

Configuraciones de objetos y procesos matemáticos de cálculo integral

Leidy Johana Suárez Gómez¹ , Nury Yolanda Suárez Avila 
Universidad Santo Tomas Seccional Tunja- Colombia

Resumen

Se presentan resultados de una investigación en la que se analizaron clases de matemáticas desde el enfoque ontosemiótico. El enfoque de la investigación fue cualitativo con un método etnográfico de estudio de caso. Se realizó el análisis didáctico de una clase de cálculo integral dividida en cuatro momentos, en donde se identificaron los objetos y procesos matemáticos y se determinó qué tipo de conflictos semióticos se generan. Se destaca que los procesos por parte de la profesora son de institucionalización, representación, materialización, idealización y reificación. En algunas ocasiones se presentan procesos de significación y de generalización. Los procesos más comunes por parte de los estudiantes son los de representación, materialización e idealización. Muy pocas veces se presentan procesos de personalización y reificación, ya que la forma en que la docente da una clase no permite identificar cuándo cada estudiante participa en la construcción de los significados.

Palabras clave: análisis didáctico, enfoque ontosemiótico, objetos matemáticos, procesos matemáticos, conflictos semióticos

Autor de correspondencia:

¹leidy.suarez01@usantoto.edu.co

Recibido: 24 de mayo de 2019

Revisado: 25 de julio de 2019

Aprobado: 18 de febrero de 2020

Publicado: 11 de mayo de 2020



Para citar este artículo: Suárez, L., & Suárez, N. (2020). Configuraciones de objetos y procesos matemáticos de cálculo integral. *Praxis & Saber*, 11(26), e10992. <https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.10992>

Configurations of mathematical objects and mathematical processes of integral calculus

Abstract

Results of a research are presented, in which mathematical classes were analyzed following the onto-semiotic approach. The research approach was qualitative with an ethnographic method of case study. A didactic analysis of a class of integral calculus divided into four moments was carried out, in which the mathematical objects and processes were identified. It was determined what types of semiotic conflicts are generated. It is highlighted that the processes on the part of the professor are those of institutionalization, representation, materialization, idealization and reification. Sometimes there are processes of signification and generalization. On the part of the students, the most common processes are those of representation, materialization and idealization. Processes of personalization and reification rarely occur, since the way in which the teacher gives the class does not allow identifying when each student participates in the construction of meanings.

Keywords: didactic analysis, onto-semiotic approach, mathematical objects, mathematical processes, semiotic conflicts

Configurações de objetos e processos matemáticos de cálculo integral

Resumo

Apresentam-se resultados de uma pesquisa na que foram analisadas aulas de matemática a partir do enfoque ontosemiótico. O enfoque da pesquisa foi qualitativo, com um método etnográfico de estudo de caso. Realizou-se a análise didática de uma aula de cálculo integral dividida em quatro momentos, onde foram identificados os objetos e processos matemáticos e determinou-se que tipo de conflitos semióticos são gerados. Destaca-se que os processos por parte da professora são de institucionalização, representação, materialização, idealização e de reificação. Em algumas ocasiões, apresentam-se processos de significação e de generalização. Os processos mais comuns por parte dos alunos são a representação, materialização e idealização. Muitas poucas vezes apresentam-se processos de personalização e reificação, já que a forma na que o professor dá uma aula não permite identificar quando cada aluno participa na construção de significados.

Palavras-chave: análise didática, enfoque ontosemiótico, objetos matemáticos, processos matemáticos, conflitos semióticos

Introducción

En este artículo se presentan resultados de una investigación que tuvo como objetivo caracterizar las prácticas de los docentes de matemáticas del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Santo Tomás, Seccional Tunja, con el fin de buscar elementos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que la enseñanza de las matemáticas ha sido cuestionada en las instituciones de educación superior, puesto que en esta área los estudiantes presentan menor rendimiento académico, lo cual muchas veces es causa de deserción. Por otro lado, los estudiantes argumentan en la evaluación docente que los profesores son quienes no desarrollan un proceso de enseñanza eficaz. Por tal razón, se analizó la práctica de una docente a partir del análisis didáctico propuesto por el enfoque ontosemiótico [EOS], dado que permite describir y valorar el proceso de enseñanza con miras a mejorarlo.

En este artículo se presenta la identificación de objetos y procesos matemáticos de una clase de matemáticas, lo cual permite describir de forma detallada las prácticas discursivas y operativas realizadas tanto por la docente como por los estudiantes. Para el desarrollo de la investigación, inicialmente se indagó sobre el EOS, el cual, según diversos autores, dota a la didáctica de diferentes herramientas teóricas que permiten estudiar la clase de matemáticas de una manera más profunda y desde diferentes perspectivas (D'Amore, Font & Godino, 2007; Font, 2007; Font & Godino, 2006; Godino 2002; Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, Batanero & Roa, 2005; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Font & Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009). En este sentido, el EOS propone el análisis didáctico a partir de cinco niveles sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, tales como: identificación de prácticas matemáticas, determinación de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, identificación del sistema de normas y metanormas, y valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción (Godino, 2013).

La investigación se realizó bajo un enfoque cualitativo con un método etnográfico. Se adoptó la técnica estudio de caso, ya que se trabajó con una docente del área de matemáticas. En este artículo se presenta el resultado de una clase, la cual se dividió en cuatro momentos. Esto permitió identificar los objetos y procesos matemáticos tanto del docente como de los estudiantes. A partir de ellos se determinaron los conflictos semióticos que se generaron.

En los resultados se destaca que los procesos por parte del profesor son de institucionalización, representación, materialización, idealización y reificación. En algunas ocasiones se presentan procesos de significación y de generalización. Por parte de los estudiantes, los procesos más comunes son los de representación, materialización e idealización. Muy pocas veces se presentan procesos de personalización y reificación, ya que la forma en que la docente desarrolla su clase no permite identificar cuándo los estudiantes participan en la construcción de los significados.

Marco teórico

EOS.

El EOS surgió de la didáctica de las matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Con dicho fin se adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas y las interacciones entre las mismas (Godino, 2013). De la misma manera, Font (2007) afirma que el EOS¹ “trata de un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas” (p. 111).

Determinación de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos

En este nivel de análisis se pueden identificar en cada momento los objetos encontrados y procesos realizados por los sujetos —docente o estudiantes— que intervienen en la realización y planificación de las prácticas encaminadas al desarrollo de una tarea o resolución de situaciones problema, lo cual permite identificar y explicar los conflictos semióticos de tipo epistémico, cognitivo e interaccional (Godino, Batanero & Font, 2008).

Objetos y procesos matemáticos.

En una clase de matemáticas, en la cual el docente desarrolla diferentes prácticas tanto operativas como discursivas para la solución de un problema, ejercicio o tarea, suelen emerger conceptos, representaciones simbólicas, gráficas, propiedades, procedimientos y argumentos, entre otros, los cuales se puede decir que son objetos. Godino y Batanero (1994) definen objeto matemático como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos.

Facetas duales u objetos secundarios.

Cuando el docente introduce un concepto, parte de la definición y da algunos ejemplos, se habla de *objetos institucionales*. Al mismo tiempo, se presentan las dimensiones duales ostensivo-no ostensivo, ejemplar-tipo, expresión-contenido y unitario-sistémico, puesto que, al definir, argumentar y realizar procedimientos, el docente se expresa de forma verbal y simbólica. Además, se vale de los conceptos previos que tienen los estudiantes para la construcción de un nuevo concepto, al pasar de lo particular a lo general o viceversa, para que los estudiantes participen en la construcción de dicho concepto. Por otra parte, se habla de *objeto personal* cuando el estudiante de manera individual puede utilizar los preconceptos en la realización de las diferentes tareas propuestas, lo cual permite construir un nuevo concepto y expresarlo de forma verbal y simbólica en el desarrollo de las prácticas operativas y discursivas. Se puede señalar que las dimensiones duales están presentes constantemente, ya que su intervención permite identificar los objetos personales de los estudiantes en el desarrollo de la clase (Godino, 2002).

1. En algunas publicaciones el EOS se designa como *Teoría de las funciones semióticas*, al considerar que la *función semiótica* es un constructo clave de dicho enfoque.

Procesos matemáticos.

Cuando el docente planifica y realiza sus clases de matemáticas con el objetivo de lograr que el estudiante aprenda conceptos, con ayuda de aquellos ya adquiridos, desarrolla sus prácticas de manera consecutiva, de tal forma que lo enseñado sirva para que el estudiante participe en la construcción de los conocimientos útiles para construir nuevos conceptos. La constitución de estos objetos y relaciones —configuraciones—, tanto en su faceta personal como institucional, tiene lugar a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos, los cuales son interpretados como *secuencias de prácticas* (Godino & Font, 2007).

De esta forma, según el EOS, las entidades primarias dan lugar a procesos matemáticos, ya que “se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje —marcos institucionales y contextos de uso— en que participan” (Godino *et al.*, 2008, p. 7). Asimismo, la intervención de las dualidades dan lugar a los procesos cognitivos/epistémicos. Al respecto Godino *et al.* (2008) afirman que:

Tanto las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto. La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización,...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos: institucionalización-personalización; generalización-particularización; análisis/descomposición-síntesis/reificación; materialización/concreción-idealización/abstracción; expresión/representación-significación. (p. 9)

Es importante identificar los objetos primarios, las dualidades y los procesos cognitivo/epistémicos, los cuales permiten indagar acerca de cómo el docente desarrolla sus prácticas y cómo los estudiantes intervienen en ellas, puesto que permiten determinar el tipo de conflictos semióticos que se generan y, a partir de estos, analizar los aspectos que se pueden mejorar.

Metodología

La investigación adoptó el enfoque cualitativo, ya que busca interpretar la forma en que se toman decisiones y los argumentos para hacerlo, para lo cual se seleccionó a un grupo de 26 estudiantes de la asignatura de cálculo integral de una ingeniería y a la docente que la orienta. Se desarrolló bajo el método etnográfico con la técnica estudio de caso. Según Martínez (2006), el estudio de caso es una estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en un contexto singular, la cual podría tratarse del estudio de un único caso o de varios casos, al combinar distintos métodos para la recolección de información cualitativa, con el fin de describir, verificar o generar teoría.

La investigación se desarrolló en dos etapas: en la primera se identificaron las prácticas matemáticas de la docente, para luego dividir la clase en momentos, o cambio de tareas, en los cuales se describen algunas actividades realizadas por la docente y por los estudiantes. Esta etapa se documentó a partir de grabación de la clase, observación directa y la transcripción y descripción de los momentos de la clase.

En la segunda etapa se hizo el análisis de los momentos de clase a partir de las herramientas propuestas desde el EOS, a través de la identificación y descripción de objetos y procesos matemáticos, realizados por los sujetos —docente o estudiantes— que intervienen en la implementación y planificación de las prácticas encaminadas al desarrollo de una tarea o resolución de situaciones problema.

Resultados y discusión

A continuación se hace la descripción de un episodio de clase de cálculo integral, el cual se desarrolló durante dos horas, en segundo semestre de una ingeniería de la Universidad Santo Tomás, Seccional Tunja. El grupo está conformado por 26 estudiantes que tienen entre 17 y 24 años de edad, con diferente nivel socioeconómico. La docente tiene ocho años de experiencia en las asignaturas del área de matemáticas en la universidad. El episodio de clase se desarrolló durante la primera semana del semestre académico. En el primer tema, la profesora propone partir del concepto de *derivada* para construir el concepto de *antiderivada* de los diferentes tipos de funciones. En el semestre anterior los estudiantes habían estudiado el concepto de derivada de funciones. Por lo tanto, se supuso que tenían los conocimientos necesarios para construir el concepto de antiderivada. La descripción que se encuentra a continuación fue tomada de los apuntes que la profesora tenía en su plan de clase.

Tema: antiderivada.

Objetivo: construir el concepto de antiderivada a partir de ejemplos hasta llegar a una posible generalización o institucionalización.

- I. Dadas las siguientes funciones de la forma $f(x)=kx^n$
 $f(x)=x^3$, $f(x)=-5x^5$, $f(x)=6x^{-2}$, $f(x)=-8x^{1/2}$ y $f(x)=x^{1/2}$
 - a. Halle la derivada.
 - b. Intente encontrar un proceso que, a partir de la derivada que acaba de hallar, regrese a la función original o a otra muy parecida.
 - c. Complete la tabla con los resultados hallados en los literales a y b.

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$

- d. Halle una generalización para la antiderivada de funciones de la forma $f(x)=kx^n$.
- II. Trabajo con las funciones trascendentes: exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
 $f(x)=e^x$, $f(x)=\ln x$, $f(x)=\operatorname{sen} x$, $f(x)=\operatorname{cos} x$, $f(x)=\operatorname{tan} x$, $f(x)=\operatorname{cot} x$, $f(x)=\operatorname{sec} x$,
 $f(x)=\operatorname{csc} x$
 - a. Halle las derivadas de cada una de las funciones.
 - b. Intente encontrar un proceso que, a partir de la derivada que acaba de hallar, regrese a la función original o a otra muy parecida.

Transcripción del discurso de clase

La profesora² comienza anunciando que van a trabajar el concepto de antiderivada.

1. P: Dada una función $f(x)$ entonces se dice que es la antiderivada de $F(x)$, si . —Mientras escribe la definición de antiderivada en el tablero, también la comunica verbalmente—.

2. P: Para entender la noción de antiderivada, recordemos la derivada de funciones de la forma $f(x) = kx^n$.

—En el tablero:

$$\text{Si } f(x) = x^n \text{ entonces } f'(x) = nx^{n-1}$$

3. P: En ese orden de ideas ¿recuerdan la derivada de $f(x) = x^2$?

—En el tablero:

$$\text{Ejemplo: Si } f(x) = x^2 \text{ ; entonces } f'(x) = ?$$

4. E₁: La derivada es dos equis [$f'(x) = 2x$]

5. P: Ahora hallen la derivada de las siguientes funciones.

—En el tablero:

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = -5x^5$$

$$f(x) = 6x^{-2}$$

$$f(x) = -8x^{-1/2}$$

$$f(x) = x^{1/2}$$

6. E₂: Profe, cuando la función está multiplicada por una constante, ¿se debe hacer regla del producto?

7. E₁: Por ser constante, no es necesario hacer el [regla del] producto. Se puede dejar quieta la constante y derivar la función. ¿Cierto, profe?

8. P: —A E₁— Estás en lo cierto.

9. E₃: Profe, yo lo hice por regla del producto y me da el mismo resultado que a E₁.

10. P: Los dos procedimientos son válidos. Lo ideal sería que utilicen la propiedad, ya que simplifica los cálculos.

—En el tablero:

$$\text{Si } f(x) = kx^n, \text{ entonces } f'(x) = k(nx^{n-1}).$$

—La profesora pasa observando la solución de los ejercicios de algunos estudiantes—.

11. P: Ahora vamos a trabajar con las mismas funciones, para hallar la antiderivada. Retomemos la definición —señala la definición que escribió al inicio de la clase—. Ahora ya no se deriva la función, se busca una función que al derivarla se pueda recuperar la función

2. En adelante, P significa profesor; E_n significa un estudiante; G_n significa grupo.

inicial $f(x)$

—En el tablero:

Ejemplo: Si $f(x) = x^3$; entonces $F(x) = ?$

12. P: ¿Cuál es la función que al derivarla da equis al cubo?

13. E₂: Profe, yo sé. ¿Puedo pasar al tablero?

—La profesora le entrega el marcador a E₂, mientras hace una señal de afirmación—.

14. E₂: —En el tablero:

$$F(x) = x^4$$

$$F'(x) = 4x^3$$

—E₂ queda pensativa y resalta el número cuatro—.

15. E₄: Y ahora, ¿qué hacemos con ese cuatro?

16. E₂: Profe, ¿qué hacemos para que se vaya [eliminar] el cuatro?

17. P: —En el tablero la profesora aclara lo que E₂ lleva escrito—.

$$F(x) = x^4 \quad F'(x) = 4x^3 \quad f(x) = 1x^3$$

$$\text{Si } F(x) = x^4 \text{ entonces } F'(x) = f(x) = x^3$$

18. P: —Señala en el tablero—. Podemos ver que el coeficiente de equis al cubo es uno. ¿Qué operación hacemos para que el cuatro se simplifique? Es decir, que no aparezca; se elimine.

19. E₅: Profe, podemos dividir en cuatro y nos da equis al cubo.

20. P: —A E₅— ¿En dónde dividimos en cuatro?

— Señala al tablero en:

$$F'(x) = 4x^3 \text{ o } F(x) = x^4 .$$

21. E₅: En $F'(x)$.

22. E₃: —A E₅—. Yo creo que es en $F(x)$.

23. P: ¿Qué es lo que estamos hallando? ¿La antiderivada $F(x)$ o la derivada de la antiderivada $F'(x)$?

24. E₆: Profe, la antiderivada.

25. P: Bueno, en ese orden de ideas, ¿cuál sería la antiderivada de equis al cubo?

26. E₄: Queda así —pasa y escribe en el tablero—:

$$F(x) = \frac{1}{4} x^4$$

27. P: Ahora verifiquemos que la derivada de $F'(x) = f(x)$

—En el tablero:

$$F(x) = \frac{1}{4} (4x^3)$$

$$F(x) = \frac{4}{4} x^3 = x^3 = f(x)$$

28. P: Ahora en la siguiente tabla relacione cada función con su derivada y su antiderivada.

—En el tablero:

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$	Antiderivada $F(x)$
x^3	$3x^2$	$\frac{x^4}{4}$
$-5x^5$	$-25x^4$	$-\frac{5}{6}x^6$
$-6x^{-2}$	$-12x^{-3}$	$\frac{6}{-1}x^{-1}$
$-8x^{-1/2}$	$4x^{-3/2}$	$-16x^{1/2}$
$x^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
kx^n	kx^{n-1}	$\frac{k}{n+1}x^{n+1}$

—Pasados unos minutos, la profesora comienza a pasar a los estudiantes al tablero para discutir conjuntamente las respuestas encontradas—.

29. P: Ahora van hacer grupos de cinco estudiantes y van a socializar cómo sería una posible generalización del cálculo de la antiderivada para funciones de la forma $f(x) = kx^n$.

Discusión del grupo que llegó a la generalización.

Grupo 5

30. E₇: No entiendo. ¿Qué debemos hacer?

31. E₃: Según entiendo, debemos encontrar una fórmula que sirva para encontrar la antiderivada de cualquier función de esa forma: kx^n —señala al tablero—.

32. E₇: Nos toca hacer lo mismo que estas funciones —señala las funciones trabajadas en la tabla—.

33. E₂₀: — A E₃— Yo creo que la fórmula es $\frac{k}{n}x^{n+1}$.

34. E₃: Profe, ya tenemos la fórmula. Es $\frac{k}{n}x^{n+1}$.

35. P: Pueden verificar si les quedó bien tomando una de las funciones trabajadas en la tabla. Por ejemplo, prueben con esta función $f(x) = x^3$ —señala en el cuaderno de un estudiante—.

36. E₂₀: ¿Entonces el valor de en este caso sería 1, y n sería 3?

37. E₃: ¿Por qué k es 1?

38. E₂₀: Porque 1 es el coeficiente de x^4 .

39. E₇: Es decir $\frac{1}{3}x^{3+1}$ ¡hum! —queda pensativa—.

40. E₂₀: Entonces quedaría $F(x) = \frac{1}{3}x^4$ —muestra en el cuaderno—.

41. P: Según los ejemplos trabajados en clase, el denominador de la fracción queda igual al exponente de la expresión —señala en el cuaderno de un estudiante—.

42. E₂₀: Profe, estaba pensando que me quedó diferente. ¿Entonces qué hacemos para que el 3 quede como un 4?

43. E₃: Pues, en el denominador le podemos sumar uno igual que al exponente, como aquí —señala en su cuaderno—. Entonces debemos cambiar la fórmula.

44. P: ¿Entonces cómo quedaría?

45. E₇: —A E₃— Pues entonces la fórmula que propusiste está bien, solo que en el denominador le debes sumar uno, como dijiste. Así —le muestra en el cuaderno—

$$F(x) = \frac{1}{3+1} x^{3+1}$$

46. P: Pero no han contestado cómo queda la generalización para cualquier fórmula.

47. E₃: Quedaría así $\frac{1}{n+1} x^{n+1}$.

48. P: Muy bien. Aún no digan su conjetura. En un momento hacemos plenaria.

—La profesora pregunta grupo por grupo si ya pueden empezar a socializar las respuestas—.

49. P: Listo, como ya trabajaron en grupo, vamos a socializar las generalizaciones a las cuales llegaron. Por favor, pase un representante de cada grupo y cuéntenos a qué generalización llegaron.

50. G₁: En nuestro grupo cada uno trabajó solo y al final seleccionamos la correcta.

—En el tablero:

$$F(x) = \frac{k}{n} x^{n+1}.$$

51. G₂: Solo trabajamos dos porque los demás se limitaron a escuchar y a escribir.

—En el tablero:

$$F(x) = k(n+1) x^{n+1}.$$

52. G₃: Nosotros tomamos la función $f(x) = x^3$ y cambiamos el exponente por

—En el tablero:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

53. G₄: Nosotros llegamos a la misma respuesta que ellos —señala a G1—.

—En el tablero:

$$F(x) = \frac{k}{n} x^n + 1$$

54. P: Pero cuéntenos cómo llegaron a esa respuesta.

55. G₄: Yo les dije que esa podría ser y ellos estuvieron de acuerdo.

56. G₅: Inicialmente un compañero propuso una fórmula. Nosotros la empezamos a probar con los ejemplos y nos dimos cuenta de que estaba mal. La íbamos corrigiendo hasta que llegamos a la fórmula que creemos es la correcta.

—En el tablero:

$$F(x) = k \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

57. P: Retomemos nuevamente la función $f(x) = -5x^5$ y comprobemos con cada una de las generalizaciones si llegan a su correspondiente antiderivada. Cada uno haga el ejercicio en el cuaderno.

—Aproximadamente pasados 10 minutos, los estudiantes empezaron a discutir—.

58. E₁₀: Profe, con la única que me da es con la última fórmula —señala en el tablero la fórmula que escribió el G₅—.

59. E₂₀: Sí, profe, con la única que da la respuesta correcta es con nuestra fórmula.

—En ese momento todos empezaron a opinar que la generalización correcta fue a la que llevo el G₅—.

60. P: Muy bien chicos. Como pueden ver, es importante que ustedes formen parte en la construcción de conceptos, en este caso el de la antiderivada. Por tiempo no alcanzamos a analizar la antiderivada de las funciones exponencial, logarítmica y trigonométrica. Pueden ir revisando las siguientes funciones como tarea y las socializamos la siguiente clase.

—En el tablero:

$$f(x)=e^x, f(x)=\ln x, f(x)=\operatorname{sen} x, f(x)=\operatorname{cos} x, f(x)=\operatorname{tan} x, f(x)=\operatorname{cot} x, f(x)=\operatorname{sec} x, f(x)=\operatorname{csc} x,$$

—Se vio una satisfacción personal en los estudiantes que lograron llegar a la generalización, y también en los estudiantes que se aproximaron a dicha solución. En general se notó un ambiente agradable y motivante en los estudiantes en el transcurso de la clase—.

Análisis didáctico de la clase de matemáticas.

Para facilitar el análisis de la clase, se ha dividido en cuatro momentos de clase, los cuales se denotan como S1: [1-10], S2: [11-28], S3: [29-48] y S4: [49-60]. Cada momento se determinó teniendo en cuenta la realización de una tarea.

Identificación de objetos matemáticos.

En la figura 1 se muestra la identificación de los objetos primarios propuestos en el marco teórico y metodológico del EOS, realizada a partir de la transcripción.

Facetas duales.

En la figura 1, se clasificaron los objetos primarios de la clase por cada uno de los momentos. Esto permitió identificar la intervención de las facetas duales —objetos secundarios—, las cuales se describen a continuación:

Personal-institucional.

Este tipo de objetos se presentó en el momento en que la docente comenzó a construir el concepto de antiderivada. Hizo que el estudiante partiera de los conceptos ya adquiridos sobre el concepto de derivada. En la realización de ejercicios de profundización y en la

fue posible por tiempo.

Expresión-contenido.

El objeto *expresión* se presentó continuamente en la construcción del concepto de antiderivada a través del desarrollo de ejercicios y de su argumentación con la participación de la docente y de los estudiantes. El objeto *contenido* se presentó cuando los estudiantes, a partir del concepto recordado de derivada construyeron el concepto de antiderivada. De esta forma, los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente —expresión, significante— y un consecuente —contenido, significado— establecida por un sujeto —persona o institución— de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia (Godino *et al.* 2008, p. 8).

Extensivo-intensivo.

Estos objetos se presentaron implícitamente durante el desarrollo de la clase. Permitieron centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, puesto que se construyó el concepto de antiderivada a partir de la definición de las derivadas de los diferentes tipos de funciones potencia, lo cual permitió, a partir de las conjeturas, llegar a la definición formal de antiderivada. En consecuencia, esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático (Godino *et al.* 2008, p. 8).

Identificación de procesos matemáticos.

A continuación, se muestra la identificación de los procesos cognitivos/epistémicos en cada uno de los momentos, realizada a partir de la transcripción.

S1 [1-10]: Determinación de las derivadas de algunas potencias.

Docente.

Proceso de significación: define antiderivada [1].

Proceso de generalización, representación, reificación e institucionalización: recuerda derivada de las funciones de la forma $f(x) = x^n$ [2].

Proceso de representación y materialización: propone ejercicios en el tablero [5].

Proceso de idealización, materialización y significación: explica la derivada de una función por una constante, lo hace de forma verbal y simbólica [10].

E_1 .

Proceso de idealización y reificación: expresa verbalmente que la derivada es dos equis [4]; expresa que no es necesario aplicar la regla del producto para derivar la función [7].

E_2 .

Proceso de idealización y reificación: pregunta verbalmente a la profesora “cuando la función está multiplicada por una constante, ¿es necesario hacer regla del producto? [6].

E_3 .

Proceso de personalización, reificación e idealización: expresa verbalmente que derivó la función por regla del producto y le da el mismo resultado obtenido por un compañero [9].

S2 [11-28]: Determinación de la antiderivada de funciones de la forma $f(x) = kx^n$.

Docente.

Proceso de institucionalización, representación y materialización: escribe en el tablero la primera función $f(x) = x^3$. para antiderivar [11]; verifica que la antiderivada es $f(x) = \frac{1}{4} x^4$ [27]; propone a los estudiantes relacionar en una tabla la derivada y antiderivada de las funciones trabajadas [28].

Proceso de institucionalización, idealización y descomposición: aclara lo que E_2 lleva escrito [17]; explica y cuestiona sobre el coeficiente de la función $f(x) = x^3$, [18].

E_2 .

Proceso de personalización y reificación: expresa la antiderivada de $f(x) = x^3$ y verifica derivando $F(x) = x^4$ [17].

E_3 .

Procesos de idealización: expresa verbalmente que cree que cuatro se debe dividir a $F(x)$ [22].

E_4 .

Proceso de representación y materialización: pasa y escribe en el tablero la antiderivada de equis al cubo $F'(x)$ [26].

E_5 .

Proceso de idealización: expresa verbalmente que se puede dividir en cuatro para que dé equis al cubo [19]; responde a la profesora que se divide en cuatro [21].

S3 [29-48]: Determinación de la forma general de las antiderivadas de funciones del tipo kx^n , $n \neq -1$.

Docente.

Proceso de institucionalización e idealización: les indica a los estudiantes del G_5 que pueden verificar la fórmula y sugiere que trabajen con la función $f(x) = x^3$ [35]; indica a los estudiantes que al verificar la fórmula de la antiderivada, el exponente de la función debe ser igual que el denominador de la fracción [41]; cuestiona y guía a los estudiantes del grupo [44, 46 y 48].

E_3 .

Proceso de idealización: explica a su compañero que deben encontrar una fórmula que sirva para antiderivar cualquier función de la forma kx^n [31]; indica a la profesora que ya encontraron la fórmula [34]; pregunta a su compañero “¿por qué k debe ser 1?” [37].

Proceso de personalización, materialización y representación: deduce que en el

denominador de la fracción le pueden sumar uno, igual que en el exponente, y por esto deben cambiar la fórmula [43]; muestra a la profesora que la fórmula de antiderivada de función potencia es $F(x) = \frac{k}{n} x^{n+1}$. [47].

E_7 .

Proceso de idealización: expresa que no entiende lo que tienen que hacer [30]; señala al tablero y expresa que entiende que hay que hacer lo mismo que se hizo en el tablero [32]; indica a E_3 que la fórmula que propuso está bien y lo único que hay que hacer es agregarle más uno en el denominador [32].

Proceso de materialización: escribe en el cuaderno $\frac{1}{3} x^{3+1}$ [39]; expresa y muestra en su cuaderno $F(x) = \frac{1}{3} x^{3+1}$ [45].

E_{20} .

Proceso de idealización: pregunta a la profesora “¿entonces el valor de k en este caso sería 1 y n sería 3?” [36]; expresa que uno es el coeficiente de x^3 [38]; dice a la profesora que le quedó diferente y le pregunta qué deben hacer para que, en lugar de tres, dé cuatro [42].

Proceso de materialización: escribe en el cuaderno $F(x) = \frac{1}{3} x^4$ [40].

S4 [49-60]: Socialización y verificación de la forma general de las antiderivadas de funciones del tipo kx^n , $n \neq -1$. Derivadas y antiderivadas de otro tipo de funciones.

Docente.

Proceso de idealización: indica a los estudiantes que se van a socializar las respuestas y para esto debe pasar un representante de cada grupo [49]; indica a G_4 que diga cómo llegaron a la fórmula que escribió en el tablero [54]; indica a los estudiantes retomar la función $f(x) = -5x^5$ para verificar cada una de las fórmulas socializadas por los grupos y así identificar con cuál de todas hallan la antiderivada $F(x) = \frac{5}{6} x^6$ [57].

Proceso de materialización, institucionalización e idealización: escribe en el tablero las funciones $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \operatorname{cos} x$, $f(x) = \operatorname{tan} x$, $f(x) = \operatorname{cot} x$, $f(x) = \operatorname{sec} x$, $f(x) = \operatorname{csc} x$, y les indica que queda como tarea analizar cómo serían las antiderivadas de estas funciones [60].

G_1 .

Proceso de idealización y materialización: expresa verbalmente que cada integrante del grupo trabajó solo y al final seleccionaron la fórmula que creyeron correcta; escribe en el tablero $F(x) = \frac{k}{n} x^{n+1}$ [50].

G_2 .

Proceso de idealización y materialización: expresa verbalmente que solo trabajaron dos y que los demás se limitaron a escuchar y a escribir en el tablero $F(x) = k(n+1) x^{n+1}$ [51].

G_3 .

Proceso de idealización y materialización: expresa verbalmente que tomaron como ejemplo la función $f(x) = x^3$ y cambiaron el exponente por ; escribe en el tablero $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ [52].

G_4 .

Proceso de idealización y materialización: expresa verbalmente que llegaron a la misma respuesta que el grupo G_1 ; escribe en el tablero $F(x) = \frac{k}{n} x^n + 1$; dice que encontró la fórmula que creía era la correcta y los demás estuvieron de acuerdo [53].

G_5 .

Proceso de idealización y materialización: expresa verbalmente que inicialmente un compañero propuso una fórmula y ellos la empezaron a comprobar con los ejemplos y se dieron cuenta de que estaba mal, y la iban corrigiendo hasta que llegaron a la fórmula que creyeron correcta y al escribir en el tablero $F(x) = k \frac{x^{n+1}}{n+1}$ [56].

E_{10} .

Proceso de idealización: expresa verbalmente que la única fórmula que sirve para hallar la antiderivada es la expuesta por el G_5 [58].

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede ver que los procesos cognitivo-epistémicos por parte de la profesora en su mayoría fueron de institucionalización, representación, materialización, idealización y reificación, ya que por lo general la docente, en el momento de aclarar dudas, explicó los procedimientos de manera minuciosa y detallada. Expresó verbal y simbólicamente las propiedades y operaciones algebraicas necesarias para la solución de los mismos. Además, implícitamente, en el transcurso de la clase se presentaron procesos de significación, generalización y particularización, dado que el objetivo principal del desarrollo de las prácticas operativas y discursivas de la docente fue involucrar al estudiante en la definición formal de antiderivada.

Los procesos más comunes manifestados por los estudiantes fueron los de representación, materialización e idealización, puesto que la clase se desarrolló alrededor de la participación de los estudiantes, con la solución de algunos ejercicios en el cuaderno. Muy pocas veces se presentaron procesos de personalización y reificación, ya que la forma en que la docente dio su clase no permitió identificar si estudiantes entendieron o no los significados pretendidos.

Conflictos semióticos.

El análisis de los objetos primarios (figura 1) y los procesos matemáticos ayudaron a identificar algunos de los conflictos semióticos presentados en el desarrollo de la clase, tales como:

- En el momento que E_2 realizó los procesos de idealización y reificación, se identificó un conflicto semiótico de tipo cognitivo, ya que el estudiante no entendió qué regla de derivación tenía que aplicar —conceptos previos—. De igual forma, se presentó un conflicto de tipo interaccional en su relación con la docente y sus compañeros al expresar términos de forma inadecuada [6].
- Cuando E_3 realizó el proceso de idealización, se identificó que se generó un conflicto cognitivo, ya que el estudiante no entendía por qué el coeficiente de k era 1 [37].
- En E_7 , al realizar el proceso de idealización, se identificó que se generó un conflicto cognitivo, al expresar no entender lo que se debía hacer [30].
- Cuando E_{20} realizó el proceso de idealización, se identificó que se generó un conflicto

cognitivo, en el momento que expresó no saber qué hacer para que le diera cuatro en el denominador de la expresión en lugar de tres [42].

Se puede concluir que los conflictos generados en los cuatro estudiantes son de tipo cognitivo. Esto se debe a vacíos que traían en el dominio de conceptos previos. Por tal razón, no lograron deducir qué debían hacer en el momento que la docente les propuso encontrar la antiderivada de cualquier función.

Conclusiones

Como profesores de matemáticas, consideramos que durante el desarrollo de la clase las prácticas son implementadas únicamente por el docente. A partir del estudio de los objetos y procesos matemáticos, se logró intuir que el estudiante también realiza prácticas matemáticas en el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que a partir de estas se pudieron identificar los conflictos semióticos que se generaron y las normas que son propias de cada proceso.

A partir de la determinación de objetos y procesos matemáticos de la clase, se identificó que la forma en la que el docente comunica los significados institucionales en los procesos de enseñanza y aprendizaje incide significativamente en la apropiación y comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes. Esto se pudo percibir cuando la docente propuso a los estudiantes hacer grupos de trabajo con el objetivo de encontrar una posible generalización del cálculo de la antiderivada para funciones potencia.

Al identificar las prácticas y dividir las clases de la docente en momentos, se observa que ella trata de involucrar los conceptos previos que el estudiante tiene sobre derivada para introducir la definición de antiderivada, con el fin de involucrar al estudiante en la construcción de dicha definición. En este sentido, se evidencia la presencia de la dualidad unitario-sistémico, ya que la docente, antes de definir antiderivada, partió del concepto de derivada. Estos objetos matemáticos —derivada— participaron como entidades unitarias —que se suponen son conocidas previamente—, mientras que otros —antiderivada— intervinieron como sistemas que se deben descomponer para su estudio (Godino *et al.* 2008).

Es necesario que la docente implemente en sus prácticas situaciones problema que le permitan al estudiante tener una visión amplia sobre las aplicaciones de los conceptos e implemente diferentes estrategias para involucrar al estudiante de forma activa en el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, con el fin de identificar los significados alcanzados, los cuales permiten valorar si el estudiante está comprendiendo los contenidos enseñados.

Referencias

- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, 28(2), 49-77.
- Font, V. (2007). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz,

- B. Gómez & M. Torralbo (Eds.) *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 111-128). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Font, V., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.
- Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.
- Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-37.
- Godino, J., Batanero, C., & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 3-36.
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.
- Godino, J., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J., & Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf
- Godino, J., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. Especial, 131-155.
- Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., & Castro de, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.
- Londoño, J., & López, J. (2016). Análisis ontosemiótico de una propuesta de enseñanza del objeto matemático función en los reales: Un estudio para estudiantes que aspiran a

programas de ingeniería. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (9), 1398-1406

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento & Gestión*, (20), 165-193.