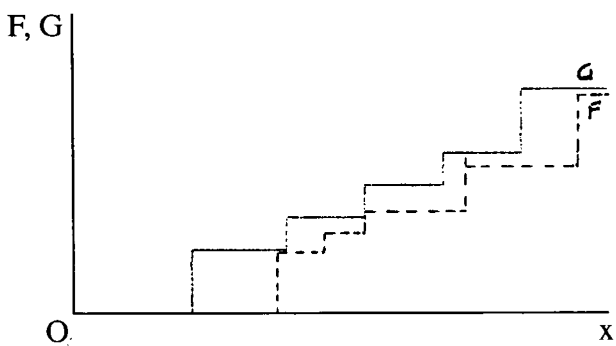
El criterio, nos facilita la comparación entre opciones, pues si decir que una opción es preferible a otra, atendiendo a la definición, nos lleva a realizar comparaciones considerando el extenso conjunto U_1; con el criterio, bastaría una simple representación gráfica de las funciones de distribución. Así podrán coincidir, salvo al menos en un punto, donde una función sobrepasará a la otra. No hay posibilidad de corte entre ellas, y si este fuera el caso, el dominio no sería de primer orden.

Por lo tanto la condición necesaria y suficiente para que FD_1G es:

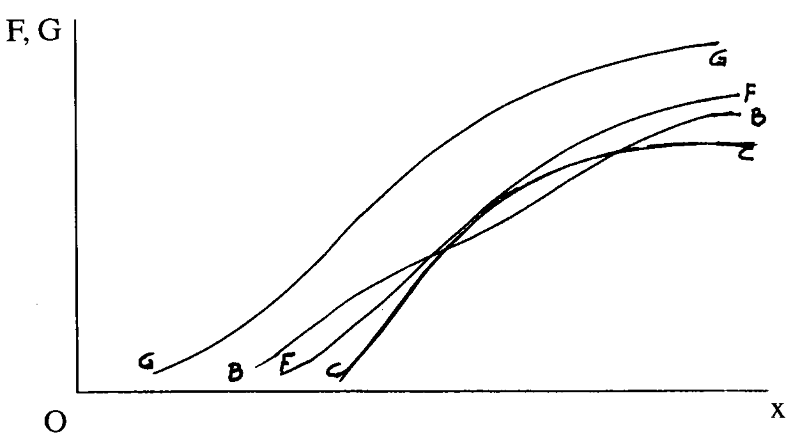
$$F(x) \leq G(x) \text{ para todo } x$$
$$F(x) < G(x) \text{ para algún } x_o$$

Podemos interpretar este criterio de una forma sencilla: dado que F y G son distintas, F domina a G, si y sólo si, para todo valor de x, la probabilidad de obtener x o menos, es menor con F que con G. Si se considera la relación anterior de la forma: $1 - F \geq 1 - G$, entonces, la probabilidad de obtener más que x no es más pequeña con F que con G, para cada x. Por lo tanto, la probabilidad acumulada de la distribución F es un desplazamiento ascendente (o a la derecha) de la distribución G.

Gráficamente, con distribución de tipo discreto:



Vemos que: G coincide con F, o bien G es superior para todos los niveles de rendimiento, para cualquier probabilidad acumulada, por lo tanto F es preferible a G, (FD_1G) ya que $F(x) \leq G(x)$.



Vemos que

$$\begin{array}{ll} F\, D_1\, G \text{ ya que } F(x) < G(x) & \forall\, x \\ C\, D_1\, G \text{ ya que } C(x) < G(x) & \forall\, x \\ B\, D_1\, G \text{ ya que } B(x) < G(x) & \forall\, x \\ C\, D_1\, F \text{ ya que } C(x) \leq F(x) & \forall\, x \end{array}$$

La distribución de *B* corta a la *C* y a la *F*, no podemos aplicar el DEP.

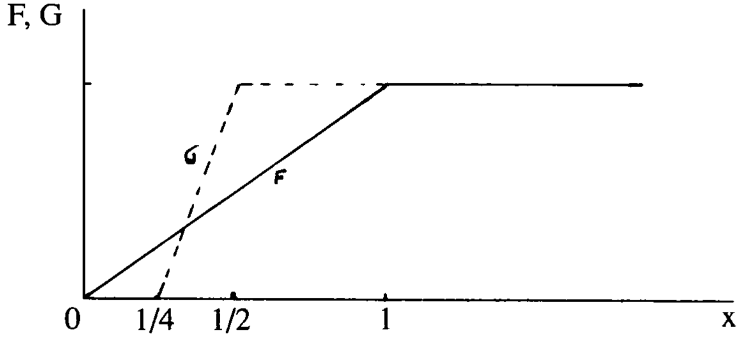
Como ya se ha indicado, siempre que dos distribuciones acumuladas se corten, una no puede dominar a la otra: es decir, uno no puede encontrar una función de utilidad *u* donde $\Delta Eu > 0$ y otra función *v* donde $\Delta Ev < 0$ (siendo u y v no decrecientes).

Este criterio, nos permite obtener un resultado importante con respecto al comportamiento de las medias de las distribuciones asociadas a las opciones. En efecto, como la función $u(x) = x$ es admisible en U_1 (notemos que lo es en $U_3 \subset U_2$), tendremos que si *XDY* en U_1 implica $E_F(x) \geq E_G(x)$, esto es $E(X) \geq E(Y)$. Por tanto, la media de *X* mayor o igual a la de *Y* es una condición necesaria de dominio. Pero la exigencia de una media mayor de *X* como condición necesaria para el dominio, claramente no es suficiente como se puede comprobar, por ejemplo, con dos distribuciones uniformes:

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad 0 < x < 1; \quad \text{y} \quad f(x) = 0, \quad \text{para} \quad x \leq 0;\, x \geq 1$$

$$g(y) = \frac{1}{4} \quad \text{si} \quad \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\ ; \text{ y } g(y) = 0, \text{ para } \ y \leq \frac{1}{4}\ ; y \geq \frac{1}{2}$$

Vemos que $E(X) = 1/2 > 3/8 = E(Y)$, y sin embargo no hay dominio de primer orden, pues las dos funciones de distribución se cortan:



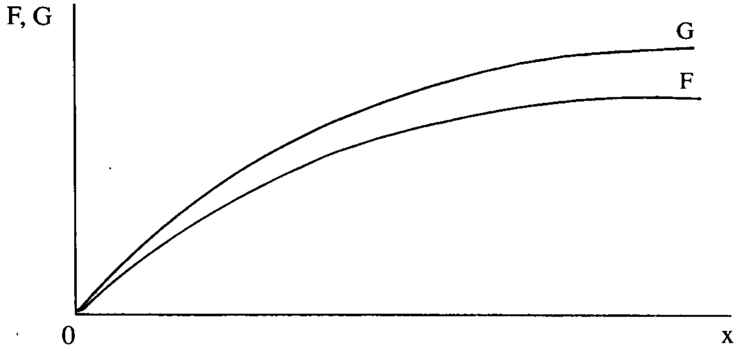
Pero hay que hacer constar, que en algunos tipos especiales de distribuciones, la condición de dominio, es equivalente a la relación $E(X) > E(Y)$, como por ejemplo, puede comprobarse si las opciones se distribuyen según leyes exponenciales de distinto parámetro.

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \in [0, +\infty)$$

$$G(x) = 1 - e^{-\mu x} \qquad x \in [0, +\infty)$$

$$F(x) \leq G(x) \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} \leq 1 - e^{-\mu x} \Leftrightarrow - e^{-\lambda x} \leq - e^{-\mu x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \leq \mu \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow E(Y) \leq E(X)$$



Siempre que F esté por debajo de G, estamos ante el dominio estocástico de primer orden (FD_1G) y los individuos que prefieran tener más a menos dinero, elegirán la opción F a la G.

En el siguiente apartado, permitiremos que bajo determinadas condiciones las funciones de distribución se corten, para considerar el dominio estocástico de segundo orden.

4. DOMINIO ESTOCASTICO DE SEGUNDO ORDEN (DES)

Consideramos, ahora que las funciones de utilidad pertenecen a un subconjunto propio de U_1, el conjunto U_2, de funciones de utilidad no decrecientes y cóncavas. La relación binaria establecida en el DEP se mantiene, pero ahora nos referimos exclusivamente al conjunto U_2.

Si un individuo posee una función de utilidad del conjunto U_2, posee aversión al riesgo, ya que las funciones del conjunto U_2 son cóncavas.

Establezcamos, ahora, el dominio estocástico de segundo orden, caracterizándolo de nuevo por las funciones de distribución.

TEOREMA II

Una condición necesaria y suficiente para F domine a G en segundo orden es que se verifique:

$$\int_{-\infty}^{x} [G(t) - F(t)]\, dt \geq 0 \qquad \forall\, x$$

y la desigualdad se verifique en estricto para al menos un x_o.

Esto es, que el área acumulada debajo de G, no puede ser menor que el área acumulada debajo de F, para cualquier valor real de x (donde F y G son distintas). Entonces la opción F es preferida a la opción G según el DES.

Antes de abordar la demostración notemos que el dominio, ahora, se está estableciendo sobre U_2 subconjunto porpio de U_1, esto es, estamos en un conjunto más restrictivo de funciones de utilidad y el concepto es más amplio. En efecto, si hay dominio de primer orden, lo hay de segundo orden, pero la recíproca no tiene por que ser cierta.

Para demostrar la condición necesaria, razonemos por el absurdo y suponemos que existiendo dominio estocástico en U_2 de F sobre G, existe un número real x_o para el cual no se verifica el DES, es decir:

$$\int_{-\infty}^{x_o} [G(t) - F(t)]\, dt < 0$$

Ahora podemos construir una función de utilidad específica entorno a x_o:

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq x_o \\ x_o & \text{si} \quad x > x_o \end{cases}$$

esta función es no decreciente y cóncava y en ella la diferencia de utilidades esperadas

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, d[G(x) - F(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} [G(x) - F(x)]\, u'(x)\, dx$$

es igual a:

$$\int_{-\infty}^{x_o} [G(x) - F(x)]\, dx$$

que según el razonamiento por el absurdo, es negativo, lo que es contradictorio con el comportamiento de la diferencia de las utilidades esperadas; por tanto:

$$\int_{-\infty}^{x} [G(t) - F(t)]\, dt \geq 0 \qquad \forall\, x$$

Para demostrar, la segunda parte de la condición necesaria, volvemos a razonar por el absurdo y supongamos:

$$\int_{-\infty}^{x_o} [G(x) - F(x)]\, dx = 0 \qquad \forall\, x_o$$

luego, de nuevo $G = F$, y la condición resulta ser claramante necesaria.

Para probar la condición suficiente, supongamos que la función de utilidad es de clase C^2, esto es, podemos caracterizar su concavidad por la derivada segunda: $u'' \leq 0$. Ahora Δ podemos expresarlo partiendo de la (3.2) e integrando por partes, y por no complicar en exceso la demostración tomamos el intervalo finito $[a,b]$.

$$\Delta = \int_a^b u'(x)\ [G(x) - F(x)]\ dx =$$

$$= u'(b) \int_a^b [G(x) - F(x)]\ dx + \int_a^b [-u''(x)] \int_a^x [G(t) - F(t)]\ dt\ dx$$

En efecto, como $u' \geq 0$ y $u'' \leq 0$, tendremos $u'(b) \geq 0$, $-u'' \geq 0$, y además:

$$\int_a^b [G(x) - F(x)]\ dx \quad \text{y} \quad \int_a^x [G(t) - F(t)]\ dt$$

son no negativas por hipótesis, luego $\Delta \geq 0$, para todo x.

Para probar la segunda parte de la condición suficiente, esto es, la existencia de una única función de utilidad que $\Delta > 0$, razonamos que el absurdo y por tanto, supongamos que para toda función de utilidad Δ es nulo. Denotemos:

$$H(x) = \int_a^x [G(t) - F(t)]\ dt$$

entonces, si $\Delta = 0$, tendremos:

$$u'(b) \cdot H(b) = 0$$

$$\int_a^b - u''(x)\ H(x)\ dx = 0$$

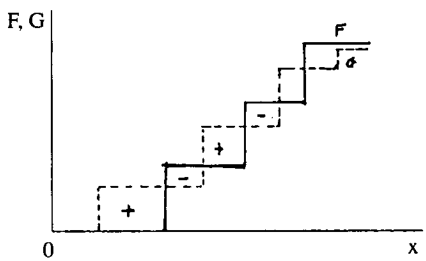
Ahora bien, como las funciones G y F son continuas por la derecha, lo será $H(x)$ y al ser no nulo (por hipótesis) en x_o, tendremos que $H(x)$ permanecerá positivo en un entorno $[x_o, x_o + \varepsilon)$; si en este intervalo consideramos una función estrictamente cóncava, tendremos:

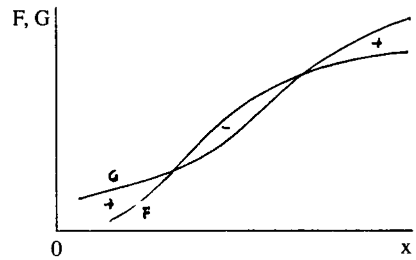
$$\int_a^b -u''(x)\ H(x)\ dx =$$

$$= \int_a^{x_o} -u''(x)\ H(x)\ dx + \int_{x_o}^{x_o+\varepsilon} - u''(x)\ H(x)\ dx + \int_{x_o+\varepsilon}^b - u''(x)\ H(x)\ dx$$

siendo el segundo sumando positivo, pues la función integrando lo es, luego, suponer $\Delta = 0$, es un absurdo.

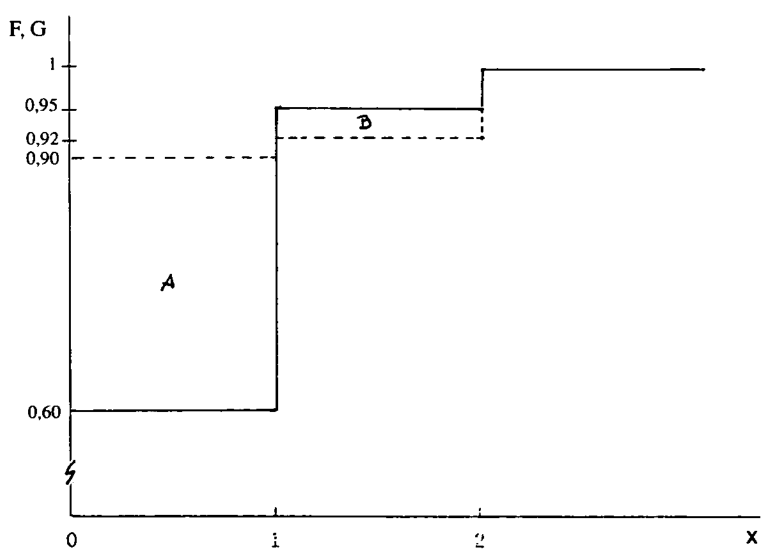
Establecidas las condiciones necesarias y suficientes, vemos que las dos funciones de distribución pueden cortarse muchas veces, con tal de que las áreas negativas acumuladas (donde $F > G$) por la izquierda de cualquier x, resulten más pequeñas, en valor absoluto, que las áreas positivas acumuladas (donde $F < G$).





Podemos comprobar, como ya anunciábamos que el dominio de primer orden, implica el dominio de segundo orden pero la recíproca no tiene por que ser cierta. En efecto, bastaría con un simple ejemplo:

X	$P(x)$	$F(x)$	Y	$P(y)$	$G(y)$
0	0,60	0,60	0	0,90	0,90
1	0,35	0,95	1	0,02	0,92
2	0,05	1	2	0,08	1



Claramente, en el gráfico, vemos que $A > B$, y por tanto:

$$\int_{-\infty}^{x} [G(t) - F(t)]\, dt > 0$$

luego hay dominio de segundo orden, pues:

$$\int_{0}^{1} [G(t) - F(t)]\, dt = 0{,}30$$

y

$$\int_{0}^{2} [G(t) - F(t)]\, dt = 0{,}27$$

pero no hay dominio de primer orden, ya que, la relación $F(x) \leq G(x)$ no se satisface para todo x, pues $F(1) > G(1)$, es decir $G(1) - F(1) = -0{,}03$.

Del ejemplo obtenemos también:

$$E(X) = 0{,}45 > 0{,}18 = E(Y)$$

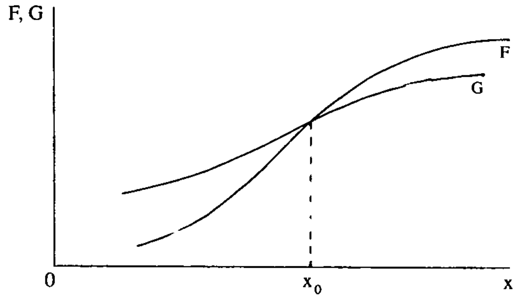
En relación a la media, notemos que como una función de utilidad lineal $u(t) = t$ es no decreciente y cóncava, la relación establecida en el dominio de primer orden, de nuevo, se mantendrá en el segundo orden; esto es, de nuevo, F domina a G en segundo orden implica $E(X) \geq E(Y)$.

Un caso particular del DES, se presenta, cuando las distribuciones se cortan una sóla vez.

TEOREMA III

Cuando las funciones de distribución se cortan una sola vez, y F corta a G desde abajo, es condición necesaria y suficiente para que F domine a G sobre U_2 que $E_F(x) \geq E_G(x)$, siempre que exista al menos un x_o tal que $F(x) \leq G(x)$, para cualquier $x \in (-\infty, x_o]$, $F(x) \geq G(x)$, para cualquier $x \in [x_o, \infty)$ y $F(x) < G(x)$ para al menos un $x_1 \in (-\infty, x_o)$.

Es decir, el área entre F y G y a la izquierda de la intersección (donde $F < G$) sobrepasa al área de la derecha (donde $F > G$).



Demostramos el teorema:

$$Si\ E_F \geq E_G \Rightarrow E_F - E_G = \int_{-\infty}^{\infty} xd[F(x) - G(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} [G(x) - F(x)]\ dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_o} [G(x) - F(x)]\ dx + \int_{x_o}^{\infty} [G(x) - F(x)]\ dx \geq 0$$

luego: si $x \leq x_o$:

$$\int_{-\infty}^{x} [G(t) - F(t)]\ dt \geq 0 \ \text{ pues } \ F < G$$

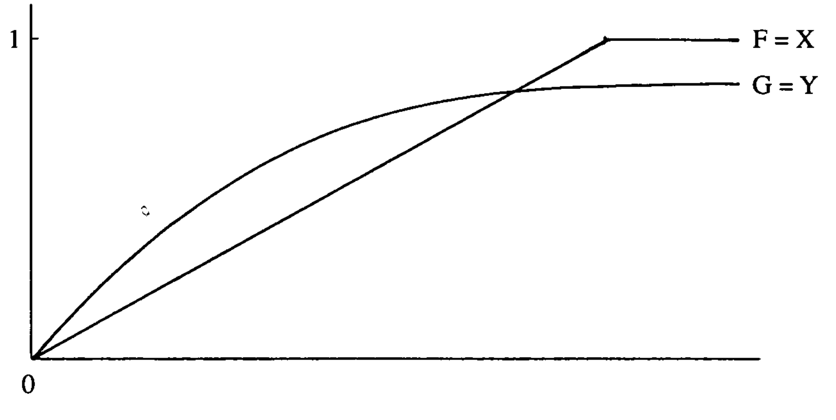
si $x > x_o$:

$$\int_{-\infty}^{x} [G(t) - F(t)]\ dt = \int_{-\infty}^{x_o} [G(t) - F(t)]\ dt + \int_{x_o}^{x} [G(t) - F(t)]\ dt$$

y siendo el segundo sumando negativo, en valor absoluto es más pequeño que:

$$\int_{-\infty}^{x_o} [G(t) - F(t)]\ dt \quad \text{ya que} \quad \int_{x_o}^{\infty} [F(t) - G(t)]\ dt \quad \text{lo era}$$

Este criterio, resulta extraordinariamente útil, pues, puede ahorrar cálculos laboriosos; pensemos en una distribución exponencial y uniforme



en donde para afirmar o no el dominio, se necesitarían amplios cálculos, ahora aplicando el criterio, tendríamos:

$$E(X) = \frac{a}{2} \qquad\qquad E(Y) = \frac{1}{\lambda}$$

entonces F domina a G sobre U_2, si:

$$E(X) \geq E(Y) \Leftrightarrow \frac{a}{2} \geq \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow a\lambda \geq 2$$

5. DOMINIO ESTOCASTICO DE TERCER ORDEN (DET)

Consideramos $U_3 \subset U_2 \subset U_1$, esto es, el conjunto de las funciones de utilidad no decrecientes cóncavas y con su tercera derivada no negativa. Este conjunto corresponderá a un individuo con aversión absoluta al riesgo decreciente.

En U_3, podemos establecer, de la misma forma que lo realizábamos en U_1 y U_2, el conjunto de dominio entre dos opciones de inversión con riesgo, cuantificadas por medio de sus funciones de distribución F y G.

TEOREMA IV

Es condición necesaria y suficiente para que F domine a G en U_3, que se verifique:

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{v} [G(t) - F(t)]\, dt\, dv \geq 0 \quad \forall\, x$$

y existiendo al menos un x, donde la desigualdad se verifique en estricto y además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(t) - F(t)]\, dt \geq 0$$

Para demostrar la condición suficiente, expresamos mediante integración por partes tres veces, la diferencia de utilidades esperadas, limitándonos de nuevo al intervalo finito $[a,b]$; tenemos:

$$\Delta = \int_a^b u(x)\, d[F(x) - G(x)] = \int_a^b [G(x) - F(x)]\, u'(x)\, dx =$$

$$= u'(b) \int_a^b [G(t) - F(t)]\, dt - \int_a^b u''(x) \int_a^x [G(t) - F(t)]\, dt\, dx =$$

$$= u'(b) \int_a^b [G(t) - F(t)]\, dt - u''(b) \int_a^b \int_a^x [G(t) - F(t)]\, dt\, dx +$$

$$+ \int_a^b u'''(x) \int_a^x \int_a^v [G(t) - F(t)]\, dv\, dt\, dx$$

si definimos:

$$H_1(x) = \int_a^x [G(t) - F(t)]\, dt$$

y

$$H_2(x) = \int_a^x H_1(t)\, dt$$

la expresión anterior, puede alternativamente expresarse:

$$\Delta = u'(b)\, H_1(b) - u''(b)\, H_2(b) + \int_a^b u'''(x)\, H_2(x)\, dx$$

que es no negativo, debido a las hipótesis establecidas.

Para completar la condición suficiente, falta por demostrar la existencia de una función de utilidad de U_3 que en ella se verifique $\Delta > 0$. Si razonamos por reducción al absurdo y suponemos que $\Delta = 0$, ya que hemos demostrado que $\Delta \geq 0$, tendremos que al ser las funciones de distribución continuas por la derecha, lo serán $H_1(x)$ y $H_2(x)$. Como $H_2(x) > 0$, este signo lo mantendrá en un intervalo a la derecha de x_o : $[x_o, x_o + \varepsilon]$. Ahora bastará considerar una función de utilidad con derivada tercera nula, fuera del intervalo y en él, estrictamente positiva. Entonces $\Delta > 0$, ya que el resto de los términos son no negativos.

Para demostrar la condición necesaria, razonamos por el absurdo y suponiendo que $\Delta \geq 0$ para toda función de utilidad y existiendo una donde $\Delta > 0$, no se verifica,

$$\exists\, x_o \quad \Big| \quad \begin{array}{ll} H_2(x) \geq 0 & \forall\, x \\ H_2(x_o) > 0 & \\ H_1(b) \geq 0 & \end{array}$$

por tanto, se verificará:

$$\exists\, x_1 \quad \Big| \quad H_2(x_1) < 0 \quad \text{y/o} \quad H_1(b) < 0$$

En este caso de dominio estocástico (DET), creemos conveniente hacer mención a Arrow-Pratt (5), que definen el índice de aversión absoluta al riesgo como:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

que es una función no creciente de x, esto es $r'(x) \leq 0$ ya que:

$$r'(x) = \frac{-u'''(x)\,u'(x) + (u''(x))^2}{(u'(x))^2}$$

el requisito de que $r'(x) \leq 0$ es equivalente a:

$$-u'''(x)\,u'(x) + (u''(x))^2 \leq 0$$

Si se supone que $u'(x) \geq 0$, entonces el requisito de que $r'(x) \leq 0$ implica que $u'''(x) \geq 0$.

Téngase encuenta que es necesario que $u''(x) < 0$ para que $r(x)$ sea no negativo. También, téngase en cuenta que $u'''(x) \geq 0$ es sólo una condición necesaria para que $r'(x) \leq 0$, se concluye que U_3 contiene funciones de utilidad donde la aversión absoluta al riesgo puede ser de carácter decreciente o creciente, es decir que $r'(x) \leq 0$ y $r'(x) > 0$.

Hemos demostrado las reglas de decisión para $U_i\,(i = 1,2,3)$ por el mismo sistema. Recalquemos que las reglas dadas en este trabajo son óptimas, esto es como decir que $F\ D\ G$ por la regla apropiada $<=>$ $E_F u(x) \geq E_G u(x)$ para todo $u \in U_i$ (para el i apropiado).

6. DOMINIO ESTOCASTICO POR EL METODO CUANTIL. PLANTEAMIENTO

Los criterios de dominio estocásticos revisados en apartados anteriores, pueden volver a enunciarse introduciendo un nuevo concepto, ligado a las funciones de distribución de las inversiones.

Este nuevo procedimiento, se conoce como método cuantil, y pasamos, ahora, a su definición.

Decimos que $Q_F(p)$ es el cuantil de orden p, $0 \leq p \leq 1$, de la distribución F asociada a una inversión con riesgo X, si:

$$P(X \leq Q_F(p)) = p = F_X(Q_F(p))$$

Desde luego, el cuantil está perfectamente definido si F admite inversa, ya que en este caso:

$$Q_F(p) = F^{-1}(p)$$

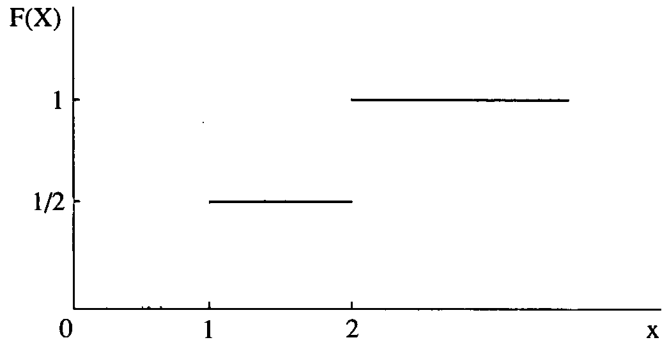
Entonces, dada cualquier probabilidad p, existirá un único valor $Q_F(p)$.

Ahora bien, si trabajamos con funciones escalonadas, la definición de cuantil necesita una mayor atención. Veámoslo, con un sencillo ejemplo:

Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

cuya representación gráfica sería:



si $p = 0$, $p = \frac{1}{2}$ ó $p = 1$ existe más de un cuantil, en ese caso, definimos el cuantil como el mínimo valor para el cual la definición se satisface.

Si $p \in (0, \frac{1}{2})$, $p \in (\frac{1}{2}, 1)$, no tenemos ningún valor para el cual el cuantil exista. En este caso, le definiremos como el máximo valor, donde exista masa.

De acuerdo con estos convenios, la definición del cuantil, para esta distribución será:

$$Q_F(p) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = 0 \\ 1 & \text{si} \quad p \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2 & \text{si} \quad p \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Los cuantiles verifican las siguientes propiedades:

a) Si a es real y positivo, entonces el cuantil de la variable aleatoria $Y = aX$, es $aQ_F(p)$, donde $Q_F(p)$ es el cuantil de orden p asociado a la inversión con riesgo X, con función de distribución F.

En efecto: $P(X) \leq Q_F(p)) = p$, por definición, entonces si, multiplicamos por $a > 0$, el suceso no se modifica y tenemos:

$$P(aX \leq aQ_F)) = P(Y \leq aQ_F(p)) = p$$

b) Si $Q_F(p)$ es el cuantil de X, entoces $[k + aQ_F(p)]$ es el cuantil de la variable aleatoria $Y = aX + k$, con $a > 0$.

La demostración es análoga a la anterior: $P(X \leq Q_F(p)) = p$, tenemos: $P[(k + aX) \leq (k + aQ_F(p))] = P[Y \leq (k + aQ_F(p))] = p$.

c) En cuanto a la suma de las variables aleatorias, no se puede garantizar la suma de los cuantiles.

Sean X_1, X_2 dos variables aleatorias con funciones de distribución F_1 y F_2 respectivamente. Entonces, la función de distribución de la variable aleatoria $Y = X_1 + X_2$, suponiendo la independencia de X_1 y X_2 será:

$$P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{t-x} f_1(t) f_2(z)\, dz\, dt = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\, F_2(t-x)\, dt$$

que en particular para distribuciones exponenciales, será:

$$F_{X_1+X_2}(X) = 1 - e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\, e^{-\lambda_1 x} =$$

$$= 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - e^{-\lambda_1 x}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \cdot (1 - e^{-\lambda_1 x})$$

El cuantil de orden p, será aquel valor:

$$1 - e^{-\lambda_1 x} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2}\, p$$

$$1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2}\, p = e^{-\lambda_1 x} \Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda_1} \ln\left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2}\, p\right)$$

El cuantil asociado a X_1 será:

$$F_{X_1}(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x} = p$$

$$1 - p = e^{-\lambda_1 x} \Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda_1} \ln(1-p)$$

El cuantil asociado a X_2 será:

$$x = -\frac{1}{\lambda_2} \ln(1-p)$$

cuya suma no coincide con el cuantil de $X_1 + X_2$.

d) Si Q es el cuantil de orden p de X_1 y de orden q de X_2, entonces Q es el cuantil de orden $p.q$ de la variable aleatoria $Y = máx\,(X_1, X_2)$ supuesta la independencia de estas variables.

Este hecho es debido a que la función de distribución de $Y = máx\,(X_1, X_2)$ es el producto de las funciones de distribución de X_1 y X_2. Tenemos:

$$F_Y(Q) = F_{X_1} \cdot F_{X_2}(Q) = p \cdot q$$

e) Análogamente al caso anterior, puede enunciarse una propiedad relativa a la variable aleatoria $Y = mín\ (X_1, X_2)$ supuesta la independencia de estas variables.

Si Q es el cuantil de orden p de X_1 y el cuantil de orden q de X_2, entonces $[p + q - pq]$ es el orden del cuantil Q de $Y = mín\ (X_1, X_2)$. La demostración resulta inmediata, sin más que tener en cuenta que:

$$F_Y(Q) = 1 - [1 - F_{X_1}(Q)] \cdot [1 - F_{X_2}(Q)] = p + q - p \cdot q$$

7. EQUIVALENCIA CON EL METODO CONVENCIONAL DE DOMINIO

Volvamos, ahora, a considerar el concepto de dominio estocástico, desde el punto de vista cuantil.

Los conceptos de dominio estocástico de primero, segundo y tercer orden, pueden volverse a enunciar desde el punto de vista cuantil, estableciendo las correspondientes condiciones necesarias y suficientes.

Proposición

Es condición necesaria y suficiente para que X domine a Y para todas las funciones de utilidad no decrecientes, que se verifique:

$$Q_F(p) \geq Q_G(p)$$

donde F y G son las funciones de distribución asociadas a X e Y respectivamente, y al menos se verifique la desigualdad anterior en estricto para un orden p_o.

La demostración, se obtiene de forma inmediata, sin más que tener en cuenta que si F domina a G en primer orden, tendremos:

$$\begin{array}{ll} F(x) \leq G(x) & \text{para cualquier x.} \\ \text{existe} \quad x_o & \text{tal que} \quad F(x_o) < G(x_o). \end{array}$$

Notemos que, como para el caso de dominio por el criterio convencional, la condición aquí es que F no estará por encima de G en cualquier lugar, y al menos en un punto, F estará estrictamente por debajo de G.

Los dominios de segundo y tercer orden, en términos cuantiles pueden enunciarse de análoga forma y las demostracciones surgen, sin más que tener en cuenta las condiciones necesarias y suficientes establecidas en los apartados anteriores de este trabajo.

Así, $F\ D\ G$ en U_2 si y sólo si:

$$\int_0^p [Q_F(t) - Q_G(t)]\, dt$$

es no negativa para todo p, $0 \leq p \leq 1$ y existiendo un p_o, tal que la expresión anterior es positiva.

De acuerdo con el criterio convencional, $F\ D_2\ G$ si y sólo si el área acumulada debajo de F es más pequeña que el área acumulada debajo de G para cada valor de x, y conforme a la aproximación cuantil $F\ D_2\ G$, si y sólo si el área acumulada entre F y el eje ordenadas es más grande que el área acumulada entre G y el eje de ordenadas para cada valor de p.

En el conjunto de las funciones de utilidad no decrecientes, cóncavas y con utilidades marginales convexas $(u''' \geq 0)$ tendremos que FDG si y sólo si:

$$\int_0^p \int_0^t [Q_F(z) - Q_G(z)]\, dz\, dt \geq 0$$

y de nuevo, con un p_0 en estricto y además:

$$\int_0^1 [Q_F(t) - Q_G(t)]\, dt \geq 0$$

análoga condición a la establecida con función de distribución.

CUADRO RESUMEN

DE	Criterio convencional	Criterio cuantil
DEP	$F(x) \leq G(x)\ \ \forall x$	$Q_F(p) \geq Q_G(p)\ \ \forall p$
DES	$\int_{-\infty}^{x} [G(t) - F(t)]\, dt \geq 0\ \ \forall x$	$\int_0^p [Q_F(t) - Q_G(t)]\, dt \geq 0\ \ \forall p$
DET	$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{v} [G(t) - F(t)]\, dtdv \geq 0\ \ \forall x$	$\int_0^p \int_0^t [Q_F(z) - Q_G(z)]\, dzdt \geq 0\ \ \forall p$
	$y \int_{-\infty}^{\infty} [G(t) - F(t)]\, dt > 0$	$y \int_0^1 [Q_F(t) - Q_G(t)]\, dt > 0$

con al menos una desigualdad estricta en todos los casos.

8. CONCLUSIONES

En este trabajo, hemos analizado las reglas de dominio estocástico, considerando tres situaciones del inversor ante el riesgo.

Se han estudiado, las reglas de dominio estocástico cuando la inversión se realiza sólo en activos con riesgo (DE), para caso de un período y para distribuciones de probabilidad generales, aunque en ciertas ocasiones se han considerado algunas distribuciones específicas, al objeto de realizar comparaciones.

Se consideran las reglas de dominio ante dos alternativas u opciones de inversión, basándonos en tres conjuntos de funciones de utilidad, que recogen otras tantas acepciones de riesgo.

Demostradas las condiciones de necesidad y suficiencia de las reglas de dominio en los tres órdenes, del propio enfoque y con respecto al comportamiento de las medias de las distribuciones asociadas a las opciones, sacamos la conclusión, de que es condición necesaria para el dominio, que la media de la opción que domina, tiene que ser mayor o igual a la media de la otra opción; pero esta exigencia de mayor media no es suficiente para el dominio, como se ha demostrado, aunque en algunos tipos especiales de distribuciones la condición del DEP, es equivalente a la exigencia de mayor media.

En el dominio de segundo orden (DES), y como caso particular, si las distribuciones se cortan una sola vez, y dicho corte es efectuado desde abajo hacia arriba de la función F sobre la función G, la condición necesaria y suficiente para que F domine a G en U, es que la media de X, sea mayor o igual a la media de Y.

Las reglas de selección bajo las hipótesis correspondientes a los tres órdenes de dominio, se han establecido por el mismo sistema, demostrando que son de eficiencia óptima, esto es como decir que si F domina a G por la regla apropiada, existe una implicación recíproca, tal que la utilidad esperada de F tiene que ser mayor o igual a la utilidad esperada de G, para todo $u \in U_i \, (i = 1,2,3)$.

Los criterios, son transitivos e independientes de los gustos y de la riqueza del individuo que hemos supuesto constante, aparte de su actitud ante el riesgo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Arrow, K. J.: *Theory of risk aversion: Essays in the theory of risk bearing*. Markham (1971), Chicago.
2. Hadra, J. - Russell, W. R.: «Rules for ordering uncertain prospects». *American Economic Review*, 59 (1969), pp. 25-34.
3. Hanoch, G. - Levy, H.: «The efficiency analysis of choices involving risk». *Review of Economic Studies*, 36 (1969), pp. 35-46.
4. Levy, H. - Paroush, J.: «Toward multivariate efficiency critera». *Journal of Economic Theory*, 7 (1974), pp. 125-142.
5. López Cachero, M.: *Análisis y adopción de decisiones*. Pirámide. Madrid 1989, pp. 356-375.
6. Pratt, J. W.: «Risk aversion in the small and in the large». *Econometrica*, 32 (1964),pp. 122-136.
7. Rothschild, M. - Stiglitz, J. R.: «Increasing risk: I. A definition». *Journal of Economic Theory*, 2 (1970), pp. 225-243.

8. Tesfatsion, L.: «Stochastic dominance and the maximization of expected utility». *Review of Economic Studies*, 48 (1976), pp. 301-315.
9. Whitmore, G. A.: «Third order stochastic dominace». *American Economic Review*, 50 (1970), pp. 457-459.