Lecturas Matemáticas
Volumen **41** (1) (2020), páginas 41-57
ISSN 0120-1980

Sobre el Teorema de Hake para funciones de varias variables

Hake's Theorem for functions of several variables

Edgar Torres-Teutle y Francisco J. Mendoza-Torres

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

Resumen. El Teorema de Hake es un resultado fundamental de la integral de Henstock-Kurzweil. Por medio de él sabemos que, para funciones reales de variable real, la integración propia e impropia coinciden. El objetivo de este artículo, basado en el trabajo de P. Maldowney y V. H. Skortsov [Math.Notes, 78:2 (2005), 228-233], es mostrar que no es posible generalizar dicho teorema para funciones reales de varias variables.

***Palabras clave*:** Teorema de Hake, integral de Henstock-Kurzweil, partición etiquetada, aureola δ-fina.

Abstract. Hake's Theorem is a fundamental result of the integral of Henstock-Kurzweil. Through it we know that, for real functions of real variable, the proper and improper integration coincide. The objective of this article, based on the work of P. Maldowney and V. H. Skortsov [Math.Notes, 78:2 (2005), 228-233], is to show that it is not possible to generalize this theorem for real functions of several variables.

***Key words*:** Hake's Theorem, Henstock-Kurzweil integral, tagged partition, δ-fine halo.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 26B35; Secondary 26C99, Third 26B99.

1. Introdución

La integral de Henstock-Kurzweil (H-K) fue definida a finales de los años 50's del siglo pasado por el matemático checo Jaroslav Kurzweil y el inglés Ralph Henstock. Una idea básica que motivo su construcción fue contar con una integral que generalizara el Teorema Fundamental del Cálculo, de tal forma que toda función derivada sea integrable y esto permitiera recuperar la función original. Sus creadores tuvieron motivos distintos para definir una integral con esa característica, lo hicieron cada quien por su lado y posteriormente se probó su coincidencia. Kurzweil estaba interesado en estudiar ecuaciones diferenciales generalizadas y su aplicación a otras ciencias. Mientras que los motivos de Henstock fueron más teóricos, desarrolló y sistematizó algunas de las ideas que, sin saberlo, Kurzweil ya había empleado, ver [6], [8] y [3]. Antes que ellos, los matemáticos franceses: Arnaud Denjoy (1912) y Oskar Perron (1914) habían construido integrales con la misma idea básica, también lo hicieron independientemente. Posteriormente se demostró que sus integrales eran equivalentes, por lo que actualmente se conoce como integral de Denjoy-Perron.

En la decada de los 80's del siglo pasado, en diferentes trabajos, R. Henstock, J. Kurzweil, P. Y. Lee y R. Gordon probaron que las integrales de Henstock-Kurzweil y Denjoy-Perron son equivalentes; ver [5], [4], [9], [10] y [2]. Sin embargo, un aspecto que ha favorecido el desarrollo teórico y creciente empleo de la integral H-K sobre la de Denjoy-Perron es que su definición se hace por medio de sumas de Riemann, lo que la hace más fácil de manejar. Como es usual en las integrales, la integral H-K es una transformación lineal sobre el espacio de funciones que son H-K integrables definidas sobre un conjunto determinado. Además, tiene propiedades similares a las de la integral de Lebesgue, por ejemplo, satisface versiones de los teoremas de la convergencia monótona y de la convergencia dominada, ver [1]. Debido a que, sobre intervalos en $\mathbb{R}$; toda función Lebesgue integrable es H-K integrable, los teoremas anteriores generalizan a los de convergencia de la integral de Lebesgue. Es importante mencionar que la integral H-K no es absoluta, esto es, existen funciones que son H-K integrables pero que su valor absoluto no lo es. Un ejemplo es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $sen(x)/x$ si $x \neq 0$ y 1 si $x = 0$, ver [1].

En 1921, el matemático alemán H. Hake probó un resultado fundamental de la integral de Denjoy-Perron [12], el cual en esencia nos dice que la integración impropia y propia, bajo esta integral, coinciden. Tomando en cuenta la equivalencia entre las integrales de Denjoy-Perron y de Henstock-Kurzweil, el Teorema de Hake para funciones reales definidas sobre $[-\infty, \infty]$ nos dice que: $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es H-K integrable, con integral* A, *si y sólo si* f *es H-K integrable sobre cualquier intervalo finito* $[a, b]$ *y*

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} (HK) \int_a^b f = A.$$

Existen versiones similares para funciones definidas sobre intervalos de la forma $[-\infty, a]$ o $[b, \infty]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Como la integral H-K también se define para funciones de varias variables [11] y la mayoría de los resultados que se tienen para funciones de una variable son válidos para funciones de varias variables; es natural preguntarnos sobre la validez de una extensión del Teorema de Hake al caso bidimensional, y en general para el n-dimensional. Esto es, nos planteamos lo siguiente:

Si $f : \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *es H-K integrable sobre cualquier* n*-celda:* $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, *con* $a_i < b_i$, *y satisface*

$$\lim_{\substack{a_i \to -\infty \\ b_i \to \infty}} (HK) \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f = A, \tag{1}$$

entonces: ***¿f es H-K integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^n$ y su valor es A?***

Trabajando sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$, el contenido principal de este artículo analiza la respuesta a esta pregunta y está basado en el artículo de P. Muldowney y V. Skvortsov [13].

2. Conceptos básicos y resultados principales

2.1. Integral de Henstock-Kurzweil en $\overline{\mathbb{R}}$

Recordemos que el sistema extendido de números reales $\overline{\mathbb{R}}$ consiste de $\mathbb{R}$ junto con $-\infty$ y ∞, es decir, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Se pueden extender algunas de las operaciones en $\mathbb{R}$, las básicas conciernen a la siguiente aritmética:

i) $0 \cdot (\pm\infty) = 0 = (\pm\infty) \cdot 0$.

ii) Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x + (\pm\infty) = \pm\infty$.

Mencionamos a continuación algunos conceptos básicos:

- Un intervalo cerrado I en $\overline{\mathbb{R}}$ puede ser el mismo $\overline{\mathbb{R}}$ o ser de la forma: $[a, b]$, con $a = -\infty$ y $b \in \mathbb{R}$, o $a \in \mathbb{R}$ y $b = \infty$, o a y b pertenecer a $\mathbb{R}$. En este último caso, diremos que el intervalo es finito.
- Los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ *no se sobreponen* si $(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$. Se dice que t es *etiqueta* del intervalo cerrado K si $t \in K$. Al par (K, t) se le llama *par asociado* en $\overline{\mathbb{R}}$.
- Una *partición etiquetada* de I es $P = \{(K, t)\}$ una colección finita de pares asociados en $\overline{\mathbb{R}}$, cuyos intervalos K no se sobreponen y

$$I = \bigcup \{K : (K, t) \in P\}.$$

- Una *medidora sobre* I es una función positiva definida sobre I.

Definición 1. Sean $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+2}$ una partición etiquetada de $\overline{\mathbb{R}}$, δ una medidora sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Se dice que P es δ-*fina* de $\overline{\mathbb{R}}$ si:

(1) $[x_0, x_1] \subseteq [-\infty, -\frac{1}{\delta(t_1)}]$, con $t_1 = -\infty$.

(2) $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$, para $i \in \{2, \ldots, n+1\}$.

(3) $[x_{n+1}, x_{n+2}] \subseteq [\frac{1}{\delta(t_{n+2})}, \infty]$, con $t_{n+2} = \infty$.

Sólo las particiones etiquetadas pueden ser δ-finas, así que de aquí en adelante al mencionar que una partición es δ-fina se está considerando que además es etiquetada. La definición anterior tiene su versión sobre intervalos. Una partición es δ-fina de $[a,\infty]$ con $a \in \mathbb{R}$, si cumple los incisos (1) y (2). La partición es δ-fina de $[-\infty,b]$ con $b \in \mathbb{R}$, si satisface los incisos (2) y (3). Para el intervalo $[a,b]$ con $a,b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$, una partición es δ-fina de $[a,b]$ si cumple el inciso (2).

Observemos que si P_1, P_2 y P_3 son particiones δ-finas de $[-\infty,a]$, $[a,b]$ y $[b,\infty]$, respectivamente, entonces $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ es una partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}$.
Sobre intervalos finitos en $\overline{\mathbb{R}}$ se cumple que para cualquier medidora δ siempre existe una partición δ-fina, ver teorema 1.4 de [1]. Veamos que este resultado se satisface para intervalos cerrados en general, finitos o infinitos.

Lema 1. ***(Lema de Cousin).*** *Sea I un intervalo cerrado en $\overline{\mathbb{R}}$. Si $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es una medidora, entonces existe una partición δ-fina de I.*

Demostración. Sabiendo que para intervalos finitos es válido el resultado, haremos sólo el caso infinito. Analicemos cuando $I = \overline{\mathbb{R}}$. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq -\frac{1}{\delta(-\infty)}$ y $\frac{1}{\delta(\infty)} \leq b$. Por el teorema 1.4 de [1], el intervalo $[a,b]$ tiene una partición δ-fina $\{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^n$ con $x_0 = a$ y $x_n = b$. Es claro que la partición $\{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^n \cup \{([-\infty,a],-\infty),([b,\infty],\infty)\}$ es δ-fina de I.
La prueba se concluye observando que para $I = [a,\infty]$ o $[-\infty,b]$ se puede realizar un proceso similar. □

La δ-finura de una partición P de $\overline{\mathbb{R}}$, obliga a que las etiquetas del primer y último intervalo sean $t_1 = -\infty$ y $t_{n+2} = \infty$. Estos intervalos tienen longitud infinita, lo cual causaría problemas al definir la suma de Riemann. Es por esto que dadas una función $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $P = \{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^{n+2}$ una partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}$, se establece la convención que $f(\pm\infty) := 0$. Por lo que $f(t_1)(x_1 - x_0) = 0$ y $f(t_{n+2})(x_{n+2} - x_{n+1}) = 0$.

Definición 2. Sean $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $P = \{(K,t)\}$ una partición etiquetada de I. La *suma de Riemann de f sobre* P se define como

$$S(f;P) = \sum_{\substack{(K,t)\in P \\ t\in\mathbb{R}}} f(t)|K|,$$

donde $|K|$ es la longitud del intervalo K.

Definición 3. Se dice que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función *Henstock-Kurzweil integrable sobre* I, si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe una medidora δ_ε sobre I tal que si P es una partición δ_ε-fina de I, entonces

$$|S(f;P) - A| < \varepsilon.$$

A será la integral de Henstock-Kurzweil de f, la cual será denotada como $(HK)\int f$.

2.2. Integral de Henstock-Kurzweil en $\overline{\mathbb{R}}^2$

Como es usual, el plano extendido se define como $\overline{\mathbb{R}}^2 = \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$. Los elementos de $\overline{\mathbb{R}}^2$ son de la forma $\overline{x} = (x_1, x_2)$, con $x_l \in \overline{\mathbb{R}}$ para $l = 1, 2$. Un *rectángulo* en $\overline{\mathbb{R}}^2$es de la forma $J = I_1 \times I_2$ donde I_l, con $l = 1, 2$, son intervalos en $\overline{\mathbb{R}}$. Los rectángulos J_1, J_2 *no se sobreponen*, si $int(J_1) \cap int(J_2) = \emptyset$.

Los conceptos básicos para definir la integral H-K de funciones reales definidas en $\overline{\mathbb{R}}^2$ son similares a los de funciones reales definidas en $\overline{\mathbb{R}}$. Así:

- $\overline{t} = (t_1, t_2)$ es una *etiqueta* del rectángulo cerrado $J = I_1 \times I_2$, si t_l es etiqueta del intervalo cerrado I_l en $\overline{\mathbb{R}}$. Al par $(J, \overline{t})$ se le llama *par asociado* en $\overline{\mathbb{R}}^2$.
- E es un *conjunto elemental*, si es unión finita de rectángulos cerrados. Es evidente que $\overline{\mathbb{R}}^2$ es un conjunto elemental.
- La colección finita de pares asociados $\overline{P} = \{(J, \overline{t})\}$ es una *partición etiquetada* de E, si los rectángulos cerrados J no se sobreponen y

$$E = \bigcup \{J : (J, \overline{t}) \in \overline{P}\}.$$

  Se dice que $\overline{Q}$ es una *subpatición etiquetada* de $\overline{P}$, si $\overline{Q} \subset \overline{P}$.
- Sean $\overline{P} = \{(J, \overline{t})\}$ una partición etiquetada de E y X un conjunto no vacío. Se dice que $\overline{P}$ es una *partición etiquetada sobre* X, si $\overline{t} \in X$ para cada $(J, \overline{t}) \in \overline{P}$.
- Sean E un conjunto elemental, $\delta : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una medidora sobre E y $\overline{P} = \{(J, \overline{t})\}$ una partición etiquetada de E y $\overline{Q}$ una subpartición etiquetada de $\overline{P}$. El par asociado $(J, \overline{t})$ es $\delta-$*fino*, si $\{(I_l, t_l)\}$ es δ-fina. Se dice que
  - $\overline{P}$ es $\delta-$*fina* de E, si cada $(J, \overline{t}) \in \overline{P}$ es δ-fino.
  - $\overline{Q}$ es $\delta-$*fina*, si cada $(J, \overline{t}) \in \overline{Q}$ es δ-fino.

Observemos que si δ_1 y δ_2 son dos medidoras sobre un conjunto elemental E, y $\delta(t) := \text{mín}\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$ para cada $t \in E$, entonces δ es una medidora sobre E. Además, toda partición δ-fina es δ_1-fina y δ_2-fina de E. Esto puede ser extendido a un número finito de medidoras sobre E.

El teorema 2.2.2 de [11] nos proporciona una versión bidimensional del lema 1 para rectángulos finitos. Con la intención de facilitar la lectura, lo enunciamos a continuación.

Lema 2. ***(Lema de Cousin)****. Si δ es una medidora sobre el rectángulo finito J, entonces existe una partición δ-fina de J.*

La versión del lema anterior al plano extendido es la siguiente.

Lema 3. ***(Lema de Cousin)****. Para cualquier medidora $\delta : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$, existe una partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}^2$.*

Demostración. Sea $\delta_1(y) := \delta(\infty, y)$ para cada $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Por el lema 1, existe $P_1 = \{(L^1, y_{L^1})\}$ partición δ_1-fina de $\overline{\mathbb{R}}$. Sean

$$\alpha_1 = \text{mín}\{\delta_1(y_{L^1})|(L^1, y_{L^1}) \in P_1\}$$

y $m_1 \in \mathbb{R}$ con $\frac{1}{\alpha_1} \leq m_1$. Entonces, el par asociado $([m_1, \infty] \times L^1, (\infty, y_{L^1}))$ es δ-fino para cada $(L^1, y_{L^1}) \in P_1$. De manera similar, se define $\delta_2(y) := \delta(-\infty, y)$ para cada $y \in \overline{\mathbb{R}}$, por lo que existe $P_2 = \{(L^2, y_{L^2})\}$ partición δ_2-fina. Sean

$$\alpha_2 = \text{mín}\{\delta_2(y_{L^2})|(L^2, y_{L^2}) \in P_2\}$$

y $m_2 \in \mathbb{R}$ tal que $m_2 \leq -\frac{1}{\alpha_2}$. Así, el par asociado $([-\infty, m_2] \times L^2, (-\infty, y_{L^2}))$ es δ-fino para cada $(L^2, y_{L^2}) \in P_2$. Ahora, para cada $x \in [m_2, m_1]$, sea $\delta_3(x) := \delta(x, \infty)$. Nuevamente por el lema 1, existe una partición δ_3-fina $P_3 = \{(L^3, x_{L^3})\}$. Sean

$$\alpha_3 = \text{mín}\{\delta_3(x_{L^3})|(L^3, x_{L^3}) \in P_3\}$$

y $m_3 \in \mathbb{R}$ con $\frac{1}{\alpha_3} \leq m_3$. Se tiene que $(L^3 \times [m_3, \infty], (x_{L^3}, \infty))$ es δ-fino para cada $(L^3, x_{L^3}) \in P_3$. Se hace lo mismo para $\delta_4(x) := \delta(x, -\infty)$ con $x \in [m_2, m_1]$, obteniendo una partición δ_4-fina $P_4 = \{(L^4, x_{L^4})\}$. Definiendo

$$\alpha_4 = \text{mín}\{\delta_4(x_{L^4})|(L^4, x_{L^4}) \in P_4\}$$

y $m_4 \in \mathbb{R}$ tal que $m_4 \leq -\frac{1}{\alpha_4}$, tenemos que $(L^4 \times [-\infty, m_4], (x_{L^4}, -\infty))$ es δ-fino, para cada $(L^4, x_{L^4}) \in P_4$. En la figura 1 se muestran los rectángulos construidos hasta este momento.

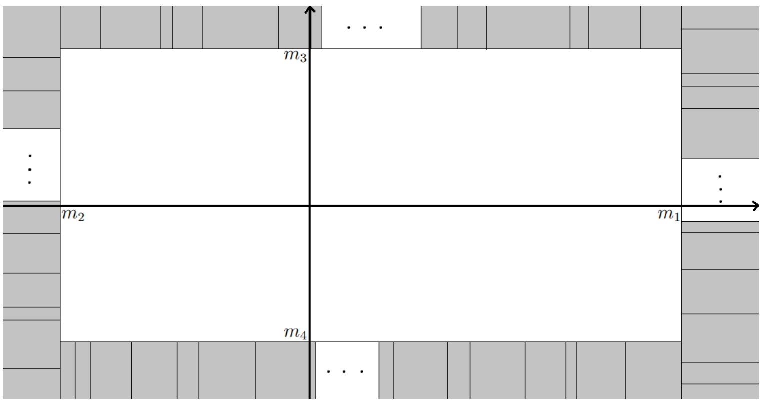

Figura 1. Partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Luego, δ es una medidora sobre el rectángulo $[m_2, m_1] \times [m_4, m_3]$. Por el lema 2, este rectángulo tiene una partición δ-fina $\overline{P}$. Concluimos la prueba observando que si unimos $\overline{P}$ con los pares asociados anteriores se obtiene una partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}^2$. $\square$

Observación 1. Notemos que el método de construcción de la partición δ-fina, en el lema anterior, se puede emplear para cualquier conjunto elemental E.

Definición 4. Sean E un conjunto elemental y $\overline{P} = \{(J, \overline{t})\}$ una partición etiquetada de E. Dada una función $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, la *suma de Riemann de f sobre $\overline{P}$* se define como

$$S(f; \overline{P}) = \sum_{\substack{(J,\overline{t}) \in \overline{P} \\ \overline{t} \in \mathbb{R}^2}} f(\overline{t}) ||J||,$$

donde $||J||$ es el área del rectángulo J.

En analogía al caso de funciones de una variable y con la intención de que una suma de Riemann esté bien definida, se condiciona a que $f(\overline{t}) := 0$ para todo $\overline{t} \in \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$.

Definición 5. Sea E un conjunto elemental. Se dice que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función *Henstock-Kurzweil integrable sobre E,* con valor A, si para todo $\varepsilon > 0$, existe δ_ε una medidora sobre E tal que para toda $\overline{P}$ partición δ_ε-fina, se satisface

$$|S(f; \overline{P}) - A| < \varepsilon.$$

A será la integral de Henstock-Kurzweil de f, la cual será denotada como $(HK) \iint_E f$.

Si el conjunto elemental E es acotado y f es Riemann integrable sobre E, su integral será denotada como $(R) \iint_E f$.

Al igual que para el caso de funciones reales de una variable real, si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Riemann o Lebesgue integrable sobre un conjunto elemental E, entonces f es H-K integrable sobre E y los valores de las integrales coinciden. Para el caso de la integral de Riemann, E debe ser acotado.

Dos resultados importantes en la teoría de la integral de Henstock-Kurzweil son los siguientes.

Lema 4. *[11, Teorema 2.3.6]. Sea E un conjunto elemental acotado. Si $f \in HK(E)$ y J es un rectángulo contenido en E, entonces $f \in HK(J)$.*

Lema 5. ***(Saks-Henstock)*** *[11, Teorema 2.4.3]. Sean K un rectángulo acotado, $f \in HK(K)$ y $\varepsilon > 0$. Si δ es una medidora sobre K tal que*

$$\left| \sum_{(J,\overline{t}) \in \overline{P}} f(\overline{t}) \, \|J\| - (HK) \iint_K f \right| < \varepsilon$$

para cada $\overline{P}$ partición δ-fina de K, entonces

$$\left| \sum_{(J,\overline{t}) \in \overline{Q}} \left[f(\overline{t}) \, \|J\| - (HK) \iint_K f \right] \right| < \varepsilon$$

para cada $\overline{Q}$ subpartición δ-fina de K.

Definición 6. Sea $\delta : \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una medidora. Se dice que el conjunto elemental $O = \bigcup_{l=1}^{k} J_l$ es una *aureola δ-fina*, si $\{(J_l, \overline{x}_l)\}_{l=1}^{k}$ es una partición etiquetada δ-fina sobre $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ y $E_O := cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O)$ es un conjunto elemental acotado.

Considerando la definición anterior tenemos el siguiente resultado.

Lema 6. *Sean $f : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y δ una medidora sobre $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$. Si para cualquier O aureola δ-fina, la función f es H-K integrable sobre E_O, entonces f es H-K integrable sobre cualquier conjunto elemental acotado.*

Demostración. Sea E un conjunto elemental acotado. Sean $u_1 = \max\{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in E\}$, $u_2 = \min\{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in E\}$, $u_3 = \max\{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in E\}$ y $u_4 = \min\{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in E\}$. Entonces el rectángulo $[u_2, u_1] \times [u_4, u_3]$ contiene a E. De la misma forma que en la prueba del lema 3, se obtienen P_i particiones δ_i-finas para encontrar $m_i \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1,2,3,4\}$. Pero se agregan condiciones adicionales a las constantes m_i's, las cuales son $u_1 \leq m_1$, $m_2 \leq u_2$, $u_3 \leq m_3$ y $m_4 \leq u_4$. Así se forma una aureola δ-fina O tal que $E_O = [m_2, m_1] \times [m_4, m_3]$. Además, por hipótesis f es H-K integrable sobre E_O. Por lo tanto, f es H-K integrable sobre E.

$\square$

Tomando en cuenta la definición de aureola δ-fina y la notación de E_O, un resultado fundamental para analizar la respuesta a nuestra pregunta es el siguiente.

Teorema 1. *$f : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función H-K integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$, con integral A, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe una medidora δ_ε sobre $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ tal que para cualquier aureola δ_ε-fina O, la función f es H-K integrable sobre E_O y*

$$\left| (HK) \iint_{E_O} f - A \right| < \varepsilon.$$

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea f una función H-K integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$ con $(HK) \iint_{\overline{\mathbb{R}}^2} f = A$ y sea $\varepsilon > 0$. Así, existe $\delta_\varepsilon : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para cualquier $\overline{P}$ partición δ_ε-fina de $\overline{\mathbb{R}}^2$, se tiene

$$|S(f; \overline{P}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

La primera parte de la demostración del lema 3 proporciona una forma de obtener una O aureola δ_ε-fina, y se toma el correspondiente conjunto elemental $E_O = cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O)$. Por el lema 4, f es H-K integrable sobre E_O. Así, existe una medidora δ_O sobre E_O tal que para cualquier $\overline{P}_1$ partición δ_O-fina, se tiene que

$$\left| S(f; \overline{P}_1) - (HK) \iint_{E_O} f \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Se puede suponer que $\delta_O(x,y) \leq \delta_\varepsilon(x,y)$ para cada $(x,y) \in E_O$, de lo contrario se define $\delta'_O(x,y) := \min\{\delta_O(x,y), \delta_\varepsilon(x,y)\}$ para $(x,y) \in E_O$. Sea $\overline{Q}$ la partición δ_ε-fina de $\overline{\mathbb{R}}^2$ constituida por la aureola δ_ε-fina O y la partición δ_O-fina $\overline{P}_1$ de E_O, para el cual se mantiene (2) y $S(f;\overline{Q}) = S(f;\overline{P}_1)$. Sumando (2) y (3) se obtiene que

$$\left|(HK)\iint_{E_O} f - A\right| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$] Supóngase que existe A tal que para $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon : \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ con la propiedad de que para cualquier O aureola δ_ε-fina, la función f es H-K integrable sobre $E_O = cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O)$ y $|(HK)\iint_{E_O} f - A| < \varepsilon$. Sean $E_k = [-k,k] \times [-k,k]$ y $F_k = int(E_k) \setminus int(E_{k-1})$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Es claro que $F_k \cap F_m = \emptyset$ con $k \neq m$ y, por el lema 6, f es H-K integrable sobre cada E_k. Sea δ_k una medidora sobre E_k tal que si $\overline{P}_k$ es una partición δ_k-fina de E_k, entonces

$$\left|S(f;\overline{P}_k) - (HK)\iint_{E_k} f\right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{4}$$

Por el Lema de Saks-Henstock, $\overline{P}_k$ puede ser reemplazada por cualquier subpartición de $\overline{P}_k$ y E_k por la unión de los correspondientes rectángulos de esta subpartición. Ahora, sea $\delta : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\delta(\overline{x}) = \begin{cases} \delta_\varepsilon(\overline{x}) & si \quad \overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2 \\ \min\{\delta_k(\overline{x}), d(\overline{x}, \partial F_k)\} & si \quad \overline{x} \in F_k. \end{cases} \tag{5}$$

Se toma cualquier partición δ-fina $\overline{P}$ de $\overline{\mathbb{R}}^2$ y se considera la suma de Riemann $S(f;\overline{P})$. Sea $\overline{P}_O \subset \overline{P}$ la subpartición δ_ε-fina de $\overline{P}$ etiquetada en $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, el cual forma la aureola δ_ε-fina O y el correspondiente conjunto elemental acotado $E_O = cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O)$.

De acuerdo a la definición (5) de δ, se tiene que si $\overline{x} \in F_k$, entonces el rectángulo asociado J de $(J,x) \in \overline{P} \setminus \overline{P}_O$ está contenido en E_k. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sean $\pi_k = \{(J,\overline{x}) \in \overline{P} \mid \overline{x} \in F_k\}$ y $G_k = \bigcup_{(J,\overline{x})\in\pi_k} J$. Es claro que π_k es una subpartición δ-fina de la partición δ_k-fina $\overline{P}_k$ que, por el Lema de Saks-Henstock, sigue satisfaciendo la desigualdad (4) cuando π_k sustituye a $\overline{P}_k$, y G_k reemplaza a E_k. La suma de todos los términos $S(f;\pi_k)$ es $S(f;\overline{P} \setminus \overline{P}_O)$.

Nótese que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $G_k \neq \emptyset$ y $G_k \subset E_k$ para $k \in \{1,\ldots,n_0\}$, y además $\bigcup_{k=1}^{n_0} G_k = E_O$. Ya que la partición etiquetada $\overline{P} \setminus \overline{P}_O$ de E_O sólo contiene una cantidad finita de pares asociados y por ende un número finito de rectángulos, así llega un momento donde π_k es vacío y no habrá rectángulos que formen a G_k. De acuerdo a lo anterior, se tiene que

$$S(f;\overline{P}) = S(f;\overline{P}_O) + S(f;\overline{P} \setminus \overline{P}_O) = S(f;\overline{P}_O) + \sum_{k=1}^{n_0} S(f;\pi_k) = \sum_{k=1}^{n_0} S(f;\pi_k)$$

y

$$(HK)\iint_{E_O} f = \sum_{k=1}^{n_0} (HK)\iint_{G_k} f.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\begin{aligned}
|S(f;\overline{P})-A| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n_0} S(f;\pi_k) - \sum_{k=1}^{n_0}(HK)\iint_{G_k} f\right| + \left|(HK)\iint_{E_O} f - A\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n_0}\left|S(f;\pi_k) - (HK)\iint_{G_k} f\right| + \left|(HK)\iint_{E_O} f - A\right| \\
&< \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

3. Respuesta a nuestra pregunta

En esta sección se exhibe una función construida en [13], la cual es H-K integrable sobre todo rectángulo acotado $[a,b]\times[c,d]$ y satisface (1). Probando que esta función no es H-K integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$, concluimos que la respuesta a la pregunta es negativa.

Los intervalos diádicos $I_j^k = [j/2^k, (j+1)/2^k) \subset [0,1)$ con $0 \leq k$ y $0 \leq j \leq 2^k - 1$, son usados para construir rectángulos adecuados. Para $0 \leq k$ y $0 \leq j \leq 2^{2k} - 1$ se crean:

$$J_{1,2j}^k = [k, k+1/2) \times I_{2j}^{2k+1}, \qquad J_{1,2j+1}^k = [k, k+1/2) \times I_{2j+1}^{2k+1},$$

$$J_{2,2j}^k = [k+1/2, k+1) \times I_{2j}^{2k+1}, \qquad J_{2,2j+1}^k = [k+1/2, k+1) \times I_{2j+1}^{2k+1}.$$

En la figura 2, se muestran los rectángulos anteriores. Sea la función $f : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{k+2} & si \quad (x,y) \in J_{1,2j}^k \cup J_{2,2j+1}^k \\ -2^{k+2} & si \quad (x,y) \in J_{1,2j+1}^k \cup J_{2,2j}^k \\ 0 & si \quad (x,y) \notin [0,\infty)\times[0,1). \end{cases}$$

Si J es un rectángulo acotado, se tienen dos casos:

1) Si $J \cap ([0,\infty)\times[0,1)) = \emptyset$, entonces $f(x,y) = 0$ para cada $(x,y) \in J$.

2) Si $J \cap ([0,\infty)\times[0,1)) \neq \emptyset$, entonces f es una función escalonada en J.

Así, f es Riemann integrable sobre rectángulos acotados $[a,b]\times[c,d]$, en especial para $J_{1,2j}^k$, $J_{1,2j+1}^k$, $J_{2,2j}^k$ y $J_{2,2j+1}^k$. Luego, los valores de la integral de Riemann sobre cada uno de los rectángulos son:

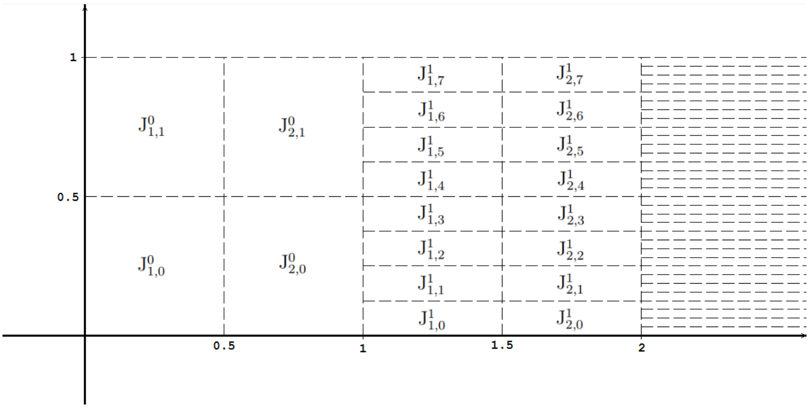

Figura 2. Rectángulos.

$$(R)\iint_{J^k_{p,q}} f = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & si \quad p=1, q=2j \\ \frac{1}{2^k} & si \quad p=2, q=2j+1 \\ -\frac{1}{2^k} & si \quad p=1, q=2j+1 \\ -\frac{1}{2^k} & si \quad p=2, q=2j, \end{cases}$$

para $0 \leq k$ y $0 \leq j \leq 2^{2k}-1$.

Como f es Riemann integrable sobre un rectángulo acotado, también es H-K integrable sobre el mismo rectángulo y los valores de las integrales coinciden. Para probar la validez de las afirmaciones siguientes se emplean propiedades de la integral de Riemann.

Afirmación 1. Si $k \in \mathbb{N}$ y $c \leq d$ con $c, d \in \mathbb{R}$, entonces

$$(R)\int_0^k \int_c^d f = 0.$$

En efecto, si $1 \leq c$ ó $d \leq 0$ es claro que se cumple la afirmación. Sólo resta ver qué sucede cuando $[0,1)\cap[c,d] \neq \emptyset$. Sean $H'_i = \{[c,d]\cap I^{2i+1}_{2j} \neq \emptyset \mid j \in \{0,\ldots,2^{2i}-1\}\}$ y $H''_i = \{[c,d]\cap I^{2i+1}_{2j+1} \neq \emptyset \mid j \in \{0,\ldots,2^{2i}-1\}\}$ para $i \in \{0,\ldots,k-1\}$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
(R)\int_0^k\int_c^d f &= \sum_{i=0}^{k-1}(R)\int_i^{i+1}\int_c^d f\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\left(\sum_{h\in H_i'\cup H_i''}\left((R)\int_i^{i+\frac{1}{2}}\int_h f+(R)\int_{i+\frac{1}{2}}^{i+1}\int_h f\right)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\left(\sum_{h\in H_i'\cup H_i''}\left((R)\int_i^{i+\frac{1}{2}}\int_h f-(R)\int_i^{i+\frac{1}{2}}\int_h f\right)\right)=0.
\end{aligned}
$$

Afirmación 2. Para $k\in\mathbb{N}$ y $j\in\{0,1,\ldots,2^{2k}-1\}$, se satisface

$$(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k+1}} f=\frac{1}{2^k}\quad y\quad (R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f=-\frac{1}{2^k}.$$

Sean k y j como lo requiere la afirmación 2, entonces

$$
\begin{aligned}
(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k+1}} f &= (R)\int_0^k\int_{I_{2j}^{2k+1}} f+(R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k+1}} f\\
&= (R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k+1}} f=\frac{1}{2^k}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f &= (R)\int_0^k\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f+(R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f\\
&= (R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f=-\frac{1}{2^k}.
\end{aligned}
$$

Además, para $k\in\mathbb{N}$ e $i\in\{0,\ldots,2^k-1\}$, el intervalo I_i^k contiene 2^k intervalos I_{2j}^{2k+1} con $2^k i\le j\le 2^k i+2^k-1$. Por lo tanto,

$$\sum_{j=2^k i}^{2^k i+2^k-1}(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k+1}} f=\sum_{j=2^k i}^{2^k i+2^k-1}\frac{1}{2^k}=1.$$

Afirmación 3. Si $k\in\mathbb{N}$, entonces

$$(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_0^1 f=0.$$

Sean $H_k'=\{I_{2j}^{2k+1}\mid j\in\{0,\ldots,2^{2k}-1\}\}$ y $H_k''=\{I_{2j+1}^{2k+1}\mid j\in\{0,\ldots,2^{2k}-1\}\}$ para $k\in\mathbb{N}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_0^1 f &= (R)\int_0^k\int_0^1 f + (R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_0^1 f\\
&= (R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_0^1 f\\
&= \sum_{h\in H_k'}\left((R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_h f\right) + \sum_{h\in H_k''}\left((R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_h f\right)\\
&= \sum_{h\in H_k'}\left(\frac{1}{2^k}\right) + \sum_{h\in H_k''}\left(-\frac{1}{2^k}\right)\\
&= \frac{2^{2k}}{2^k} - \frac{2^{2k}}{2^k} = 0.
\end{aligned}
$$

Afirmación 4. Si $a \leq 0$, $1 \leq b$, $c \leq 0$ y $1 \leq d$, entonces

$$(R)\int_a^b\int_c^d f = 0.$$

Si $1 \leq k \leq b < k + \frac{1}{2}$, con $k \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
(R)\int_a^b\int_c^d f &= (R)\int_0^b\int_0^1 f\\
&= (R)\int_0^k\int_0^1 f + (R)\int_k^b\int_0^1 f\\
&= (R)\int_k^b\int_0^1 f\\
&= \sum_{j=0}^{2^{2k}-1}\left((R)\int_k^b\int_{I_{2j}^{2k+1}} f + (R)\int_k^b\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Ahora si $k + \frac{1}{2} \leq b < k + 1$,

$$
\begin{aligned}
(R)\int_a^b\int_c^d f &= (R)\int_0^b\int_0^1 f\\
&= (R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_0^1 f + (R)\int_{k+\frac{1}{2}}^b\int_0^1 f\\
&= (R)\int_{k+\frac{1}{2}}^b\int_0^1 f\\
&= \sum_{j=0}^{2^{2k}-1}\left((R)\int_{k+\frac{1}{2}}^b\int_{I_{2j}^{2k+1}} f + (R)\int_{k+\frac{1}{2}}^b\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f\right) = 0.
\end{aligned}
$$

La afirmación 4 nos dice que se satisface (1), es decir,

$$\lim_{\substack{b,d\to\infty\\ a,c\to-\infty}} (HK)\int_a^b\int_c^d f = 0.$$

Ahora supóngase que f es H-K integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$ y sea $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, entonces existe una medidora δ_ε sobre $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ tal que para cualquier aureola δ_ε-fina O

$$\left|(HK)\iint_{E_O} f - (HK)\iint_{\overline{\mathbb{R}}^2} f\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Para obtener una contradicción, comparamos dos aureolas δ_ε-finas construidas de la siguiente manera. Sea $T_n = \{y \in [0,1] \mid \delta_\varepsilon(\infty, y) > \frac{1}{n}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ y $[0,1]$ es un intervalo compacto, por el Teorema de Categoría de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que T_{n_0} no es nunca denso, es decir, $int(cl(T_{n_0})) \neq \emptyset$. Sea (u,v) un intervalo abierto no vacío contenido en $cl(T_{n_0})$, entonces $(u,v) \cap T_{n_0} \neq \emptyset$ y además todo subconjunto no vacío de (u,v) tiene puntos de T_{n_0}.

Tomando en cuenta que el conjunto de los números diádicos $\{\frac{j}{2^k} \mid k \in \mathbb{N}\ y\ j \in \{0,1,\ldots,2^k-1,2^k\}\}$ es denso en $[0,1]$, existen $k_0 > n_0$ y $j_0 \in \{1,\ldots,2^{k_0}-1\}$ tales que $u < \frac{j_0}{2^{k_0}} < \frac{j_0+1}{2^{k_0}} < v$. Es decir, $I_{j_0}^{k_0} \subset (u,v)$ y $I_{2j}^{2k_0+1} \subset I_{j_0}^{k_0}$ para cada $j \in \{2^{k_0}j_0, \ldots, 2^{k_0}j_0 + 2^{k_0} - 1\}$.

El par asociado $([k_0+\frac{1}{2},\infty] \times cl(I_{2j}^{2k_0+1}), (\infty, y_{2j}))$ con $y_{2j} \in cl(I_{2j}^{2k_0+1}) \cap T_{n_0}$, es δ_ε-fino ya que:

- $k_0 + \frac{1}{2} > k_0 > n_0 \geq \frac{1}{\delta_\varepsilon(\infty, y_{2j})}$.
- $cl(I_{2j}^{2k_0+1}) \subset [y_{2j} - \delta_\varepsilon(\infty,y_{2j}), y_{2j} + \delta_\varepsilon(\infty,y_{2j})]$, puesto que $|cl(I_{2j}^{2k_0+1})| = \frac{1}{2^{2k_0+1}} < \frac{1}{k_0} < \frac{1}{n_0} \leq \delta_\varepsilon(\infty, y_{2j})$,

para cada $j \in \{2^{k_0}j_0, \ldots, 2^{k_0}j_0 + 2^{k_0} - 1\}$.

De manera similar, se prueba que el par asociado $([k_0,\infty] \times cl(I_{2j+1}^{2k_0+1}), (\infty, y_{2j+1}))$ con $y_{2j+1} \in cl(I_{2j+1}^{2k_0+1}) \cap T_{n_0}$ es δ_ε-fino, para cada $j \in \{2^{k_0}j_0, \ldots, 2^{k_0}j_0 + 2^{k_0} - 1\}$.

Sea $\delta_1(y) := \delta_\varepsilon(\infty, y)$ para cada $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Es claro que δ_1 es una medidora sobre $[-\infty, \frac{j_0}{2^{k_0}}]$ y $[\frac{j_0+1}{2^{k_0}}, \infty]$. Por el lema 1, existen particiones P_1' y P_1'' δ_1-finas de $[-\infty, \frac{j_0}{2^{k_0}}]$ y $[\frac{j_0+1}{2^{k_0}}, \infty]$, respectivamente. Sea $\alpha_1 = \text{mín}\{\delta_1(y_L) \mid (L, y_L) \in P_1' \cup P_1''\}$ y se toma $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\alpha_1} \leq m_1$. Así, $([m_1,\infty] \times L, (\infty, y_L))$ es $\delta_\varepsilon-$fino, para cada $(L, y_L) \in P_1' \cup P_1''$.

Ahora sea $\delta_2(y) := \delta_\varepsilon(-\infty, y)$ para cada $y \in \overline{\mathbb{R}}$, la cual es una medidora sobre $\overline{\mathbb{R}}$, entonces existe P_2 partición δ_2-fina. Se toman $\alpha_2 = \text{mín}\{\delta_2(y_L) \mid (L, y_L) \in P_2\}$ y $m_2 \in \mathbb{R}$ tales que $m_2 \leq -\frac{1}{\alpha_2}$. Así, el par asociado $([-\infty, m_2] \times L, (-\infty, y_L))$ es $\delta_\varepsilon-$fino, para cada $(L, y_L) \in P_2$.

Si $\delta_3(x) := \delta_\varepsilon(x,\infty)$, para cada $x \in [m_2, m_1]$, entonces, por el lema 1, existe una partición δ_3-fina P_3. Sean $\alpha_3 = \text{mín}\{\delta_3(y_L) \mid (L, y_L) \in P_3\}$ y $m_3 \in \mathbb{R}$ tales que $m_3 \geq \text{máx}\{\frac{1}{\alpha_3}, 1\}$. Así, $(L \times [m_3, \infty], (y_L, \infty))$ es δ_ε-fino, para cada $(L, y_L) \in P_3$.

Por último, para $x \in [m_2, m_1]$, sea $\delta_4(x) := \delta_\varepsilon(x, -\infty)$. Existe P_4 partición δ_4-fina. Luego, sean $\alpha_4 = \text{mín}\{\delta_4(y_L) \mid (L, y_L) \in P_4\}$ y $m_4 \in \mathbb{R}$ tales que $m_4 \leq -\frac{1}{\alpha_4}$. Entonces $(L \times [-\infty, m_4], (y_L, -\infty))$ es δ_ε-fino, para cada $(L, y_L) \in P_4$. Todos los rectángulos anteriores se usan para formar la aureola δ_ε-fina O, que se muestra en la figura 3.

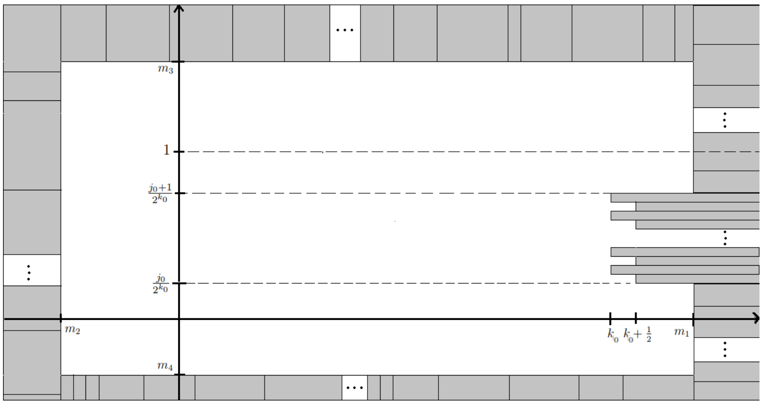

Figura 3. Aureola δ_ε-fina O.

Luego con ayuda de las afirmaciones 1 y 2,

$$(HK)\iint_{E_O} f = (R)\iint_{cl(\overline{\mathbb{R}}^2\setminus O)} f = (R)\int_{m_2}^{m_1}\int_{\frac{j_0+1}{2^{k_0}}}^{m_3} f + (R)\int_{m_2}^{m_1}\int_{m_4}^{\frac{j_0}{2^{k_0}}} f +$$

$$(R)\int_{m_2}^{0}\int_{I_{j_0}^{k_0}} f + \sum_{j=2^{k_0}j_0}^{2^{k_0}j_0+2^{k_0}1}\left((R)\int_0^{k_0+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k_0+1}} f + (R)\int_0^{k_0}\int_{I_{2j+1}^{2k_0+1}} f\right) =$$

$$\sum_{j=2^{k_0}j_0}^{2^{k_0}j_0+2^{k_0}-1}\left((R)\int_0^{k_0+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k_0+1}} f\right) = \sum_{j=2^{k_0}j_0}^{2^{k_0}j_0+2^{k_0}-1}\left(\frac{1}{2^{k_0}}\right) = 1.$$

Para la misma δ_ε se construye otra aureola O' $\delta_\varepsilon-$fina, reemplazando cada rectángulo $[k_0 + \frac{1}{2}] \times cl(I_{2j}^{2k_0+1})$ en O por $[k_0, \infty] \times cl(I_{2j}^{2k_0+1})$ y manteniendo el resto de los rectángulos que están en O. Entonces,

$$(HK)\iint_{E_{O'}} f = 0.$$

Usando (6),

$$
\begin{aligned}
1 &= \left|(HK)\iint_{E_O} f - (HK)\iint_{E_{O'}} f\right| \\
&\leq \left|(HK)\iint_{E_O} f - (HK)\iint_{\mathbb{R}^2} f\right| + \left|(HK)\iint_{E_{O'}} f - (HK)\iint_{\mathbb{R}^2} f\right| \\
&< 1,
\end{aligned}
$$

lo cual es una contradicción. Con esto hemos demostrado que la respuesta a nuestra pregunta es negativa.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores por sus valiosas observaciones, las cuales ayudaron a mejorar este artículo. Este trabajo fue apoyado por la VIEP-BUAP, Puebla, México.

Referencias

[1] R. G. Bartle, *A modern theory of integration*, American Mathematical Society: Providence, RI, 2001.

[2] R. Gordon, *A descriptive characterization of the generalized Riemann integral*, Real Analysis Exch., 15 (1) (1989-90), 397-400.

[3] R. Henstock, *A Riemann-type integral of Lebesgue power*, Canadian Journal of Mathematics vol. 20 pp. 79-87, 1968.

[4] R. Henstock, *General theory of integration*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[5] R. Henstock, *Lectures on the theory of integration*, World Scientific: Teaneck, Nj, 1988.

[6] R. Henstock, *The theory of integration*. 1st ed. Butterworths, 1963.

[7] J. Jarnik and J. Kurzweil, *A general form of the product integral and linear ordinary diferential equations*, Czech. Math. J., 37 (112) 1987, 642-659.

[8] J. Kurzweil, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*. Czechoslovak Mathematical Journal, 7(3)(1957), pp. 418-449.

[9] J. Kurzweil, *Nichtabsolut konvergente Integrale*, Teubner-Texte zur Math- ematik, 26, Teubner, Leipzig, 1980.

[10] P. Y. Lee, *Lanzhou lectures on Henstock integration*, World Scientific: Singapore, 1989.

[11] T. Y. Lee, *Henstock-Kurzweil integration on Euclidean spaces*, World Scientific: Hackensack, 2011.

[12] https://mathoverflow.net/questions/291707/who-was-heinrich-hake

[13] P. Muldowney and V. Skvortsov, *Improper Riemann Integral and Henstock Integral in* $\mathbb{R}^n$, Mathematical Notes Vol. 78 (2) (2005), 228-233.

Recibido el 14 de diciembre de 2018. Aceptado para publicación el 11 de noviembre de 2019.

EDGAR TORRES TEUTLE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
PUEBLA, MÉXICO
e-mail: edkf.03@gmail.com

FRANCISCO JAVIER MENDOZA TORRES
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
PUEBLA, MÉXICO
e-mail: jmendoza@fcfm.buap.mx