

# MODELADO DE FLUJO COMPRESIBLE UNIDIMENSIONAL Y HOMOENTRÓPICO POR EL METODO DE VOLÚMENES FINITOS

## UNIDIMENSIONAL AND HOMOENTROPIC COMPRESIBLE FLOW MODELLING USING THE FINITE VOLUME METHOD

ILBA CUADRADO

*Grupo de Ciencia y Tecnología del Gas y Uso Racional de la Energía, GASURE  
Facultad de Ingeniería, Universidad de Antioquia, ilbageo@udea.edu.co*

FRANCISCO CADAVID

*Grupo de Ciencia y Tecnología del Gas y Uso Racional de la Energía, GASURE  
Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia, fcadaavid@udea.edu.co*

JOHN AGUDELO

*Grupo de Manejo Eficiente de la Energía GIMEL, Universidad de Antioquia, jragude@udea.edu.co*

CARLOS SÁNCHEZ

*Grupo de Combustibles Alternativos, Universidad Nacional de Colombia, casl@une.net.co*

Recibido para revisar Agosto 28 de 2007, aceptado Febrero 22 de 2008, versión final Marzo 03 de 2008

**RESUMEN:** En este trabajo se presenta el modelado de dos situaciones típicas de flujo compresible, el problema de *Riemann* y el tubo *DeHaller*, bajo condiciones de flujo unidimensional y homoentrópico, es decir, sin tener en consideración las variaciones de entropía producidas por la transferencia de calor y la fricción. El modelo desarrollado se basó en el sistema de ecuaciones de *Euler* (ecuaciones generalizadas de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía), que apoyado en la ecuación de gas ideal fue solucionado por el método de los volúmenes finitos. La discretización espacial se realizó con un esquema *upwind* de primer orden y como criterio de estabilidad se utilizó el número CFL. La validación de los resultados obtenidos se realizó por comparación con las conocidas soluciones del problema de *Riemann* y del tubo *DeHaller*, obteniéndose desviaciones inferiores al 1% para CFL menores a 0.1. Valores del CFL cercanos a 1 generaron respuestas computacionales rápidas, pero inestabilidades en la solución e impropias del fenómeno físico.

**PALABRAS CLAVE:** Flujo compresible, volúmenes finitos, flujo homoentrópico, Problema de *Riemann*, Tubo *DeHaller*.

**ABSTRACT:** In this paper it is presented two typical problems related with compressible flow modelling, the *Riemann* problem and *DeHaller* duct. The model was developed under one-dimensional and homentropic flow conditions, therefore, not taking into account entropy variations by heat transfer and friction. The model was constructed using Euler's system of equations (generalized form of conservation of mass, momentum and energy) and an ideal gas state equation and then solved by finite volume methods. The spatial discretisation was made using a first order upwind scheme and the CFL number was used as stability criterion. The model results were validated by comparison with known analytical solutions of The *Riemann* and *DeHaller* problems. Deviations below 1% were obtained when CFL values were lesser than 0.1. Bigger CFL numbers (closer to 1) produced fast computer results but instabilities out of the physical phenomenon were present.

**KEY WORDS:** Compressible flow, finite volume, homentropic flow, *Riemann problem*, *DeHaller* duct.

## NOMENCLATURA

A	Área transversal	[m <sup>2</sup> ]
<i>a</i>	Velocidad del sonido	[m/s]
CFL	Criterio de estabilidad	
E	Nodo derecho	
<i>e</i>	Cara derecha	
<i>e</i> <sub>0</sub>	Energía específica de parada	[kJ/kg]
H	Entalpía total	[kJ]
<i>h</i> <sub>0</sub>	Entalpía específica de parada	[kJ/kg]
<i>m</i>	Cantidad de movimiento	[kg/m <sup>2</sup> s]
<i>n</i>	Vector normal unitario	
P	Nodo central	
<i>p</i>	Presión	[bar]
<i>R</i>	Constante del gas	[kJ/kg K]
<i>S</i>	Término fuente	[-]
T	Temperatura del gas	[K]
<i>t</i>	Tiempo	[s]
<i>u</i>	Velocidad del flujo	[m/s]
V	Volumen	[m <sup>3</sup> ]
<i>vc</i>	Volumen de control	
W	Nodo izquierdo	
<i>w</i>	Cara izquierda	
<i>x</i>	Distancia	[m]
$\phi$	Propiedad ( $\rho, u, e_0$ )	[-]
$\gamma$	Coefficiente isentrópico	
$\rho$	Densidad	[kg/m <sup>3</sup> ]
Subíndice		
0	Condición de parada	
1	Estado 1	
2	Estado 2	
Superíndice		
0	Propiedades en el tiempo <i>t</i>	
<i>f</i>	Condiciones de frontera	

## 1. INTRODUCCIÓN

Un flujo compresible es aquel en el cuál existen variaciones de densidad significativas (mayores a 3%) producidas por cambios de temperatura, presión o grandes velocidades. Usualmente se consideran compresibles los flujos con números de Mach superiores a 0.3.

El comportamiento de flujo compresible al interior de conductos es la base de una gran cantidad de situaciones de ingeniería, tal es el caso de la descarga de gases a alta presión en motores, ó el movimiento de las ondas de presión en túneles. El estudio de estos y muchos dispositivos se aborda a partir de problemas típicos de dinámica de gases (tubos de choque, el problema de *Riemann* o el tubo *DeHaller* [1-3]), que aunque son casos simplificados permiten contribuir con el entendimiento de la fenomenología, porque

contienen aspectos claves y típicos de los problemas de flujo compresible.

En los casos particulares de flujo se involucran la generación de ondas de compresión, expansión y de choque, para a través de modelos, determinar las variaciones de las propiedades del fluido cuando se somete a cambios repentinos [4]. Dada la complejidad de los fenómenos, esos modelos comúnmente consideran el flujo unidimensional [5-6] y homoentrópico [3,7]. La primera condición aunque limita la variación de las propiedades a la dirección de flujo, ofrece simplicidad, buenas aproximaciones y facilidad de extensión a casos multidimensionales.

El flujo homoentrópico por su parte, se refiere a un flujo en el que los niveles de entropía en cualquier región son uniformes y no varían con el tiempo, lo que implica que los efectos de la transferencia de calor y la fricción son despreciables [8].

Además de las simplificaciones, las técnicas de solución son otro aspecto importante en el estudio de flujos compresibles, que ha dado origen a numerosas investigaciones. Por ejemplo para el problema de Riemann, como lo menciona Toro [2], existen trabajos que se ocupan de la solución exacta, la cual es una alternativa que exige un gran esfuerzo matemático, pero que sirve para validar diferentes métodos. Dichos métodos pueden ser aplicables en otras situaciones de flujo, de las que no se conoce solución analítica.

Entre los métodos de solución se destacan las técnicas de elementos finitos, diferencias finitas y el método de los volúmenes finitos (MVF). Este último es una alternativa numérica que permite formular modelos de forma sencilla, dado su carácter intuitivo y “la relación directa entre el algoritmo numérico y el principio de conservación física” [9].

Los primeros trabajos de esta área fueron para flujos incompresibles y se hicieron finalizando el siglo XIX, cuando se estudiaron las ondas lineales y las no-lineales por parte de Scott Russell [10-11]. Luego apareció el trabajo para flujos compresibles con ecuaciones no lineales de Earnshaw [12] y, finalmente, el trabajo más completo para solucionar las ecuaciones de onda por el Método de las Características de Riemann [13], que se usó exclusivamente

como técnica hasta 1960. A partir de este momento y con la aparición del computador, se comienza el uso de las técnicas de diferencias y volúmenes finitos.

En este artículo se presenta el desarrollo de un modelo de flujo compresible unidimensional y homentrópico, para el cual se empleó la técnica de los volúmenes finitos. Dicho modelo es aplicable al problema de Riemann y al tubo DeHaller pero su planteamiento es general para el flujo en tuberías. Se muestran para los dos casos la validez de los resultados mediante comparación con el método de las características ó la solución analítica. De esta forma se contribuye con el entendimiento de la fenomenología de flujos compresibles y se dan pautas para continuar ahondando en esta importante rama.

## 2. GENERALIDADES

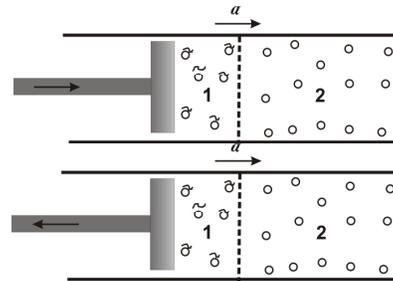
Cuando un cuerpo se mueve en un fluido en reposo, desplaza partículas del fluido que a la vez comunican su desplazamiento a las partículas adyacentes. Estos movimientos o perturbaciones relativos al fluido, viajan a una velocidad diferente a la del cuerpo y se propagan dependiendo de las propiedades elásticas de dicho fluido. Cuando la perturbación viaja y su efecto sobre el fluido es un aumento en la densidad, la perturbación se conoce como onda de compresión; mientras que si la densidad se reduce se denomina onda de expansión.

La Figura 1 representa el movimiento de la perturbación originada por ondas de compresión y expansión.

Las ondas pueden ser clasificadas de acuerdo con la intensidad de los gradientes de presión generados por el movimiento de estas, como:

- *Ondas acústicas:* corresponden a gradientes de presión muy pequeños  $\frac{(p_2 - p_1)}{p_1} \ll 1$ , por lo que su amplitud puede considerarse infinitesimal y los procesos isentrópicos [14].
- *Ondas finitas:* las perturbaciones no son débiles ni la velocidad de la partícula despreciable, caso más general.

- *Ondas de choque:* producen un “salto” brusco, no isentrópico, en las propiedades físicas a ambos lados de la onda.



**Figura 1.** Movimiento de la perturbación en un flujo Compresible. Izquierda onda de compresión y derecha onda de expansión

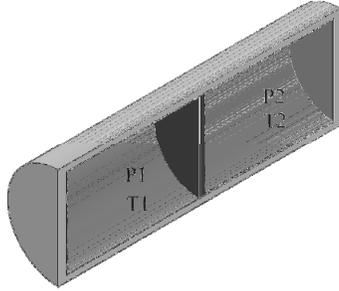
**Figure 1.** Perturbation movement in a compressible flow. Left compression wave and right expansion wave

Las situaciones de flujo descritas a continuación con los problemas de *Riemann* y el tubo *DeHaller*, combinan las ondas finitas y de choque, por lo que su solución matemática requiere que se tenga en cuenta la naturaleza no lineal de las ecuaciones.

### 2.1 Problema de Riemann

Es un caso de dinámica de fluidos unidimensional muy usado para evaluar el desempeño de códigos de flujo compresible. Con él se puede verificar la habilidad de un modelo para capturar choques y discontinuidades, usando un pequeño número de zonas y produciendo el perfil de propiedades correcto.

En la Figura 2 se muestra su configuración básica; consiste en un tubo de extremos cerrados y aislado térmicamente, con dos regiones separadas por un diafragma en las que inicialmente existe un mismo gas en diferentes estados (1 y 2). Cuando el diafragma se rompe repentinamente se generan características de flujo dependientes del tiempo transcurrido, y viajan ondas de expansión y de choque que finalmente alcanzan un estado de equilibrio.



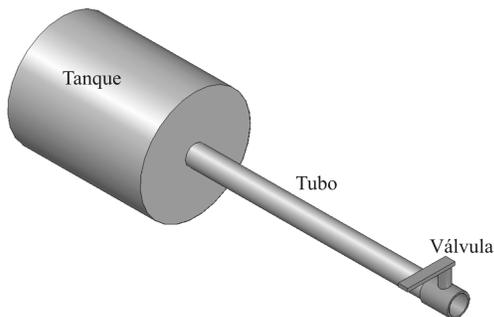
**Figura 2.** Representación del problema de *Riemann*  
**Figure 2.** The *Riemann* problem representation

En cada instante de tiempo las ondas de compresión y expansión están separadas por la llamada superficie de contacto, en la cual las densidades y temperaturas a cada lado son diferentes pero la velocidad y la presión son iguales. El espesor de la discontinuidad puede ser, para los casos donde se desprecian los efectos viscosos y la conductividad, de magnitud similar a las de la trayectoria libre de las partículas ( $1e^{-7}m$ ), en el caso más general este espesor depende de la conductividad térmica, la difusividad y la viscosidad [15].

El problema de Riemann tiene solución exacta, de ahí su ventaja como herramienta de análisis de modelos. Liepmann y Roshko [16], Hirsch [17] y Appel [18] abordan la solución exacta del problema para su comprensión teórica.

## 2.2 Tubo DeHaller

Como lo representa la Figura 3 consiste en un tanque conectado a un tubo, por el que se descarga un fluido de forma repentina. Inicialmente el fluido está encerrado en el sistema, y tanto el tanque como el tubo se mantienen a una presión mayor que la atmosférica pero a temperatura ambiente.



**Figura 3.** Representación tubo DeHaller  
**Figure 3.** The *DeHaller* problem representation

Cuando la válvula ubicada en el extremo del tubo se abre súbitamente, comienza un proceso de descarga de aire mientras la presión en el tanque permanece constante. Se supone el sistema aislado y por lo tanto no hay transferencia de calor con el exterior. También se asume que la fricción del aire con el tubo es despreciable.

De este problema se conocen soluciones encontradas por Benson [8] y por Sánchez [19] con el método de las características, con el cual es posible validar las condiciones de frontera para extremos abiertos (entrada y salida de flujo en tubos). También se conocen soluciones por el método de los elementos finitos discontinuos (DFEM) como la reportada por Perotti [20], donde se obtienen buenos resultados, pero con un gran esfuerzo computacional.

## 3. MODELO MATEMÁTICO

En el presente trabajo se desarrolló un modelo matemático para describir el comportamiento del flujo en el tubo DeHaller y el problema de Riemann, el cual está basado en las consideraciones de un flujo unidimensional, homoentrópico (sin fricción y transferencia de calor).

El planteamiento se hace para un conducto de sección transversal circular constante, al que se le aplican las ecuaciones de conservación en la dirección de flujo ( $x$ ). El volumen de control analizado consiste en una porción de fluido en forma de disco, cuya sección transversal es igual a la del tubo y su espesor es  $\Delta x$ .

*Conservación de la masa (Continuidad):*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $u$  la velocidad del fluido. El primer término representa la acumulación de masa y el segundo (término convectivo) el flujo neto de masa a través del volumen de control.

Conservación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

En esta expresión  $p$  es la presión. El primer y segundo términos representan la acumulación y flujo neto de la cantidad de movimiento, respectivamente; mientras el tercero tiene en cuenta las fuerzas de presión a las que está sometido el volumen de control.

Conservación de la energía:

$$\frac{\partial(\rho e_0)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial(\rho u h_0)}{\partial x} \right] = 0 \quad (3)$$

donde  $e$  y  $h$  son la energía interna y la entalpía total respectivamente. El primer y segundo términos también representan la acumulación y flujo neto pero de energía en este caso.

El sistema de ecuaciones es complementado con la ecuación de estado, bajo la consideración de un gas ideal:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (4)$$

$R$  es la constante del gas y  $T$  la temperatura. Este sistema de ecuaciones diferenciales parciales, denominadas ecuaciones de Euler, es de tipo hiperbólico, es decir, dominado por la advección o términos asociados a la velocidad. Esta característica ocasiona que al solucionarlo se tiendan a desarrollar discontinuidades, debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones, y que por ello, se deban escoger las técnicas de discretización adecuadas, así como diseñar los algoritmos que lleven al mínimo tales discontinuidades no físicas.

#### 4. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VOLUMENES FINITOS

El sistema de ecuaciones planteado se discretizó por el MVF, para ser solucionado en los casos particulares del problema de Riemann y el tubo DeHaller, sin embargo la metodología es extrapolable al caso general de flujo en tuberías.

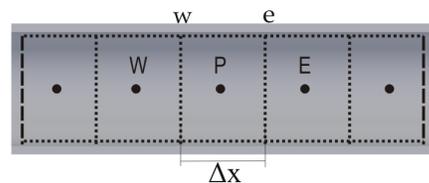
De acuerdo con Versteeg [9], la discretización se realiza partiendo de la expresión de las ecuaciones de conservación en forma integral:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \phi u) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi \quad (5)$$

Donde  $\phi$  representa las propiedades del fluido ( $1; u; e_0$ ). En este caso los términos difusivos y fuente (lado derecho de la ecuación) no existen. Esta ecuación general se integra sobre un volumen de control y se aplica sobre ella el teorema de la divergencia de Gauss, para convertir la integral de volumen a superficie. Finalmente se integra de nuevo en un diferencial de tiempo ( $\Delta t$ ), para obtener:

$$\int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{V_C} \rho \phi dV \right) dt + \int_{\Delta t} \int_A n \cdot (\rho \phi u) dA dt = 0 \quad (6)$$

$A$  es la sección transversal y  $V$  el volumen. Esta ecuación se aplica en un dominio unidimensional como el mostrado en la Figura. En la figura, una malla se divide en volúmenes de control en cuyos centros se ubica un nodo denotado por  $P$  (nodo de interés),  $E$  (vecino derecho) y  $W$  (vecino izquierdo); con fronteras denominadas caras:  $w$  (cara izquierda) y  $e$  (cara derecha).



**Figura 4.** Representación de malla para la aplicación de los volúmenes finitos  
**Figure 4.** Grid representation for finite volumen application

Sobre la ecuación (6) se aplican los balances de masa, cantidad de movimiento y energía reemplazando en ella las ecuaciones (1) a (3) respectivamente. Para ello se empleó una malla colocada, es decir, la presión y los demás escalares (densidad, temperatura, energía interna), así como los vectores de velocidad, fueron almacenados en los nodos. Este es un procedimiento muy usado en flujos compresibles, debido a la programación computacional sencilla y la conservación local

de la masa sin necesidad de artificios adicionales [21]. En flujos incompresibles no existe la ecuación de estado y se requiere de mallas escalonadas (*staggered*) para evitar problemas de desacoplamiento entre las ecuaciones de conservación [22].

El resultado de la discretización, por ejemplo, para la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\rho_p - \rho_p^0}{\Delta t} \Delta V + [(\rho u A)_e - (\rho u A)_w] - [(\rho u A)_e - (\rho u A)_w]^p = 0 \quad (7)$$

Los superíndices  $^0$  denotan las condiciones en el estado  $t$ . Aquellos términos sin el superíndice están relacionados con las condiciones en el estado  $t+\Delta t$ . De igual forma se aplica la discretización para las demás ecuaciones de conservación, teniendo en cuenta la siguiente relación entre la energía ( $e_0$ ) y entalpía total ( $h_0$ ):

$$\rho e_0 = \frac{1}{\gamma} \rho h_0 + \frac{1}{2} \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho u^2 \quad (8)$$

En la aplicación de los VF es de vital importancia la discretización espacial, o aproximación de las propiedades en las caras, y la discretización temporal. Para la primera se empleó un esquema *upwind* de primer orden con el que se definió que: sí la dirección de flujo es hacia la derecha las propiedades en  $w$  se aproximan a las del nodo  $W$  y las de  $e$  al nodo  $P$ ; por el contrario, sí la dirección de flujo es hacia la izquierda, las propiedades en  $w$  se aproximan a  $P$  y las de  $e$  al nodo  $E$ . En resumen:

Si  $u > 0$ , entonces  $\varphi_w = \varphi_W$  y  $\varphi_e = \varphi_P$ . Pero sí  $u < 0$ , entonces  $\varphi_e = \varphi_E$  y  $\varphi_w = \varphi_P$ .

El esquema *upwind* es sencillo y garantiza que el flujo se conserva, que se encuentra acotado por las condiciones de frontera y que sus propiedades son influenciadas por el transporte del flujo, como sucede en el caso de los problemas convectivos. Estas características del método de discretización se conocen en inglés como “conservativeness”, “boundedness” y “transportiveness”, respectivamente. Sin embargo, el primer orden empleado en este método lo limita para reproducir correctamente discontinuidades muy bruscas. Esos

resultados pueden mejorarse empleando esquemas de orden superior, pero debe tenerse en cuenta que se requerirían disipadores artificiales o técnicas especiales, para evitar las oscilaciones no físicas propias de esos esquemas de alto orden [23].

En la discretización temporal se empleó una alternativa desarrollada para aplicaciones aerodinámicas basada en el método propuesto por *Vidovic* [22]. Con él las variables en un tiempo  $t+\Delta t$  se calculan para la densidad y la velocidad de forma explícita (en función de las variables en un tiempo  $t$ ), mientras para la entalpía, se usan las nuevas propiedades de densidad y velocidad (en el tiempo  $t+\Delta t$ ) y la entalpía anterior (en  $t$ ). El resultado en la dirección positiva de  $x$  es el siguiente sistema linealizado:

*Continuidad:*

$$\rho_p = \frac{\left[ \rho_p^0 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \rho_w \left( \frac{u_w^0 + u_p^0}{2} \right) \right]}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + \left( \frac{u_E^0 + u_P^0}{2} \right)} \quad (9)$$

*Cantidad de movimiento ( $m = \rho u$ ):*

$$m_p = \frac{\left[ \frac{p_w^0 - p_E^0}{2} + m_w \left( \frac{u_w^0 + u_p^0}{2} \right) + m_p^0 \frac{\Delta x}{\Delta t} \right]}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + \left( \frac{u_E^0 + u_P^0}{2} \right)} \quad (10)$$

*Energía:*

$$(\rho H)_p = a1 + b1$$

$$a1 = \frac{\left[ \left( \frac{(\rho H)_p^0}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)(\rho u^2)_p^0}{2\gamma} - \frac{(\gamma-1)(\rho u^2)_p^0}{2\gamma} \right) \frac{\Delta x}{\Delta t} \right]}{\left[ \frac{\Delta x}{\gamma \Delta t} + \left( \frac{u_E^0 + u_P^0}{2} \right) \right]} \quad (11)$$

$$b1 = \frac{\rho H_w \left( \frac{u_w^0 + u_p^0}{2} \right)}{\left[ \frac{\Delta x}{\gamma \Delta t} + \left( \frac{u_E^0 + u_P^0}{2} \right) \right]}$$

De forma análoga se obtienen las expresiones para flujo en dirección negativa de  $x$ . La presión en el tiempo  $t+\Delta t$  para cada punto se calcula a partir de la ecuación de estado:

$$P_p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[ (\rho H)_p - \frac{1}{2} \frac{m_p^2}{\rho_p} \right] \quad (12)$$

La secuencia de cálculo empleada para solucionar el sistema de ecuaciones, y obtener los valores de las variables (densidad, presión, velocidad y temperatura) en diferentes intervalos de tiempo y puntos del dominio, fue:

1. Cálculo de la densidad de (9).
2. Cálculo de  $m$  de (10).
3. Cálculo de la velocidad de  $m_p / \rho_p$ .
4. Cálculo del producto  $(\rho H)_p$  de (11).
5. Cálculo de la nueva presión de (12).

Adicionalmente, fue necesario adaptar un criterio de estabilidad para el salto temporal de cálculo, para ello se seleccionó el número CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) cuyo valor oscila entre 0 y 1. Entre más cercano a 1 menor es el tiempo de cálculo, pero mayor el riesgo de desarrollar oscilaciones espurias [23]. La determinación del avance en tiempo se realiza a partir de:

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{a + |u|} \quad (13)$$

donde  $a$  y  $u$  son las velocidades del sonido y del fluido respectivamente.

Esta estrategia de discretización y metodología de solución permite obtener un modelo simple, preciso y numéricamente estable, que es aplicable al flujo en tuberías.

#### 4.1 Condiciones de frontera

La simulación del flujo en tuberías es fuertemente influenciada por su interacción con los extremos, ya que condiciona la forma en la que se representan la reflexión de las ondas y la forma en la que se transmite el flujo másico. Lo anterior exige una muy buena caracterización de las variables en estas localidades, pues su definición es un aspecto crítico en el buen desempeño del modelo.

A continuación se presenta la aproximación de las propiedades en las fronteras para extremos cerrados (problema de Riemann) y extremos abiertos (tubo DeHaller). En ambos casos se emplean ecuaciones equivalentes a las de los nodos internos (9 a 11), pero teniendo en cuenta que las propiedades en las caras corresponden a las condiciones de frontera, derecha para el punto inicial (1), e izquierda para el nodo final (N).

*Extremos cerrados:* se caracterizan por no permitir el flujo y reflejar ondas en el mismo sentido de las ondas incidentes (si llega al extremo una onda de compresión se refleja también una de compresión) [1]. La Figura 5 representa el comportamiento del flujo cuando se encuentra con extremos cerrados.



Figura 5. Representación de condiciones de frontera con extremos cerrados

Figure 5. Boundary conditions representation for closed ends

La Tabla 1 resume la aproximación de las propiedades en la frontera de extremos cerrados.

Tabla 1. Condiciones de frontera en extremos cerrados

Table 1. Boundary conditions for closed ends

Presión	$p_f = p_p$
Velocidad	$u_f = 0$ ó $u_f = -u_p$
Temperatura	$T_f = T_p$
Densidad	$\rho_f = \rho_p$

*Extremos abiertos:* pueden ser de entrada o salida de flujo desde la tubería, y en cada caso se requiere un planteamiento diferente. La Figura 6 representa el flujo a través de extremos abiertos. La Tabla 2 presenta las condiciones de frontera.



**Figura 6.** Representación de condiciones de frontera con extremos abiertos, a) entrada de flujo y b) salida de flujo

**Figure 6.** Boundary conditions representation for open ends, a) income flow and b) outcome flow

- *Entrada de flujo:* la temperatura y la velocidad se calculan de un balance de energía, teniendo en cuenta un proceso isentrópico entre el nodo N y la frontera, mientras la densidad se evalúa a partir de la ecuación de gas ideal.
- *Salida de flujo:* la presión en la frontera es igual a la presión en el exterior y su efecto sobre el flujo es la inversión de las ondas que inciden en el extremo. Las demás propiedades se igualan a las del punto aguas arriba de la frontera.

**Tabla 2.** Condiciones de frontera en extremos abiertos [24]

**Table 2.** Boundary conditions in open ends [24]

Entrada	Salida
$P_f = P_p$	$P_f = P_{atm.}$
$u_f = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{P_f}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]}$	$u_f = u_p$
$T_f = T_o - \frac{\gamma-1}{2\gamma R} u_f^2$	$T_f = T_p$
$\rho_f = \frac{P_f}{RT_f}$	$\rho_f = \rho_p$

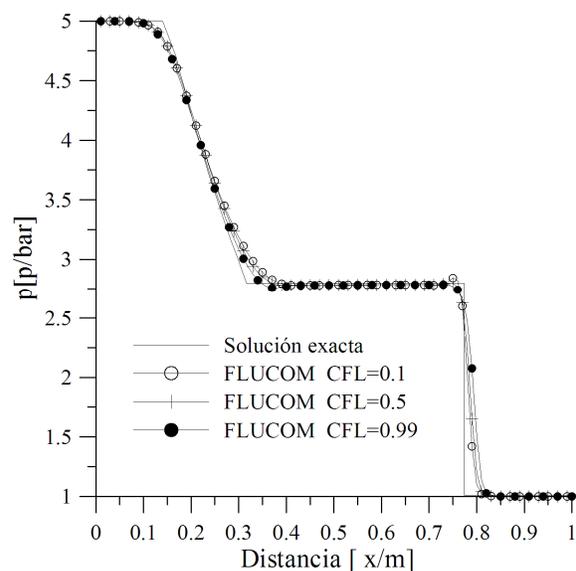
## 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Con las ecuaciones discretizadas por el MVF fue elaborado un programa de cálculo en MATLAB denominado FLUCOM, que además de solucionar problemas de Riemann y tubos DeHaller, también calcula el comportamiento del flujo al interior de la admisión y del escape de un motor monocilíndrico [25].

### 5.1 Problema de Riemann

El problema de Riemann fue simulado con FLUCOM para un tiempo de  $5 \times 10^{-4}$  s en una malla de 100 nodos. Las condiciones iniciales fueron establecidas a cada lado de la membrana por diferencias de temperatura y presión de 900 K y 5 bar respectivamente.

Entre los resultados existe una gran aproximación en la mayoría de los puntos, incluso para todos los criterios de estabilidad ensayados (CFL=0.1, 0.5 y 0.99). Sin embargo, en la discontinuidad (línea vertical), el ajuste es limitado debido al bajo orden de precisión del esquema *upwind* empleado.



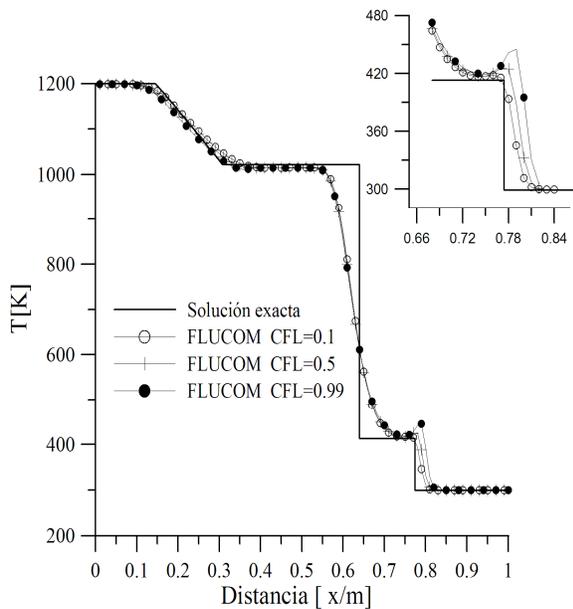
**Figura 7.** Presión con FLUCOM. Problema de Riemann

**Figure 7.** Pressure with FLUCOM. Riemann problem

La Figura 7 presenta los resultados del perfil de presión obtenido con el modelo y la solución tomada de [8]. La tendencia de las curvas muestra como para el instante de tiempo graficado, los puntos de los extremos, que inicialmente se encontraban a diferente presión y temperatura (gracias a la membrana), aún no han sido perturbados. Se nota también como viaja hacia la izquierda una onda de expansión ( $0.3 > x/m > 0.15$ ) y hacia la derecha una de compresión ( $x/m > 0.77$ ),

siendo separadas por un escalón (tramo central de presión constante).

La Figura 8 muestra que la temperatura (al igual que la densidad) presenta más escalones que la presión porque la discontinuidad ( $x/m \approx 0.64$ ) se manifiesta significativamente a través de esta propiedad. Con esta figura también puede evaluarse la influencia de los criterios de estabilidad. La curva con CFL=0.99 se aleja más de la solución exacta, pero a su vez consume el menor tiempo de computo. Con el CFL=0.1 el programa se torna un poco más lento porque tarda 0.5 s más, pero su ajuste es mejor.

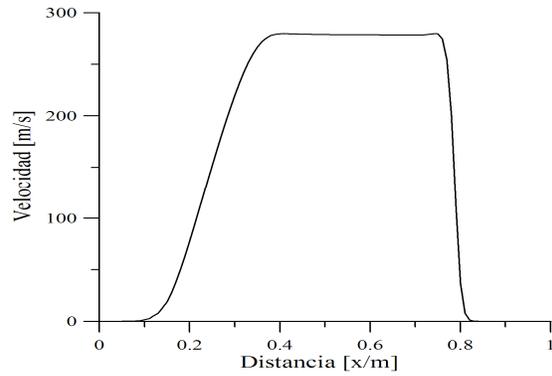


**Figura 8.** Temperatura con FLUCOM para el problema de *Riemann*

**Figure 8.** Temperature with FLUCOM for the *Riemann* problem

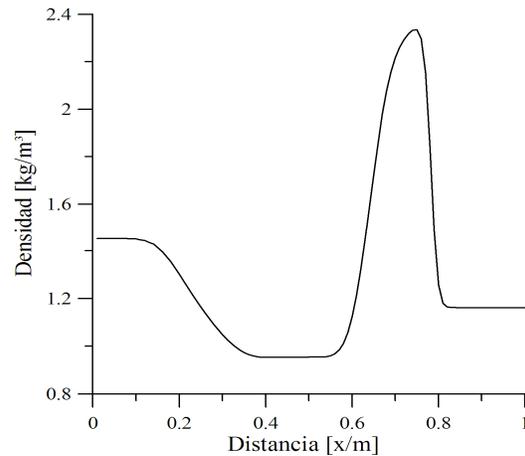
Aunque la validez de los resultados obtenidos con FLUCOM está sujeta a las aproximaciones deseadas y al tipo de gradientes a simular, en casos como el flujo en múltiples de admisión y escape de motores, donde los gradientes no son muy grandes, se considera suficiente su desempeño con un CFL=0.1 [26].

En las Figuras 9 y 10 se observa la variación de velocidad y densidad para el mismo instante de cálculo. En la primera se nota el movimiento de las perturbaciones desde los puntos centrales (dónde estaba inicialmente el diafragma) hacia los extremos. La forma de estas curvas depende del gradiente de presión y de las temperaturas iniciales en el tubo.



**Figura 9.** Velocidad con FLUCOM. Problema de *Riemann*

**Figure 9.** Velocity with FLUCOM. *Riemann* problem



**Figura 10.** Densidad con FLUCOM para el problema de *Riemann*

**Figure 10.** Density obtained with FLUCOM for the *Riemann* problem

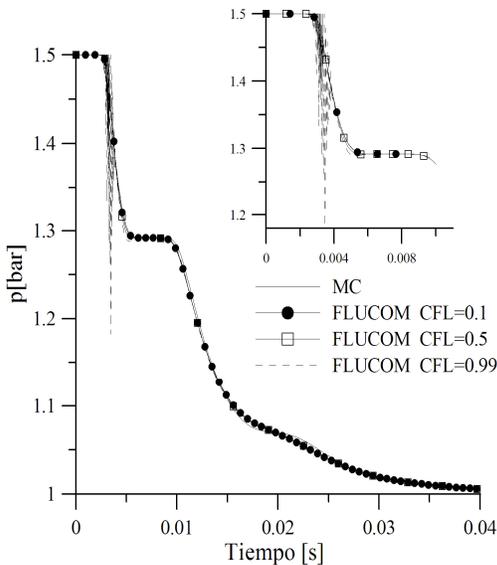
## 5.2 Tubo DeHaller

Los resultados del tubo *DeHaller* son presentados durante un tiempo de cálculo de  $35 \times 10^{-3}$  s en un tubo de 1 m, que se encuentra inicialmente presurizado a 1.5 bar, mientras el exterior se mantiene a 1 bar. En este caso los resultados de FLUCOM son comparados con lo reportado por Sánchez [19] con el método de las características.

La Figura 11 representa la variación de la presión en un punto central del tubo. Para tiempos de cálculo inferiores a 0.03 s después

de abierta la válvula, ese punto no ha sido perturbado y permanece a la presión inicial de 1.5 bar. Posteriormente recibe una onda de expansión que viaja desde el extremo de la válvula hasta 0.005 s, tiempo para el cual recibe una onda de compresión reflejada desde el tanque que equilibra el descenso en la presión y la mantiene constante hasta alcanzar 0.01 s.

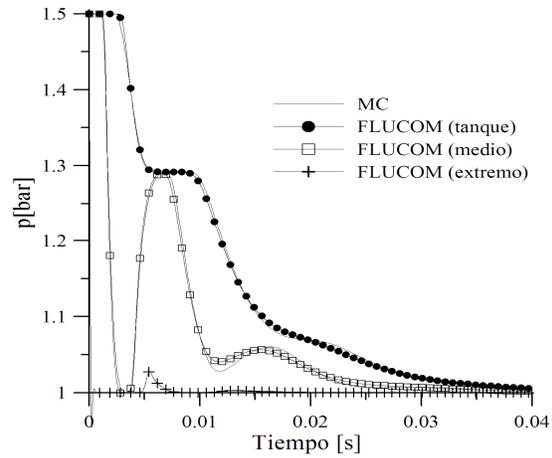
Con el transcurrir del tiempo el punto continúa en su descenso de presión, tendiendo al equilibrio con el exterior hacia 1 bar de presión. Después de 0.02 s se alcanza a registrar otra onda de compresión reflejada, pero de menor intensidad que la primera.



**Figura 11.** Presión con FLUCOM y método de las características en punto medio del tubo *DeHaller*  
**Figure 11.** Pressure with FLUCOM and characteristic method. Medium of *DeHaller* tube

En la solución de este problema el CFL juega también un papel preponderante, ya que como puede notarse en la Figura 11, cuando su valor tiende a 1 se presentan oscilaciones que introducen ruidos en la parte inicial de la solución (tiempos < 0.005 s).

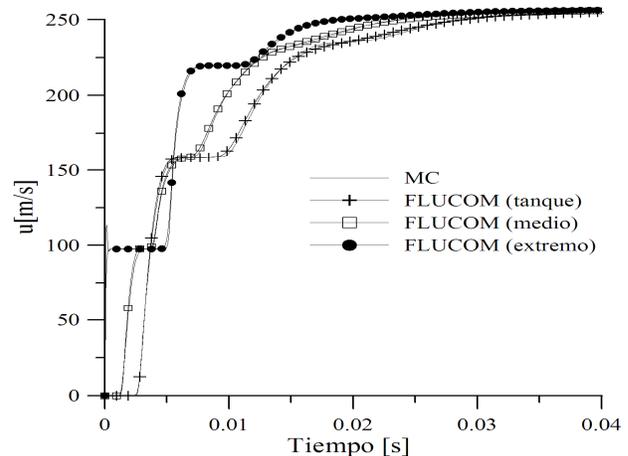
Al graficar tres puntos en el tubo DeHaller se encuentran los resultados presentados en la Figura 12. Uno de ellos está ubicado cerca del extremo del tubo comunicado con el *tanque*; otro es central o *medio*; y otro se encuentra cerca del extremo comunicado con el *exterior*.



**Figura 12.** Presión en tres puntos con FLUCOM y el método de las características para el tubo *DeHaller*

**Figure 12.** Pressure for three points of the *DeHaller* tube obtained with FLUCOM and characteristic method

Como es de esperar el punto del extremo tiende de manera repentina al equilibrio con el ambiente, aunque presenta una pequeña oscilación, producto de una onda de compresión que se refleja desde el tanque (0.005 s). El punto medio por su parte, recibe con mayor intensidad los cambios en las propiedades y oscila de manera similar al punto cercano al tanque.



**Figura 13.** Velocidad con FLUCOM y el método de las características en 3 puntos para el tubo *DeHaller*

**Figure 13.** Velocity for three points of *DeHaller* tube with FLUCOM and characteristic method

Con la Figura 13 se validan los resultados del modelo desarrollado, a través de comparaciones de la velocidad para los 3 puntos mencionados arriba. En esta figura se observa un cambio escalonado en la velocidad (producto de los escalones de presión), que son tendientes a la condición de equilibrio de descarga del tanque.

En general los resultados obtenidos con FLUCOM son muy aproximados a los publicados en la literatura [8,19], para diferentes propiedades (velocidad, y presión), lo cual queda demostrado para diferentes puntos de la geometría e instantes de cálculo.

## 6. CONCLUSIONES

- Se desarrolló una herramienta denominada FLUCOM capaz de simular problemas de dinámica de gases del tipo problema de *Riemann* y tubo *DeHaller*. Para ello se planteó un modelo matemático basado en las ecuaciones de conservación, bajo las consideraciones de flujo homoeentrópico y unidimensional.
- El MVF fue aplicado para discretizar las ecuaciones mediante un esquema *upwind* de primer orden y empleando el número CFL como criterio de estabilidad. Para este último se encontró como valor óptimo 0.1.
- Un aspecto crítico en el desarrollo de los modelos fue la definición de las condiciones de frontera. Ellas fueron planteadas con el mismo MVF según el tipo de frontera.
- Con este trabajo se contribuye al entendimiento de la fenomenología de flujos compresibles, y se dan pautas generales en la simulación de flujo en tuberías, que permiten continuar profundizando en el desarrollo de modelos relacionados con este tema en ingeniería.

## REFERENCIAS

[1] NABER, J. Building your own shock tube. Report MAS-E0502. Enero, 2005.

[2] TORO, E AND TITAREV, V. Derivative Riemann Solvers for Systems of Conservation Laws and ADER Methods. Journal of Computational Physics, Volume 212, Issue 1, 10. p.150-165. 2006.

[3] FELLING, M. Y PAGE, R. An Experimental Analysis and Demonstration of the Non-Steady Flow in a Shock Tube. Mechanical Engineering Department. Int. J. Eng. Ed. Vol. 14, N. 1, p. 59-66. 1998.

[4] ANDREOPOULOS, J., BRIASSULIS, AGUI, J. Y WATKINS, C. A shock tube research facility for high-resolution measurements of compressible turbulence. Experimental thermal and fluid science, 13, 430-446. 1996.

[5] AN, C., BARRON R. Y ZHANG, S. Stream function coordinate Euler formulation and shocktube application. Applied Mathematical Modelling, Volume 20, Number 6, p.421-428(8). 1996.

[6] BIJL, H. Y WESSELING, P. Computation of unsteady flows at all speeds with a staggered scheme. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS. Barcelona. 2000.

[7] BATTEN, P., PEARSON R., BASSETT, M. Y WINTERBONE, D. Multi-dimensional wave propagation in pipe junctions. SAE 1999-01-1186.

[8] BENSON, R. The thermodynamics and gas dynamics of internal combustion engines. Oxford University Press, I. 1982.

[9] VERSTEEG, H. Y MALALASEKERA, W. An introduction to computational fluid dynamics the finite volume method. Longman scientific & Technical, p.21. 1995.

[10] RUSELL, S. British Association Report, 6. p. 417-496. 1838.

[11] RUSELL, S. British Association Report, 13. p. 311-390. 1845.

[12] EARNSHAW, S. On the mathematical theory of sound. Phil Transactions. R. Soc, 150. p.133-148. 1860.

- [13] RIEMANN, B. Uber die Fortpflanzung ebener Lufwellen von endlicher Schwingungsweite, Gott. ABh., 8 (Math). p.43-65. 1858-1859.
- [14] BENAJES, J., REYES, E., GALINDO, J. Y PEIDRO, J. Predesign Model for Intake Manifolds in Internal Combustión Engines. SAE Technical Paper Series. International Congress and Exposition, Detroit-Michigan. SAE Paper 970055.
- [15] M.A. SAAD, Compressible Fluid Flow, 2/e. Prentice-Hall, 1993.
- [16] LIEPMANN, H.W. Y ROSHKO, A. Elements of Gas Dynamics. John Wiley and Sons, N.Y. 1965.
- [17] HIRSCH, C. Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 2. JohnWiley and Sons, N.Y. 1990.
- [18] APPEL, J.R. Sensitivity calculations for conservation laws with application to discontinuous fluid flows. Tesis doctoral. Virginia, USA. 1997.
- [19] SÁNCHEZ, C. Y VALENCIA, A. Modelación de la renovación de la carga en motores de combustión interna alternativos 4 tiempos. Proyecto de fin de carrera, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, 2003.
- [20] PEROTTI, M. Speed-up of a DFEM code for unsteady gas dynamics in pipes. Journal of Mechanical Sciences, Pergamon, N.41 p.793-813. 1999. PII: S0020-7403(98)00062-9.
- [21] DAVIDSON, L. A finite volume code employing collocated variable arrangement and cartesian velocity components for computation of fluid flow and heat transfer in complex three dimensional geometries. Rept. 95/11, Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Göteborg. 1995.
- [22] VIDOVIC, D. Superlinearly convergent unstructured staggered schemes for compressible and incompressible flows. Dissertation at Delft University of Technology. Tesis doctoral. ISBN 90-9018969-6. 108p. 2005.
- [23] WINTERBONE, D. Y PEARSON, R. Theory of engine manifold design. Wave action methods for IC engines. Professional Engineering publishing, ISBN 1 86058 209 5. 2000.
- [24] ZHANG, G. Y ASSANIS, D. Manifold gas dynamics modelling and its coupling with single- cylinder engine models using Simulink. ASME, 2003.
- [25] CUADRADO, I. Estudio Termofluidodinámico del proceso de renovación de la carga en motores de combustión interna alternativos. Tesis de Maestría. Universidad de Antioquia. 2007.