GENERALIZACION DEL DOMINIO ESTOCASTICO COMO CRITERIO DE SELECCION DE INVERSIONES

Julio G. Villalón

RESUMEN.—A partir de 1960 se han realizado bastantes estudios relativos al fundamento del análisis de la eficiencia de las decisiones financieras basadas en el Dominio Estocástico y se han aplicado principalmente a la selección de cartera. En este trabajo, presentamos y demostramos los tres criterios de decisión básicos, de Primero, Segundo y Tercer Orden respectivamente, basándonos en las hipótesis de que las familias de curvas que consideramos son una, dos y tres veces derivables. Finalmente, aportamos la generalización de estos tres criterios al caso del llamado Dominio Estocástico de Orden N(DEN), basándonos en la existencia de las N primeras derivadas de la familia de funciones de utilidad consideradas.

1. Introducción

En general, se suele suponer que los inversores intentan maximizar la utilidad esperada (esperanza matemática) de los rendimientos de sus carteras de inversiones. El modelo tradicional de Markowitz, supone que la utilidad esperada se distribuye según una distribución normal y, por tanto, medible en función de medias-varianzas (desviaciones típicas). Esta solución, admite las hipótesis de que los inversores tratan de maximizar sus utilidades esperadas, prefieren siempre disponer más que menos, son adversos al riesgo y, o bien, los rendimientos de las expectativas de inversión están normalmente distribuidas o las funciones de utilidad son cuadráticas.

Ahora bien, existen otros modelos asociados al problema de la elección de cartera con hipótesis menos rigurosas respecto al fundamento de la elección de los inversores, forma de la función de utilidad y/o forma de la distribución asociada a los rendimientos de las opciones de inversión. Por ejemplo, el criterio del rendimiento geométrico; los modelos denominados de «primera seguridad», según el énfasis que cada uno de los criterios asocie a la limitación del riesgo de posibles resultados adversos; criterio de análisis en términos de las características de la distribución del rendimiento y criterio del «Domminio Estocástico», al que vamos a dedicar este trabajo, estableciendo una generalización de los resultados clásicos.

La forma más general del «Dominio Estocástico», no hace hipótesis respecto a la forma de la distribución de probabilidad de los rendimientos de las inversiones. Además, cuando empleamos el dominio estocástico, no suponemos la forma específica de las funciones de utilidad del inversor, sino que definimos conjuntos eficientes bajo hipótesis respecto a las características generales de las funciones de utilidad del inversor. Estas características son consistentes con todas las familias de funciones de utilidad.

Clásicamente se vienen considerando tres hipótesis cada vez más rigurosas con respecto al comportamiento del inversor, las que conducen a los llamados dominio estocástico de primero, segundo y tercer orden. El Dominio Estocástico de Primer Orden (DEP) supone que un inversor prefiere más que menos. El Dominio Estocástico de Segundo orden (DES), supone, además de que los inversores prefieren más que menos, que son adversos al riesgo y el Dominio Estocástico de Tercer Orden (DET), añade a las dos hipótesis del (DES), la hipótesis de que los inversores tienen aversión al riesgo absoluto decreciente (la tercera derivada de la utilidad, sea positiva, condición necesaria para que la aversión al riesgo absoluta sea decreciente).

Asociado a cada orden de Domino Estocástico, existe un Teorema que permite al inversor seleccionar las posibles inversiones a considerar.

2. Dominio Estocástico de Primer Orden (DEP)

Consideradas dos opciones de inversión A y B, representadas por las distribuciones del rendimiento neto $\tilde{r}$. La opción A es preferible a la opción B, si y solamente si,

$$E_A U(r) > E_B U(r)$$

para todas las funciones de utilidad que pertenecen a la familia de las funciones no-decrecientes. Si la utilidad esperada de la opción A es mayor que la de la opción B para todos los inversores independientemente de sus aptitudes respecto al riesgo, podemos concluir que ningún inversor cuya función de utilidad está incluida en la familia de las funciones no-decrecientes elegirá la opción B. En tal caso, se dice que la opción A denomina a la opción B.

TEOREMA 1

Dadas dos funciones de distribución A y B asociadas a dos opciones de inversión, la opción A será preferible a la segunda opción B según el DEP, independientemente de la concavidad o convexidad de la función utilidad no-decreciente, si $A(r) \leqslant B(r)$, para todo r, con la condición de que al menos para algún valor de r ($r=r_0$) se verifica que la condición $A(r_0) < B(r_0)$, estrictamente.

La denominación de Dominio Estocástico de Primer Orden (DEP), es debido a que se hace consideración de una sola hipótesis de primer orden respecto a las preferencias de los inversores, que $U'(r) \geqslant 0$ (utilidad no-decreciente).

Fig. 1: Campo discreto

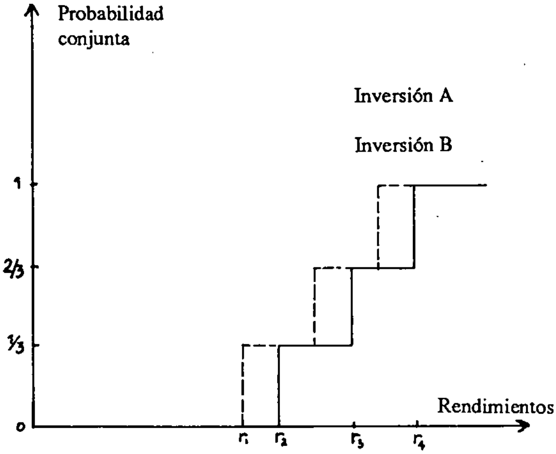
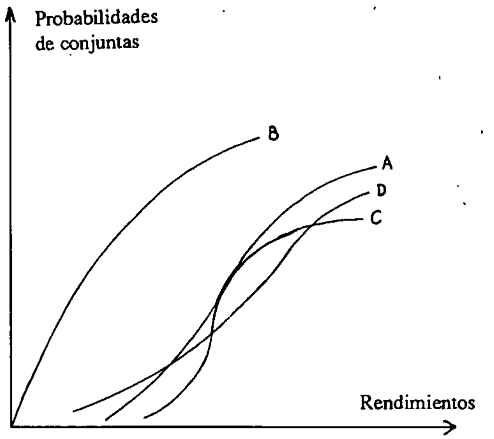


Fig. 2: Campo continuo



Teniendo presente que la probabilidad conjunta de un determinado rendimiento es la verosimilitud de obtener igual o menor rendimiento. En la Fig. 1, relativa al campo discreto, vemos que B coincide con A, o bien, A es superior para todos los niveles de rendimiento para cualquier probabilidad conjunta, por lo que A es preferible a la Be. En la Fig. 2, relativa al campo continuo, podemos decir que la opción A domina a la opción B, puesto que toda la distribución conjunta de la inversión A se encuentra a la derecha de la B, es decir, $F_A(r) \leqslant F_B(r)$. Análogamente las opciones C y D, son también preferibles a la opción B, puesto que $F_C(r) \leqslant F_B(r)$ y $F_D(r) \leqslant F_B(r)$ para todos los valores de r. También la opción C es preferible a la opción A. La distribución de la opción D corta a la de C y a la de A, de modo que no podemos aplicar al DEP.

A continuación vamos a demostrar el Teorema de DEP que, de forma concreta, se podría expresar así:

A Domina B($A \leqslant B$) si se verifican las siguientes condiciones:

1. El inversor es insaciable, $U'(r) > 0$ y
2. $A(r) \leqslant B(r)$, para todo r y $A(r) < B(r)$ para algún valor de r, donde A(r) y B(r)

son las funciones de distribución conjuntas de A y B respectivamente.
Supongamos que los rendimientos están acotados par a y b, es decir, $a \leqslant r \leqslant b$. Entonces, las utilidades esperadas de las opciones A y B, vienen dadas por:

$$E_A U(r) = \int_a^b U(r)\, dA(r) \qquad \text{y} \qquad E_B U(r) = \int_a^b U(r)\, dB(r)$$

Denotando por Δ la diferencia entre las utilidades esperadas de las dos opciones tendremos

$$\Delta \equiv E_A R(r) - E_B U(r) = \int_a^b U(r)\, d[A(r) - B(r)] \tag{1}$$

Para probar que la condición de primer orden impuesta es suficiente, integremos por partes en la (1):

$$\Delta = U(r) \cdot [A(r) - B(r)]_a^b + \int_a^b U'(r)[A(r) - B(r)]\, dr \tag{2}$$

Puesto que A(b) - B(b) = 1 - 1 = 0 y A(a) = B(a) = 0 tenemos:

$$\Delta = \int_a^b U'(r) \cdot [B(r) - A(r)]dr \tag{3}$$

Por tanto, si $A(r) \leq B(r)$ para todo r, $U'(r) \cdot [B(r) - A(r)] > 0$, lo cual implica que $\Delta \geq 0$, es decir, $E_AU(r) \geq E_BU(r)$ para toda la función de utilidad no-decreciente $[U'(r) \geq 0]$.

Para probar que la condición impuesta de primer orden es también necesaria, vamos a proceder por reducción al absurdo, suponiendo que no se verificara. Entonces, demostramos que, al menos, un inversor prefiere la opción A a la B y, por tanto, la opción A no puede pertenecer al conjunto de las opciones ineficientes.

Supongamos que $A(r_0) > B(r_0)$, en un cierto valor r_0, (es decir, el criterio no se verifica). Demostraremos que hay al menos, un inversor que prefiere la opción A a la B. Para ello, construimos la función de utilidad que hace uso de la información de que $A(r_0) > B(r)$. Puesto que las distribuciones conjuntas son continuas por la derecha, habrá un cierto intervalo $(r_0, r_0, + \delta)$ en el que $A(r) > B(r)$. Entonces, elijamos un inversor con la siguiente función de utilidad:

$$U_0(r) = \begin{cases} r_0 & \text{para} \quad r < r_0 \\ r & \text{para} \quad r_0 \leq r \leq r_0 + \delta \\ r_0 + \delta & \text{para} \quad r > r_0 + \delta \end{cases}$$

Puesto que $U'(r) = 0$, fuera del intervalo $(r_0, r_0 + \delta)$ y $U'(r) = 1$ dentro del intervalo (de forma que incluye $U'(r) \geq 0$ como es exigido), tendremos:

$$\Delta = \int_{r_0}^{r_0+\delta} [B(x) - A(x)]\, U'(x)\, dx < 0$$

Por tanto, $\Delta < 0$, lo que implica que $E_AU_0(r) < E_BU_0(r)$y ello implicaría que el inversor considerado prefiere la opción B a la A.

La interpretación de este criterio es la siguiente: Teniendo en cuenta que A y B son distintas, A domina a la B, si y solamente si, para todo r, la probabilidad de obtener un valor igual o menor que r es no mayor con A que con B. Esto significa, que $1-A \geq 1-B$ es decir, que la probabilidad de obtener un resultado mayor que r no es menor con A que con B, para todo r. Por tanto, la distribución de probabilidad conjunta de A se encuentra a la derecha de la distribución de B.

3. Dominio Estocástico de Segundo Orden (DES)

Consideradas dos opciones de inversión A y B, diremos que la opción A domina a la opción $B(A \geq B)$ según DES para todos los decisores adversos al riesgo, si y solamente si, el área que se encuentra por debajo de la función de distribución asociada a la opción A es mayor que el área que se encuentra por debajo de la función de distribución asociada a la opción B para todos los valores del rendimiento r (pudiendo coincidir las áreas para algún valor de r), o lo que es lo mismo, si el área que se encuentra entre las dos funciones de distribución A y B se mantiene no negativa para todos los posibles valores de r.

Estas ideas se pueden formalizar en el siguiente:

TEOREMA 2

La opción A domina a la opción B según el DES, si se verifican las tres condiciones siguientes:

1. Los inversores prefieren más a menos,
2. Los inversores son adversos al riesgo, y
3. $\int_a^b A(r)\,dr \le \int_a^b B(r)\,dr$, para todo r, pudiendo verificarse la desigualdad de forma estricta para algún valor de r.

La denominación de Dominio Estocástico de segundo Orden (DES), es debido a que se hace consideración de la hipótesis de aversión al riesgo que es una hipótesis de segundo orden respecto a las preferencias de los inversores U' (r) > 0 y U'' (r) < 0.

Fig. 3: Campo continuo

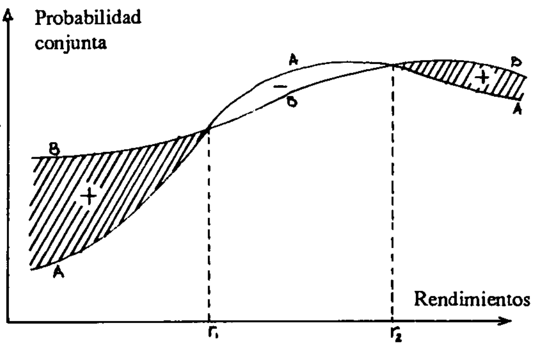
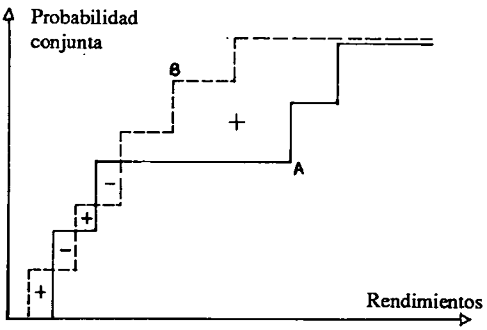


Fig. 4: Campo discreto



Denotando las áreas por + y por−. Se tiene que, si para todos los rendimientos las áreas con + no son menores que las áreas con − y para algunos rendimientos son mayores, como sucede en las Figs. 3 y 4, la opción A es preferible a la B($A \geqslant B$) según el (DES).

Para probar la suficiencia de la condición del Teorema 2, integremos por partes en la (3) y obtenemos:

$$\Delta = \int_a^b U'(r)[B(r) - A(r)]\,dr$$

$$= U'(r)\int_a^r [B(r) - A(r)]\,dt \Big]_a^b + \int_a^b \{- U''(r)\int_a^r [B(t) - A(t)]\,dt\}\,dr$$

o bien ,

$$\Delta = U'(r)\int_a^b [B(t)-A(r)]\,dt + \int_a^b \{ -U''(r)\int_a^r [B(t)-A(t)]\,dt\ \}\,dr \quad (4)$$

Ahora, teniendo en cuenta las condiciones exigidas en el Teorema 2, el primer sumando del segundo miembro es positivo (o al menos, no negativo). El segundo sumando también es no-negativo, puesto que -U" (r) ≥ 0 y la integral del paréntesis es positiva por el DES. Por tanto, $\Delta \geq 0$, es decir, $E_A U(r) \geq E_B U(r)$.

Para probar que la condición también es necesaria, supongamos que la regla del DES no se verificará para un cierto r_0. Por ejemplo,

$$\int_0^{r_0} [B(t)-A(t)] < 0 \quad (5)$$

Entonces, un inversor con una función de utilidad $U_0(r)$, dada de la siguiente forma:

$$U_0(r)=\begin{cases} r & \text{para } r \leq r_0 \\ r_0 & \text{para } r > r_0 \end{cases} \quad (6)$$

preferiría la opción B a la A, puesto que U'(r) = 1 para $r \leq r_0$ y cero en otro caso, de modo que

$$\Delta = \int_0^b [B(t)-A(t)]\,U'(t)\,dt = \int_0^{r_0} [B(t)-A(t)]\,dt < 0 \quad (7)$$

Por tanto, la B no puede incluirse en el conjunto de las opciones ineficientes.

Es decir, si el criterio del DES no se verifica, no se puede establecer ninguna preferencia, lo cual implica que la regla del DES es necesaria.

4. Dominio Estocático de Tercer Orden (DET)

Consideradas dos opciones de inversión A y B, diremos que la opción A es preferible a la B según el DET, para todos los inversores adversos al riesgo con aversión al riesgo absoluta decreciente[1], si y solamente si, se verifica la siguiente condición:

$$A_2(r) \leq B_2(r) \text{ para todo } r,$$

1. Tengamos presente que una función de utilidad presenta aversión al riesgo absoluto decreciente. Si A'(r) < 0, donde U'(r) y U"(r) son las derivadas de primer y segundo orden de la función de utilidad respectivamente, entonces

$$A(r) = -\frac{U''(r)}{U'(r)};\ A'(r) = +\left(\frac{U''(r)}{U'(r)}\right)^2 - \frac{U'''(r)}{U'(r)}$$

El primer término del segundo miembro de A'(r) es positivo por tratarse de un cuadrado. U'(r) > 0 por hipótesis. Entonces, para que el segundo término sea negativo es necesario que U"'(r) > 0. Observemos que U"'(r) > 0 es condición necesaria pero no suficiente para que A'(r) < 0.

pudiendo verificarse la desigualdad de forma estricta para al menos algún r y además $E_A(r) \geq E_B(r)$, donde

$$A_1(r) = \int_{-\infty}^{r} A(t)\,dt, \quad B_1(r) = \int_{-\infty}^{r} B(t)\,dt \tag{8}$$

$$A_2(r) = \int_{-\infty}^{r} A_1(t)dt \quad y \quad B_2(r) = \int_{-\infty}^{r} B_1(t)\,dt \tag{9}$$

Podríamos enunciar el siguiente:

TEOREMA 3

La opción de inversión A domina a la opción B según el DET si:

1. Los inversores prefieren más que menos $U'(r) > 0$
2. Los inversores son adversos al riesgo $U''(r) < 0$
3. La tercera derivada de la función de utilidad de los inversores es positiva, $U'''(r) > 0$.

La opción A domina a la B, si la utilidad esperada de A es mayor que la utilidad esperada de B.

En efecto, teniendo en cuenta la (4) e integrando por partes, el segundo sumando del segundo miembro, tendríamos:

$$\Delta = U'(r)\int_a^b [B(t) - A(t)]dt + U''(b)\int_a^b\int_a^r [A(t) - B(t)]dt\,dr$$
$$-\int U''(r)\,[A(t) - B(t)]dt\,dr \tag{10}$$

Observemos que en base a la hipótesis del Teorema, $\Delta > 0$.

5. Dominio Estocástico de Orden N (DEN)

El Dominio Estocástico de Orden N es una generalización que es aplicable a todas las funciones de utilidad cuyas derivadas sucesivas hasta la N-ésima, tienen signos alternativos: $U'(r) > 0$, $U''(r) < 0$, $U'''(r) > 0$,...

Por ejemplo, el Dominio Estocástico de Tercer Orden, hemos visto que se refiere a las carteras de inversores adversos al riesgo cuyas funciones de utilidad tienen la derivada tercera positiva. Esta familia de funciones contiene solamente las que se caracterizan por el hecho de que la aversión al riesgo es decreciente.

Para discutir los criterios de dominio estocástico de órdenes superiores, consideramos las integrales múltiples de funciones de distribución. Si la función de distribución está definida sobre un campo infinito o semi-infinito, entonces serían válidas las mismas condiciones que hemos obtenido en los apartados anteriores, siempre que estuvieran definidas las integrales de (11).

La $A_n(z)$, que definimos a continuación, existirá para una función de distribución, si y solamente si, existen los n primeros momentos de la variable aleatoria Z.

$$A(z) \equiv A_0(Z) \equiv \int_a^Z dA(r); \quad A_{n+1}(Z) \equiv \int_a^Z A_n(r)\,dr \tag{11}$$

La distribución A domina a la B según el Dominio Estocástico de orden N (DEN), si y solamente si:

$$A_{n-1}(Z) \leq B_{n-1}(Z) \quad \text{para todo } a \leq Z \leq b \tag{12}$$

$$A_k(B) \leq B_k(b) \quad \text{para } k = 1, 2, ..., n\text{-}2 \tag{13}$$

Además, los criterios de dominio estocástico de orden n, generan el conjunto completo de carteras óptimas, o bien, eficientes para todas las funciones de utilidad que satisfacen las condiciones:

$$(-1)^k U^k(Z) \leq 0, \text{ para todo } Z \text{ y } K = 1, 2, ..., n \tag{14}$$

Por otra parte, los criterios de Dominio estocástico anteriores, se pueden expresar en función de los momentos parciales de orden inferior μ_n de la variable aleatoria A.

Integrando por partes, podemos expresar los momentos parciales inferiores de la forma siguiente:

$$\mu_n(Z,A) \equiv \int_a^Z (Z-r)^n dF(r) = F(r)(Z-r)^n \Big|_a^Z + n\int_a^Z (Z-r)^{n-1} A(r)\,dr$$

$$= nA_1(r)(Z-r)^{n-1}\Big|_a^Z + n(n-1)\int_a^Z (Z-r)^{n-2} A1(r)\,dr \tag{15}$$

$$= n!\int_a^Z A_{n-1}(r)\,dr = n!\,A_n(Z)$$

En cada paso, el primer término se anula puesto que:

$$A_1(a) = 0 \quad y \quad (Z\text{-}Z)^i = 0$$

Por tanto, las (12) y (13), se pueden expresar de la forma:

$$\mu_{n-1}(Z;A) \leq \mu_{n-1}(Z;B), \qquad a \leq Z \leq b \tag{16}$$

$$\mu_k(b;A) \leq \mu_k(b;B), \qquad k = 1, 2, ..., n\text{-}2 \tag{17}$$

6. Conclusiones

Uno de los objetivos de este trabajo es el de establecer y generalizar un conjunto de criterios para ordenar las posibles opciones de inversión en ambiente de incertidumbre, es decir, especificar las condiciones que nos permitirán hacer predicciones respecto a las preferencias. La propiedad más importante de estos criterios es que no solamente son suficientes, sino también necesarios para las correspondientes clases de funciones de utilidad.

En un aspecto práctico, el decisor de inversiones en ambiente de incertidumbre debe considerar dos etapas:

a) el decisor elegirá el conjunto eficiente, independientemente de su criterio subjetivo y

b) elegirá la cartera óptima de entre las que constituyen el conjunto de las eficientes.

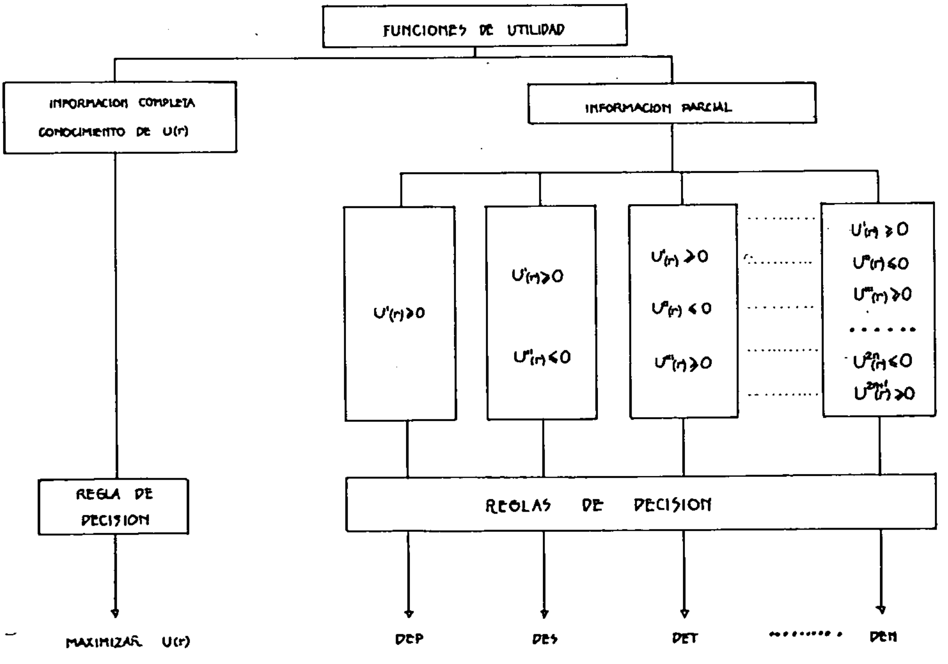
De tal forma que procediendo así, podremos asegurar que todos los decisores que pertenecen a una determinada clase elegirán del conjunto de opciones eficientes y, luego, cada decisor, de acuerdo con su criterio subjetivo elegirá, en cada caso, la opción óptima del conjunto de las eficientes, es decir, la que maximiza su utilidad esperada (esperanza matemática de la utilidad).

Después de establecer con detalle los criterios de Dominio Estocástico de Primer, Segundo y Tercer Orden, se generalizaron los resultados obtenidos para el criterio de Dominio Estocástico de orden N. De donde se pueden concluir las siguientes relaciones:

El conjunto de las opciones de inversión eficientes según un determinado criterio, va constituyendo un subconjunto de los correspondientes a los criterios de órdenes inferiores, es decir,

$$DEP \Rightarrow DES \Rightarrow DET \Rightarrow \ldots \Rightarrow DEN$$

Finalmente, recogemos esquemáticamente los resultados obtenidos:



Bibliografía

Ali, M.: «Stochastic Dominance and Portfolio Analysis». J. Financial Econom. Vol. 2 (1975), págs. 205-229.

Arzac, E. R. y Bawa, V. S.: «Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety-First Inverstors» J. Financial Econom. Vol. 4 (1977), págs. 227-288.

Bawa, V. S.: «Admisible Porfolios for All Individiuals». J. Finance. Vol. 31 (1976), págs.1169-1183.

Bawa, V. S.: «Stochastic Dominance and Discounted Cash Flow Analysis». Bell Laboratories Economic Discusion Paper 66 (October 1976).

Bawa, V. S.: «On Optimal Portfolio Selection Rules». Graduates School of Business, New York University (1977).

Bawa, V. S.; Elton, E. J. and Gruber, M. J.: «Simple Rules for optimal Porfolio Selection in Stable Paretian Markets». J. Finance. Vol. 34 (1979), págs. 1041-1047.

Fisburn, P. C.: «Stochastic Dominance and the Foundation of Mean-Variance Analysis» in Research in Finance. Vol. 2. Edited by Levy, H. (1980).

Huang, C. C.; Kira, D. and Vertinsky, I.: «Stochastic Dominance Rules for Multi-Attribute Utility Functions», Rev. Econom. Studies, Vol. 45 (1978), págs. 611-616.

Levy, H. and Kroll, Y.: «Stochastic Dominance: A Review and Analysis» in Research in Finance. Vol. II, Edited by Levy, H. (1980).

Tesfatsion, L.: «Stochastic Dominance and the Maximization of Expected Utility» Rev. Econom. Studies. Vol. 43 (1976), págs. 301-315.

Vickson, R. G.: «Stochastic Dominance for Decreasing Absolute Risk Aversion» J. Financial and Quantitative Anual. Vol, 10 (1975), págs. 799-811.

Vickson, R. G. and Altman, M.: «On the Relative Effectiveness of Stochastic Dominance Rules: Extension to Decreasingly Risk-Averse Utility Functions». J. Financial and Quantitative Anual. Vol. 12 (1977), págs. 73-84.