FASES DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO QUE PRESENTAN PROFESORES DE MATEMÁTICAS AL RESOLVER UN PROBLEMA DE GENERALIZACIÓN

Landy E. Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa y Guadalupe Cabañas-Sánchez

Se reportan seis fases del razonamiento inductivo que presentaron 19 profesores de matemáticas de secundaria al resolver un problema de generalización de un patrón cuadrático. Los datos se recolectaron mediante sus respuestas escritas y entrevistas. El análisis se realizó con base en el modelo de Cañadas y Castro (2007). Se encontró que, para generalizar de manera correcta, no basta con reconocer las regularidades en varios casos particulares, sino que se precisa de asociar esas regularidades con estructuras matemáticas que describan el patrón de manera general, y se detectaron dificultades en algunas fases que impidieron a los profesores llegar a generalizar.

Términos clave: Generalización; Patrón cuadrático; Profesores de matemáticas Razonamiento inductivo; Resolución de problemas

Inductive reasoning stages presented by mathematics teachers when solving a generalization problem

This investigation reports six inductive reasoning stages presented by nineteen middle school mathematics teachers when solving a generalization problem of a quadratic pattern. The data was collected through their written responses and interviews. The analysis was performed based on the model of Cañadas and Castro (2007). It was found that the correct generalization not only needed the recognition of regularities in some particular cases, but an accurate association between those regularities and the mathematical structures that describe the pattern in a general way. Furthermore, several difficulties that prevented the teachers from achieving a generalization were detected.

Keywords: Generalization; Inductive reasoning; Mathematics teachers, Problem solving; Quadratic pattern

Sosa, L., Aparicio, E. y Cabañas-Sánchez, G. (2020). Fases del razonamiento inductivo que presentan profesores de matemáticas al resolver un problema de generalización. *PNA 14*(2), 118-140.

En este estudio se indagó cómo profesores de educación secundaria razonan de manera inductiva para obtener reglas generales de patrones cuadráticos. Como es sabido, el razonamiento inductivo ayuda al desarrollo de procesos intelectuales (Mousa, 2017), particularmente en la adquisición de conocimiento y en la habilidad de resolución de problemas matemáticos (Klauer, 1996; Molnár, Greiff y Csapó, 2013; Tomic, 1995; Sriraman y Adrian, 2004). De ahí su importancia en el campo de la educación matemática y el interés de investigar en este tema. En matemáticas, es ampliamente valorada su utilidad para hacer generalizaciones, ya que permite descubrir propiedades y reglas generales a partir de la observación de similitudes entre hechos o casos particulares (Bills y Rowland, 1999; Pólya, 1966).

En la educación matemática en secundaria, una demanda curricular relacionada con el razonamiento inductivo es que los estudiantes formulen generalizaciones algebraicas de patrones lineales y cuadráticos, a partir de representaciones numéricas y geométricas (NCTM, 2000; Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017). De hecho, en la literatura sobre el tema, cada vez se enfatiza más la actividad de generalizar como una forma de desarrollar el pensamiento algebraico en la escuela (Demonty, Vlassis y Fagnant, 2018; Warren, Trigueros y Ursini, 2016). En este sentido, el razonamiento inductivo es un proceso cognitivo esencial para realizar dicha actividad, pues favorece el reconocimiento de patrones y la obtención de reglas (Haverty, Koedinger, Klahr y Alibali, 2000; Neubert y Binko, 1992; Cañadas, Castro y Castro, 2008).

Ciertamente, es posible favorecer el desarrollo del razonamiento inductivo desde la educación básica (Klauer, 1996; Molnár, 2011; Molnár et al., 2013; Papageorgiou, 2009) y recae en los profesores la labor de fomentar e interpretar el razonamiento matemático en la escuela (AMTE, 2017; NCTM, 2000). Como parte de esta labor, algunos investigadores sostienen que los profesores requieren ser capaces de identificar y explicar las acciones del razonamiento de los estudiantes al generalizar desde instancias particulares (e.g., El Mouhayar y Jurdak, 2013; Rivera y Becker, 2007).

Sin embargo, realizar esta labor representa una problemática o más bien dicho, es una función compleja. Por un lado, poco se enfatiza el razonamiento en la práctica docente y existe falta de claridad en cómo promoverlo en los estudiantes (Herbert, Vale, Bragg, Loong y Widjaja, 2015; Stylianides, Stylianides y Shilling-Traina, 2013). Por otro, se ha reportado que incluso profesores en formación tienen dificultades para generalizar, en específico para obtener reglas generales de patrones no lineales (Alajmi, 2016; Hallagan, Rule y Carlson, 2009; Manfreda, Slapar y Hodnik, 2012; Rivera y Becker, 2003). También se ha reportado que profesores en formación tienen dificultades para generalizar, especialmente patrones no lineales (Alajmi, 2016; Hallagan, Rule y Carlson, 2009; Rivera y Becker, 2003). En específico, las investigaciones sobre razonamiento inductivo concluyen que, si bien los futuros profesores identifican similitud numérica o figural en tareas de generalización de un patrón cuadrático y usan diferentes estrategias para descubrir el patrón, se les dificulta obtener la regla general (Manfreda et al., 2012; Rivera y Becker, 2003).

Aun cuando el razonamiento inductivo es un medio para generalizar desde casos particulares (Bills y Rowland, 1999), existe escasa información acerca de si los profesores lo incorporan en el aula de clases y cómo resuelven problemas usando este razonamiento (Sosa y Cabañas, 2017). Por consiguiente, se estableció como objetivo del estudio: describir y aportar evidencia empírica de las fases del razonamiento inductivo que profesores de matemáticas ponen de manifiesto al resolver un problema de generalización de un patrón cuadrático.

MARCO DE REFERENCIA

Como parte del marco de referencia se destacan algunas propuestas sobre la generalización, el razonamiento inductivo y sus fases.

Razonamiento inductivo y generalización

El razonamiento inductivo es un proceso que consiste en inferir una regla general mediante la observación y el análisis de casos particulares (Pólya, 1957). Permite reconocer una propiedad o característica invariante en un conjunto de casos específicos y extenderla a una clase general que englobe a esos casos (Bills y Rowland, 1999; Davydov, 2008). El producto de un proceso de razonamiento inductivo es una generalización (Klauer, 1996; Castro, Cañadas y Molina, 2010).

Obtener una generalización implica establecer una conexión de lo individual con lo general, donde lo general abarca la diversidad de lo individual (Davydov, 1990). Cuando esta conexión involucra ver lo general en lo particular, la generalización se asocia con el razonamiento inductivo (Hodnik y Manfreda, 2015). Es decir, este tipo de razonamiento representa un medio para conectar un conjunto de instancias particulares y formular generalizaciones que aplican a nuevas instancias similares. Por ejemplo, la generalización de una conjetura basada en la observación de un número finito de casos (Cañadas, Deulofeu, Figueras, Reid y Yevdokimov, 2007).

Un tipo de problemas que evocan razonar de manera inductiva, son aquellos en donde se requiere obtener una regla para un conjunto de elementos específicos (Glaser y Pellegrino, 1982). Por tanto, para analizar las fases que los profesores presentan al transitar de un conjunto finito de casos particulares a la obtención de la regla general de un patrón cuadrático, se les plantearon problemas con esta característica.

Fases del razonamiento inductivo

Pólya (1966) propone cuatro fases del razonamiento inductivo para sistematizar el descubrimiento de propiedades y reglas generales en matemáticas: (1) observar casos particulares; (2) formular una conjetura acerca de una similitud entre los casos particulares; (3) hacer una generalización y (4) verificar la conjetura ensayando con otros casos. Tomando como base el trabajo de Pólya y un estudio empírico, Cañadas y Castro (2007) proporcionan un modelo de siete fases para describir el razonamiento inductivo en estudiantes de secundaria al resolver problemas sobre sucesiones en progresión aritmética. Las siete fases del modelo son: (a) trabajo con casos particulares, (b) organización de casos particulares, (c) identificación de un patrón, (d) formulación de conjetura, (e) justificación de conjetura (verificación empírica de la conjetura), (f) generalización y (g) demostración (prueba formal).

Estas fases no siguen necesariamente un orden lineal en el paso de lo particular a lo general, incluso algunas podrían no llevarse a cabo (Cañadas, Castro y Castro, 2009). Aunque el modelo de Cañadas y Castro (2007) ha sido generado para analizar el razonamiento inductivo de estudiantes en tareas de identificación de patrones y generalización, hemos adoptado dicho modelo para examinar en qué medida tales fases se evidencian en profesores durante la resolución de un problema de generalización matemática.

METODOLOGÍA

Para entender el uso del razonamiento inductivo en los profesores, se desarrolló una investigación cualitativa bajo un enfoque descriptivo e interpretativo de las acciones y representaciones utilizadas al resolver problemas que implicaban generalizar el comportamiento cuadrático de variables. La elección de este enfoque radica en que, en este tipo de estudios cualitativos, los datos proporcionan información acerca de las percepciones, emociones, experiencias y pensamientos de los participantes; a partir de las expresiones propias de sus pensamientos y sentimientos se genera entendimiento acerca de su comportamiento (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

Participantes y contexto

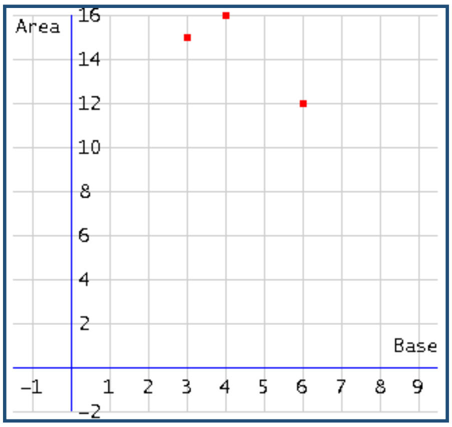
Los participantes en este estudio fueron diecinueve profesores en servicio (nueve mujeres y diez hombres), que enseñan matemáticas en escuelas públicas de educación secundaria en el sureste de México. Los profesores disponían de una formación profesional en Escuelas Normales (Colegios de formación de profesores en México) y otros en ingenierías. Todos participaron de manera voluntaria en el estudio sin recibir algún tipo de remuneración laboral o económica.

El criterio de selección de los profesores fue haber enseñado sucesiones, ecuaciones y funciones cuadráticas en por lo menos un periodo escolar, pues la generalización de patrones cuadráticos está asociada al estudio de estos contenidos matemáticos en el currículo mexicano de educación secundaria (SEP, 2017).

Problema matemático planteado

En el estudio se implementaron dos problemas matemáticos relacionados con sucesiones de valores específicos, que crecían o decrecían con un comportamiento cuadrático. Cada uno demandaba obtener la regla general de patrones cuadráticos a partir de casos particulares. En ambos se requería razonar inductivamente para reconocer una relación funcional entre tales valores, la cual correspondía a una función polinomial de segundo grado. Los casos particulares se podían expresar en los distintos sistemas de representación de las funciones polinomiales de segundo grado: tablas, gráfico, algebraico, pictórico y verbal (Cañadas y Castro, 2013) y la regla general de manera verbal o algebraica. En este artículo se reportan los resultados del análisis de uno de los problemas (figura 1), el cual involucra una relación entre variables continuas. Las variables son: la medida del área de una familia de rectángulos (variable dependiente); y la medida de la base de los rectángulos de la familia (variable independiente).

En la gráfica se representan las medidas de la base y el área de tres rectángulos de una familia de estos.



A partir de dicha información, genere una expresión algebraica para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de esa familia. Argumente detalladamente el proceso de solución.

Figura 1. Problema de generalización para la recolección de datos

En el planteamiento del problema se muestra una gráfica con tres puntos en un plano cartesiano. Los valores de las coordenadas de estos puntos representan la medida de la base (b) y del área (A) de tres rectángulos. El problema consiste en inducir una regla general para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de la familia a la que pertenecían dichos rectángulos. La característica esencial de esta familia es que el semiperímetro de cada rectángulo mide ocho unidades.

El problema propuesto implica generalizar el patrón cuadrático correspondiente a los valores de la medida del área de una familia de rectángulos. Los primeros casos particulares se pueden obtener de las coordenadas de los puntos dados en el plano cartesiano y representarse de manera verbal, numérica o geométrica. Las coordenadas de estos puntos son: (3, 15), (4, 16) y (6, 12). Las abscisas corresponden a los valores de la base (3, 4 y 6 unidades) de tres rectángulos de la familia y las ordenadas a las medidas de sus áreas (15, 16 y 12 unidades cuadradas, respectivamente). En la tabla 1 se representan numéricamente algunos casos particulares del problema.

Tabla 1
Casos particulares en el problema

Base	Área
1	7
2	12
3	15
4	16
5	15
$\vdots$	$\vdots$

Considerando el contexto geométrico del problema y la familiaridad de los profesores con la fórmula para calcular la medida del área de rectángulos: $A = b \times h$, se prevé que podían utilizar esta fórmula para calcular valores de las alturas (h) de los rectángulos y trabajar con estos valores en los casos particulares. Para inducir la regla general se requiere reconocer alguna regularidad o patrón entre los primeros casos particulares y determinar una relación funcional entre los valores de la base y del área de los tres rectángulos conocidos u otros. Por ejemplo, notar que los valores del área pueden descomponerse como dos factores multiplicativos: el valor de la base y la diferencia de 8 menos la base (tabla 2). O bien, si se consideran las variables b y h, reconocer que la suma de las medidas de la base y de la altura de la familia de rectángulos mide 8 unidades ($b + h = 8$).

Tabla 2
Patrón en los valores del área

Base	Área
1	$7 = (1)(7) = (1)(8 - 1)$
2	$12 = (2)(6) = (2)(8 - 2)$
3	$15 = (3)(5) = (3)(8 - 3)$
4	$16 = (4)(4) = (4)(8 - 4)$
5	$15 = (5)(3) = (5)(8 - 5)$

Base	Área
⋮	⋮

La regla general para determinar el área de los rectángulos podía representarse de manera verbal o algebraica. Una expresión algebraica de la regla general es: $A = b(8 - b)$, con $0 < b < 8$. En el proceso de razonamiento para resolver la tarea era posible utilizar diferentes sistemas de representación para pasar de los casos particulares a la regla general y, por tanto, no había una forma única de expresar la regla. Un método para demostrar la generalización consistiría en utilizar el modelo general de una función polinomial de segundo grado, $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, con el objetivo de validar que para $y = A$ y $x = b$ se obtiene la expresión $A = 8b - b^2$ (es decir, $a_2 = -1$, $a_1 = 8$ y $a_0 = 0$). Algebraicamente, los valores a_2, a_1 y a_0 se pueden determinar mediante la resolución del sistema de ecuaciones resultante de sustituir los valores de A y b dados en el problema. Otra forma de construir una prueba de la generalización sería por un método gráfico-analítico. Esto es, interpretar la gráfica de la parábola que pasa por los puntos mostrados en el plano cartesiano (Figura 1) y transformar analíticamente la ecuación canónica de una parábola vertical para probar que se obtiene la expresión $A = -(b - 4)^2 + 16$, que es equivalente a $A = b(8 - b)$.

Recolección de datos y análisis

El problema fue resuelto por los profesores de manera escrita e individual. A cada profesor se le pidió que planteara y justificara detalladamente su procedimiento para determinar la solución. Los datos fueron recolectados con las hojas de respuestas y posteriormente, mediante grabaciones de audio, a partir de las entrevistas realizadas a los participantes.

El objetivo de la entrevista fue entender con mayor profundidad el proceso de razonamiento inductivo de los profesores para pasar de la observación de casos particulares a la generalización o, en algunos casos, para examinar las dificultades que enfrentaron para obtener la regla general. La entrevista se estructuró en dos partes. En la primera, se les solicitó que explicaran en voz alta el razonamiento seguido en su resolución, desde la lectura del enunciado del problema hasta llegar a la solución. En la segunda parte, se les plantearon preguntas sobre las razones de algunas afirmaciones establecidas en su procedimiento de solución. Además, se tomaron notas de las acciones y del orden que siguió cada participante durante la resolución del problema, así como notas de la entrevista sobre aspectos relevantes señalados por cada uno mientras explicaban su razonamiento.

El análisis del razonamiento inductivo de los profesores se efectuó con base en las representaciones que emplearon para expresar los casos particulares y en el paso hacia la generalización (Cañadas et al., 2009). Debido a la presentación verbal del problema y a la gráfica de los datos, se consideró que los participantes podrían expresar su razonamiento usando representaciones verbales, numéricas, geométricas y algebraicas. Para identificar las fases del razonamiento de los profesores y el tránsito de una a otra fase, se tomaron como referencia las características de cada fase señaladas en Cañadas y Castro (2007). En la tabla 3 se indican tales características según las especificidades del problema planteado.

Tabla 3
Fases y características

Fase	Características
Trabajo con casos particulares	Número de casos particulares
	Tipos de casos
	De manera sistemática
Organización de casos particulares	Tablas, figuras, …
Identificación de un patrón	Basada en…
Formulación de conjetura	Uso de conocimiento sobre estructuras matemáticas lineales y cuadráticas
Justificación de conjetura	Basada en…
Generalización	Expresión de la regla para determinar el área
Demostración	Realización de prueba formal: método algebraico o gráfico-analítico

Fuente: Cañadas y Castro (2007, p. 72).

RESULTADOS

Se investigó el razonamiento inductivo de profesores de secundaria en la resolución de un problema de generalización con variables continuas. Para ello se emplearon las fases citadas en Cañadas y Castro (2007). Se obtuvo que los profesores dieron muestra de seis de tales fases en la resolución del problema; la fase de demostración no fue presentada en la solución dada por los profesores. De los 19 profesores, solamente el 26% alcanzó a obtener la regla general solicitada en el problema. En la tabla 4 se muestra el porcentaje de profesores que manifestaron cada fase.

Tabla 4
Porcentaje de profesores en cada fase de razonamiento inductivo

Fases	Porcentaje

Fases	Porcentaje
Trabajo con casos particulares	100%
Organización de casos particulares	79%
Identificación de un patrón	63%
Formulación de una conjetura	47%
Justificación de la conjetura	37%
Generalización de la conjetura	26%
Demostración	0%

Trabajo con casos particulares

La obtención de casos particulares fue la fase inicial del razonamiento de todos los profesores. Se llevó a cabo por medio de la traducción de las coordenadas de los puntos en el plano cartesiano a su representación en forma numérica o geométrica. Todos profesores tomaron los valores 3, 4 y 6 unidades, como medida de la base (b) de tres rectángulos y los valores 15, 16 y 12 unidades cuadradas, como medida de su área (A), respectivamente. Posteriormente, determinaron los valores de las alturas (h) de esos rectángulos, utilizando la fórmula para calcular la medida del área de rectángulos: $A = b \times h$, y trabajaron también con estos valores como casos particulares. En la tabla 5 se indican las características de los casos particulares identificados en las respuestas:

Tabla 5

Características de los casos particulares observados

Casos particulares						
Número		Tipos de casos			Sistemáticamente	
3	>3	Numérico	Gráfica	Figura	Sí	No
Número de profesores						
8	11	13	3	3	12	7

De acuerdo con los datos mostrados en la tabla 5, los profesores representaron mayormente los casos particulares de manera numérica. Además de trabajar con casos numéricos, cinco profesores representaron los casos particulares geométricamente, trazando puntos y curvas en la gráfica cartesiana (figura 2) o dibujando una secuencia de figuras de rectángulos (figura 3).

Del total de profesores, 11 trabajaron con un número mayor a los tres casos particulares obtenidos de la gráfica. Estos profesores obtuvieron nuevos casos particulares con el propósito de reconocer una regularidad numérica y verificar si se repetía en otros casos. Quienes procedieron de esta manera lograron identificar un patrón, pero no en todos los casos el patrón era correcto.

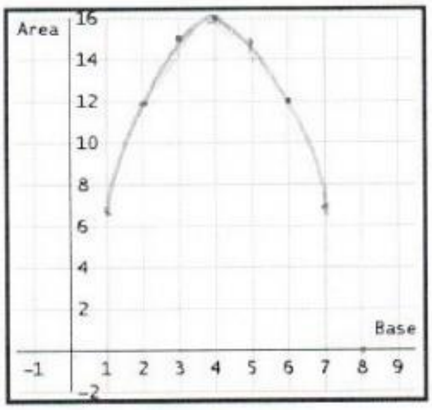


Figura 2. Representación geométrica cartesiana de casos particulares

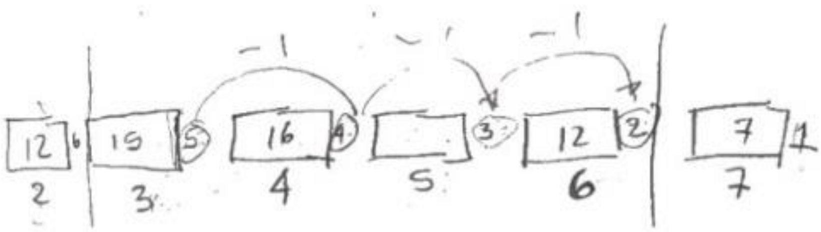


Figura 3. Representación geométrica secuencial de casos particulares

Un factor clave para la obtención de otros casos particulares, tanto de manera numérica como geométrica, fue la ordenación de los casos conocidos respecto a una variable, ya que les permitió identificar una característica común entre un caso y el antecedente (o el consecuente). Doce profesores ordenaron de menor a mayor los tres casos particulares, respecto a la medida de la base de los rectángulos. Al hacerlo, notaron que conforme la base aumenta una unidad, la altura disminuye una. Así, obtuvieron las medidas de otros rectángulos de la familia. Esto fue evidente cuando añadieron el rectángulo de dimensiones $b = 2$ y $A = 12$, como un caso antecedente al rectángulo que mide 3 unidades de base; y también un rectángulo con dimensiones $b = 5$ y $A = 15$, entre aquellos cuya base mide $b = 4$ y $b = 6$ unidades.

Esta manera sistemática de representar los casos particulares favoreció que los profesores consideraran estos casos como elementos de una secuencia de números o figuras y, por tanto, se enfocaran en buscar alguna regularidad entre ellos. Se observó que siete participantes trabajaron solamente con tres casos particulares numéricos sin ordenarlos, no logrando identificar algún patrón en los datos.

Organización de casos particulares

De los profesores participantes, 15 de estos organizaron los casos particulares para buscar alguna regularidad, pero solamente 12 los ordenaron de manera sistemática; cuatro profesores no organizaron datos de los casos particulares. En cuanto a la forma de representación utilizada, nueve profesores realizaron una representación numérica, un profesor llevó a cabo una representación geométrica y cinco profesores ambas representaciones.

Se detectó que la organización de los casos particulares usando representaciones numéricas, ya sea en tablas o de manera similar en columnas o filas de valores, predominó por encima de la organización con representaciones geométricas (secuencias de figuras o puntos en la gráfica).

Sin embargo, algunos no realizaron inicialmente tal organización, sino hasta que se percataron de la necesidad de ordenar los casos para facilitar la búsqueda de regularidades, después de algunos intentos infructuosos con los datos desorganizados. Los cuatro profesores que no organizaron los datos del problema se enfocaron en un trabajo puntual con los casos particulares de manera no sistemática y no alcanzaron a generalizar (figura 4).

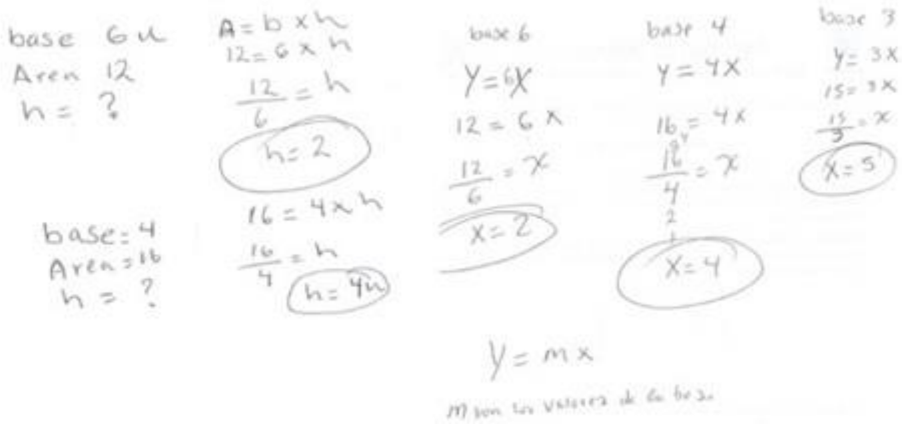
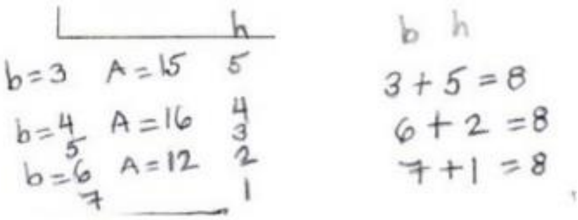


Figura 4. Solución no sistemática, sin organizar casos particulares

Identificación de un patrón

En cuanto a la identificaron de un patrón, 12 profesores lo hicieron a partir de un conjunto específico de casos particulares (tres o más) y siete profesores no llegaron a identificarlo. Se observaron dos tipos de patrones en el razonamiento de los profesores: numéricos y geométricos.

La búsqueda de un patrón se basó principalmente en la observación de regularidades en por lo menos tres casos particulares, mediante un trabajo aritmético o con apoyo visual de la gráfica. El trabajo aritmético consistió en asociar los valores de las variables b y A, o las variables b y h, a través de relaciones aditivas o multiplicativas. Por ejemplo, el profesor A relacionó los valores de la base y la altura de tres rectángulos mediante una adición. Así identificó el siguiente patrón: la suma de la base y la altura de esos rectángulos es igual a un valor constante (figura 5).



La suma de la base más la altura es igual a 8…

Figura 5. Identificación de patrones mediante relaciones aditivas y multiplicativas (profesor A)

Por su parte, el profesor B reconoció un patrón de comportamiento cuadrático en los valores del área, por medio del establecimiento de relaciones multiplicativas entre los valores del área y la base de algunos rectángulos (figura 6), pero no llegó a generalizar el patrón.

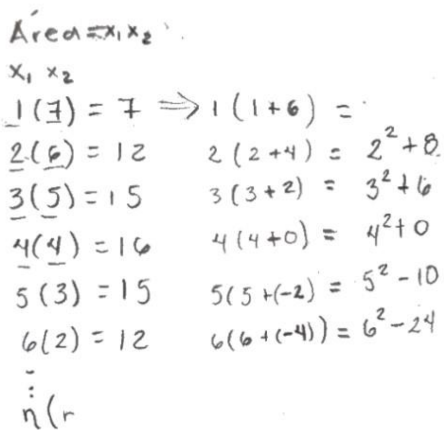


Figura 6. Identificación de patrones mediante relaciones aditivas y multiplicativas (profesor B)

Visualmente, tres profesores reconocieron dos patrones geométricos. Un profesor asumió que los puntos en la gráfica seguían un comportamiento lineal (figura 7) y dos reconocieron un patrón de comportamiento cuadrático, estos consideraron que los puntos pertenecían a una parábola (figura 8).

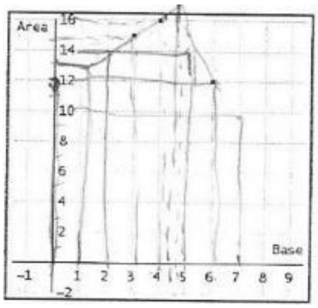


Figura 7. Patrón geométrico-lineal identificado en la gráfica cartesiana

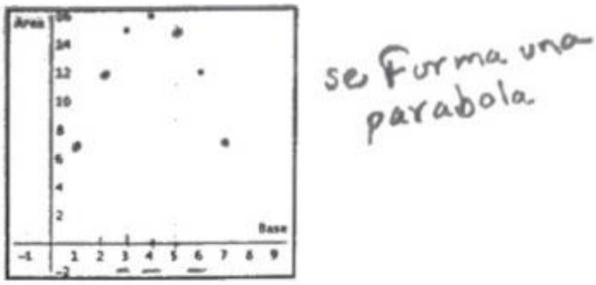


Figura 8. Patrón geométrico-cuadrático identificado en la gráfica cartesiana

El razonamiento de los profesores que no lograron identificar el patrón se caracterizó por realizar un análisis puntual de cada caso particular, sin encontrar alguna relación matemática que conecte a varios casos (figura 4).

Formulación de conjetura

De los 12 profesores que identificaron algún tipo de patrón numérico o geométrico, nueve formularon una conjetura; tres omitieron esta acción e inmediatamente intentaron generalizar. Quienes llevaron a cabo esta fase, establecieron una hipótesis sobre el comportamiento de los valores del área de los rectángulos y usaron estructuras lineales y cuadráticas para describir el patrón de comportamiento. Las hipótesis fueron establecidas mediante el análisis de relaciones numéricas entre casos particulares.

Por ejemplo, el profesor C supuso que el comportamiento de los puntos dados en la gráfica podría corresponder a una parábola, entonces intentó encontrar una relación funcional entre los valores de la base y el área de los rectángulos a partir del análisis de tres casos particulares. Explicó la formulación de su conjetura (en negritas) con las siguientes palabras.

Profesor C: A partir de los tres datos que me dieron, me di cuenta de que no podría tratarse de la gráfica de una recta, pero con la gráfica **pensé que sería una parábola** e hice una relación entre la base y el área, y a través de esos dos datos [valores de la base y del área] encontré otro dato que es la altura para obtener el área. Entonces habría que relacionar los datos de la base con la altura para obtener el área. Encontré que a un número fijo había que quitarle la variable base y, en este caso es el 8, nos da la altura $(8 - b = h)$. Y con la altura calculamos el área, e hice la relación, y efectivamente nos da una función cuadrática que corresponde a la gráfica (parábola) y **quedaría que el área $(\boldsymbol{A})$ tiene que ser igual a menos b cuadrada $(-\boldsymbol{b}^2)$, en este caso b es la base, más ocho veces $\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{8b})$**, …

Investigador: ¿Cómo obtuvo la relación $8 - b = h$?

Profesor C: Esa salió al encontrar un número, y digamos tomar otra variable en este caso la altura, que al variar la base me diera la altura. Entonces encontré que el número fijo era 8, vi la relación a la hora de ordenar los números en forma de tabla

Los nueve profesores enunciaron proposiciones sobre el posible patrón en el problema de manera hipotética, teniendo en cuenta un número específico de casos particulares sin tener certeza de su veracidad en general. Las conjeturas fueron expresadas de forma verbal o de manera simbólica. En los patrones reconocidos por los profesores, se detectaron tres estructuras matemáticas: aditivas, lineales y cuadráticas. En la tabla 6 se presentan los diferentes tipos de conjeturas formuladas y la estructura subyacente al patrón correspondiente.

Tabla 6
Conjeturas formuladas

Conjetura	Estructura del patrón
$A = -b(8 - b)$ (A: medida del área; b: medida de la base)	Cuadrática
$A = -(x - 4)^2 + 16$ [A: medida del área; x: medida de la base]	Cuadrática
$A = B^2 + C$ [A: medida del área; B: medida de la base; y C: constante]	Cuadrática
La suma de la base más la altura es igual a 8. ($b + h = 8$, b: medida de la base, h: medida de la altura)	Aditiva
Existe una relación de proporcionalidad o razón de cambio (gráfica con segmentos de recta)	Lineal

Justificación de conjetura

Entre los profesores que formularon una conjetura, siete intentaron validarla de manera empírica. Verificaron la veracidad o falsedad de su conjetura ensayando con al menos un caso particular conocido y uno nuevo. Por ejemplo, el profesor C primero verificó que su conjetura funcionaba para los tres casos dados en la gráfica, y después comprobó que sea verdadera para dos nuevos casos ($b = 7, A = 7$; $b = 5, A = 15$).

Profesor C: … y quedaría que el área tiene que ser igual a menos b cuadrada, en este caso b es la base, más ocho veces b, y funciona para los tres datos que da el problema… Este fue un planteamiento [señala los valores $b = 7, h = 1$ y $A = 7$ en su listado de valores, figura 9 (c)] para ver si funcionaba la ecuación del área. Luego pensé en $b = 5$ y $h = 3$, entonces dije para base cuatro $(b = 4)$, área dieciséis $(A = 16)$, …

Investigador: ¿Cómo concluyó que la gráfica era cuadrática y no lineal?

Profesor C: Hice de manera geométrica los rectángulos para ir viendo cómo van (figura 9 (a)), entonces de manera gráfica, ya veía los puntos de las áreas y de la base, entonces de ahí pensé que de manera gráfica tenía que ser una parábola. Entonces al colocarlos aquí en la gráfica (figura 9 (b)), y colocar allí (figura 9 (c)) los números que podrían estar escondidos, en este caso la base dos $(b = 2)$, y la base cinco $(b = 5)$ que es un intermedio entre la base 4 y la base 6, pues sí completó la secuencia.

Cinco profesores formularon una conjetura verdadera al reconocer y describir adecuadamente la estructura cuadrática asociada al patrón. La justificación de la conjetura favoreció que se percataran de la aplicación del patrón a casos no observados originalmente. Esta acción fue importante en el paso hacia la generalización.

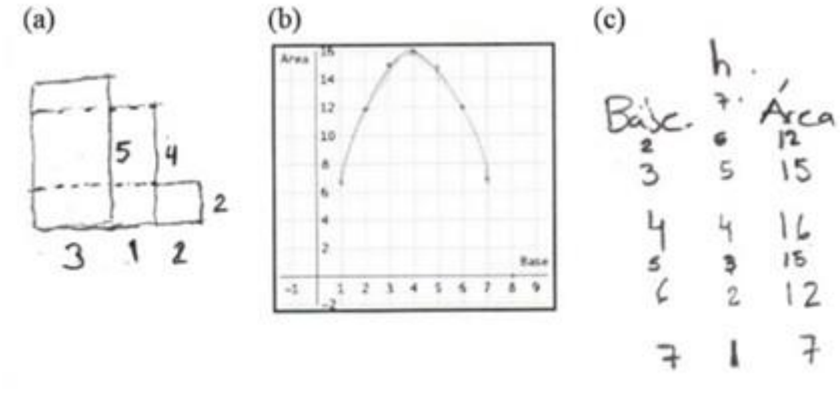


Figura 9. *Extractos de la resolución escrita del profesor C*

El ensayo con casos particulares también permitió que los otros dos profesores que procedieron a verificar su conjetura se percataran de que no era verdadera, pues no funcionaba para ciertos casos numéricos considerados por ellos. Por ejemplo, el profesor D planteó inicialmente una proposición abierta a modo de conjetura (figura 10).

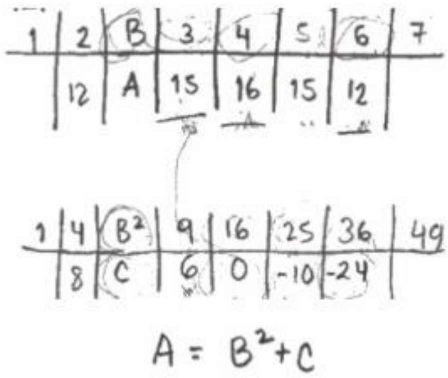


Figura 10. Formulación de una conjetura por el profesor D

Estableció que la medida del área (A) de los rectángulos era igual al cuadrado de la base (B) más una cantidad (C), sin precisar cuál era esa cantidad, a través del siguiente análisis numérico.

Profesor D: Suponiendo que es cuadrática, observo que al cuadrado de la base 3, el cuadrado es 9, le hacen falta 6 unidades para completar el área que comprende ($A = 15$) ... En el caso de seis ($B = 6$), su cuadrado sería 36 y la constante que le hace falta para completar el área ($A = 12$) es menos veinticuatro (-24) … Completo la quinta posición ($B = 5$) en la tabla con el mismo razonamiento, el cuadrado de B sería 25, para 15, le hace falta menos diez (-10) …

Posteriormente, el profesor D intentó precisar su conjetura y verificarla numéricamente, al hacerlo se dio cuenta de que no era verdadera. Expresó simbólicamente su conjetura de la siguiente manera: $-n^2 - 4n + 16$ (ahora emplea la literal n, en lugar de B, para representar el valor de la base), pero para verificarla consideró el término cuadrático con signo positivo, es decir, implícitamente utilizó la expresión $n^2 - 4n + 16$ para sustituir los valores de la base de algunos rectángulos, desde $n = 1$ hasta $n = 5$ (figura 11). Entonces notó que su conjetura solo era válida para $n = 2$ y 4, y falsa para los valores $n = 3$ y 5, ya que resultaban distintos valores del área respecto a los obtenidos previamente ($A = 15$, para los rectángulos cuyas bases miden 3 y 5 unidades).

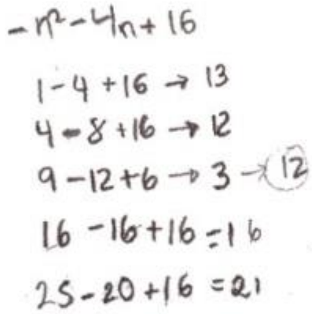


Figura 11. *Verificación de una conjetura inválida por el profesor D*

La suposición de un comportamiento lineal entre pares de puntos (o de valores) se reflejó en la formulación de una conjetura incorrecta del patrón. Por otra parte, la dificultad para determinar la relación funcional cuadrática entre los valores del área y de la base de ciertos rectángulos, produjo que algunas conjeturas sean enunciadas de manera imprecisa o incorrecta y no puedan generalizarse. Tal como sucedió con el profesor D.

Generalización

De todos los participantes en el estudio, solamente cinco (26%) mostraron la fase de generalización. Los demás tuvieron dificultades para generalizar el patrón cuadrático. La regla general para determinar la medida del área de la familia de rectángulos fue obtenida por quienes aislaron el patrón identificado del contexto geométrico del problema y pudieron expresar la relación entre las medidas del área y de la base de los rectángulos con una función cuadrática. Por tanto, los cinco profesores que abstrajeron una relación funcional entre las variables involucradas en el problema fueron quienes lograron generalizar el patrón.

La regla general fue expresada de manera algebraica y verbal. Las expresiones algebraicas obtenidas por algunos profesores para determinar el área de cualquier rectángulo de la familia fueron: $A = b(8 - b)$, $A = -b^2 + 8b$ (figura 12), o alguna ecuación equivalente.

$A = bh$

$A = b(8-b)$

$A = -b^2 + 8b$

$0 < b < 8$

El área es igual a menos b cuadrada, más ocho veces la base.

Figura 12. Expresión verbal y algebraica de la generalización (profesor C)

Un aspecto esencial en la formulación de la generalización fue extender el patrón de los casos particulares observados, al conjunto global de rectángulos de la familia. Esto fue evidenciado por los profesores cuando expresaron el rango de valores que puede asumir la variable *b*, es decir, el conjunto de números reales en el intervalo abierto de 0 a 8 (figura 12). Por ejemplo, el profesor C mencionó:

> *b sería mayor de cero, porque si b es cero el área sería cero, entonces b sería mayor que cero y hasta b igual a ocho. El área para b igual a ocho sería cero, después de esos valores el rectángulo no podría existir.*

Si bien algunos profesores identificaron que el patrón en los valores del área era de tipo cuadrático, a través del cálculo recurrente de diferencias, esta estrategia resultó insuficiente para establecer una relación funcional entre las variables. Una dificultad para determinar la regla algebraica del patrón fue reconocer alguna forma general de expresar el comportamiento cuadrático de los valores del área. En específico, se les dificultó obtener la expresión algebraica cuadrática a partir de pares de valores y relaciones numéricas. Al respecto, el profesor D expresó:

> *…observo que sí se trata de una ecuación cuadrática [señala que las segundas diferencias entre los valores del área son iguales a una constante], pero al momento de definirla es donde me atoro [dificulto]. Sé que es cuadrática, sé que es negativa y que tiene un aumento constante de 16 por el punto máximo en la gráfica (ordenada del vértice de la parábola), entonces trato de ver cuál es el otro parámetro, el parámetro para moverla sobre el eje de las abscisas. Volví hacer el mismo análisis numérico…, ya no llegué a generalizar la expresión algebraica.*

Asimismo, aun cuando dos profesores reconocieron un patrón cuadrático con base en la gráfica de puntos, se encontró que carecen de estrategias y un conocimiento conceptual profundo para transitar de la representación gráfica de una función, a la algebraica.

Demostración

Ningún profesor proporcionó una prueba matemática formal de la validez de la generalización formulada, pero recurrieron a la sustitución numérica de las variables en la regla algebraica general para comprobar que funciona con al menos un caso particular. Esta comprobación les bastó para convencerse de que la regla era válida, sin demostrar su generalidad.

Discusión y conclusiones

Excepto la fase de demostración, las fases referidas en Cañadas y Castro (2007) se detectaron en el razonamiento de profesores de secundaria al resolver un problema de generalización, el cual demandaba generalizar el patrón cuadrático de los valores de una variable continua. Sin embargo, no todos los profesores pasaron por cada fase. Por otro lado, aunque una misma fase se presentó en el razonamiento de varios profesores, se observaron diferencias en la ejecución de cada una.

El razonamiento de los profesores participantes se enfocó inicialmente en la observación de casos particulares y la búsqueda de regularidades, sin embargo, no todos organizaron los casos observados. Aun cuando los datos del problema se presentaron en una gráfica, la mayoría de los profesores trabajaron con la representación numérica de casos particulares y su organización en tablas. Pocos se apoyaron en la representación gráfica de los datos para dar sentido a las relaciones numéricas identificadas. La mayoría de los profesores que articula el trabajo numérico con el análisis de la representación gráfica, de los casos considerados, identifica un patrón adecuado.

El trabajo con casos particulares “no organizados” condujo a la falta de sistematización en la búsqueda de regularidades y un análisis puntual de cada caso. Por tanto, se refleja como un factor que imposibilita la identificación de un patrón. Contrariamente, se constata que ordenar y trabajar de manera sistemática los casos particulares favorece descubrir patrones.

La identificación y expresión del patrón fue de suma importancia en el razonamiento de los profesores para llegar a la generalización. Al respecto, se detectaron dos acciones relevantes para formular una conjetura del patrón: (a) reconocer una relación o característica invariante entre distintos casos particulares observados para obtener nuevos, sin depender del caso antecedente o consecuente; y (b) usar estructuras matemáticas adecuadamente para expresar el patrón. En este estudio, el razonamiento inductivo de quienes alcanzaron a generalizar se caracterizó por reconocer el patrón cuadrático entre los valores del área y usar una estructura cuadrática (función cuadrática) para describirlo. En consecuencia, para generalizar no basta reconocer las regularidades repetidas en varios casos particulares, sino asociar esas regularidades con estructuras matemáticas que describan el patrón de manera general.

La formulación y justificación de la conjetura favoreció que los profesores analizaran la factibilidad de aplicar el patrón a nuevos casos y generalizar. Los profesores que aislaron el patrón de los casos particulares observados y lo extendieron a un conjunto que abarcara una totalidad de casos, fueron capaces de formular una generalización correcta. Por tanto, la abstracción de lo general se constituyó como una acción mental fundamental que posibilitó el paso de la identificación del patrón a la generalización. En paralelo a los resultados sobre el razonamiento inductivo en estudiantes de secundaria (Cañadas y Castro, 2007; Cañadas, Castro y Castro, 2009) y en profesores en formación (Manfreda et al., 2012), los profesores de secundaria en servicio tampoco intentan dar una demostración de su generalización. La falta de una prueba para validar la veracidad de la regla general obtenida podría estar asociada a que la enseñanza de las matemáticas en el nivel secundaria, en México, suele estar desprovista de pruebas formales. En consecuencia, los profesores no están habituados a proporcionar pruebas que justifiquen la solución de un problema.

Se identificaron dificultades en el razonamiento inductivo de los profesores para generalizar el comportamiento cuadrático correspondiente a los valores de variables continuas. La mayoría se quedó al nivel de reconocer regularidades numéricas entre casos particulares, pero su razonamiento no trascendió a generalizar el patrón. Los hallazgos de este estudio revelan una dificultad en los profesores para establecer un patrón cuadrático en un contexto numérico, particularmente cuando se carece de algún referente visual que soporte la identificación de relaciones entre variables. Por ejemplo, cuando se trata de relaciones entre variables continuas que varían simultáneamente, tal como en el problema planteado. Otra dificultad fue determinar una expresión algebraica (o verbal) que describa un patrón cuadrático a partir de su representación numérica o gráfica. Varios profesores manifestaron carencias conceptuales y procedimentales (estrategias) para traducir la representación numérica y gráfica del comportamiento cuadrático en términos de la expresión algebraica de una función polinomial.

El hecho de que pocos profesores lleguen a la producción de una generalización vía el razonamiento inductivo sugiere indagar con mayor profundidad los procesos cognitivos que dificultan o potencializan dicho razonamiento. A juzgar por los resultados referidos, se precisa favorecer experiencias de aprendizaje profesional que apunten al fortalecimiento de esta forma de razonamiento en los profesores de secundaria y a la adquisición de un conocimiento estructural de los conceptos matemáticos, toda vez que el razonamiento inductivo se basa esencialmente en el análisis y representación de relaciones invariantes entre números, objetos y variables. Fomentar el desarrollo profesional de los profesores de secundaria en esta dirección, sería una forma de apoyarlos a alcanzar los objetivos curriculares y a realizar funciones propias de la práctica de enseñanza en este nivel educativo, tal como promover, interpretar y explicar el razonamiento de los estudiantes cuando resuelven tareas que implican generalizar.

Referencias

Alajmi, A. H. (2016). Algebraic generalization strategies used by Kuwaiti pre-service teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(8), 1517–1534. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9657-y

AMTE (2017). Standards for preparing teachers of mathematics. Recuperado el 18 de mayo de 2017, de https://amte.net/standards.

Bills, L. y Rowland, T. (1999). Examples, generalisation and proof. *Advances in Mathematics Education, 1*(1), 103-116. https://doi.org/10.1080/14794809909461549

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78. https://doi.org/10.1227/01.NEU.0000032542.40308.65

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2009). Utilización de un modelo para describir el razonamiento inductivo de los estudiantes en la resolución de problemas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 261-278.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2013). Análisis didáctico en una investigación sobre razonamiento inductivo. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de profesores e Innovación Curricular* (pp. 333-348). Granada, España: Editorial Comares.

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning, 5*(1), 55-72.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El Razonamiento Inductivo como Generador de Conocimiento Matemático. *UNO, 54*, 55-67. https://doi.org/ 10.1017/CBO9781107415324.004

Davydov, V. (1990). Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. En J. Kilpatrick (Ed.), *Soviet Studies in Mathematics Education* (Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study*. Nueva York, NY: Nova Science Publishers.

Demonty, I., Vlassis, J. y Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 99*(1), 1-19. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9

El Mouhayar, R. y Jurdak, M. E. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 379-396. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9434-6

Glaser, R. y Pellegrino, J. (1982). Improving the skills of learning. En D. K. Detterman y R. J. Sternberg (Eds.), *How and How Much can Intelligence be Increased* (pp. 197-212). Norwood, NJ: Ablex.

Hallagan, J. E., Rule, A. C., y Carlson, L. F. (2009). Elementary school pre-service teachers' understandings of algebraic generalizations. *The Mathematics Enthusiast, 6*(1), 201-206.

Haverty, L., Koedinger, K., Klahr, D. y Alibali, M. (2000). Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. *Cognitive Science, 24*(2), 249–298.

Herbert, S., Vale, C., Bragg, L. A., Loong, E. y Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research, 74*, 26-37. http://dx.doi.org/ 10.1016/j.ijer.2015.09.005

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ª ed.). D.F., México: McGraw-Hill.

Hodnik, T. y Manfreda, V. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Educational Studies in Mathematics, 89*(2), 283–306. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9598-y

Klauer, K. (1996). Teaching inductive reasoning: some theory and three experimental studies. *Learning and Instruction, 6*(1), 37–57. https://doi.org/10.1016/0959-4752(95)00015-1

Manfreda, V., Slapar, M. y Hodnik, T. (2012). Comparison of competences in inductive reasoning between primary teachers' students and mathematics teachers' students. En B. Maj-Tatsis y K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels*. Rzeszów, Polonia: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Molnár, G. (2011). Playful fostering of 6-to 8-year-old students' inductive reasoning. *Thinking Skills and Creativity, 6*(2), 91-99. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2011.05.002

Molnár, G., Greiff, S. y Csapó, B. (2013). Inductive reasoning, domain specific and complex problem solving: Relations and development. *Thinking Skills and Creativity, 9*, 35-45. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2013.03.002

Mousa, M. (2017). The influence of inductive reasoning thinking skill on enhancing performance. *International Humanities Studies, 4*(3), 37–48.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Neubert, G. A. y Binko, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington, D.C.: National Education Association.

Papageorgiou, E. (2009). Towards a teaching approach for improving mathematics inductive reasoning problem solving. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 313–320). Thessaloniki, Grecia: PME.

Pólya, G. (1957). *How to solve it. A New aspect of mathematical method*. Nueva York, NY: Doubleday & Company, Inc.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, España: Tecnos.

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2003). The effects of numerical and figural cues on the induction processes of preservice elementary teachers. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Held Jointly with the 25th PME-NA Conference* (Vol.4, pp. 63–70). Honolulu, HI: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 140–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. Ciudad de México, México: Autor.

Sosa, L. y Cabañas, G. (2017). Analytical framework to study inductive reasoning in mathematical teachers while solving task. En E. Galindo y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1415-1418). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Sriraman, B. y Adrian, H. (2004). The pedagogical value and the interdisciplinary nature of inductive processes in forming generalizations: Reflections from the classroom. *Interchange, 35*(4), 407–422.

Stylianides, G., Stylianides, A. y Shilling-Traina, L. (2013). Prospective teachers’ challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(6), 1463-1490. https://doi.org/10.1007/ s10763-013-9409-9

Tomic, W. (1995). Training in inductive reasoning and problem solving. *Contemporary Educational Psychology, 20*(4), 483–490. https://doi.org/10.1006/ceps.1995.1036

Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, G. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (pp. 73–108). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Landy Sosa Moguel
Universidad Autónoma de Yucatán
smoguel@correo.uady.mx

Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán
Universidad Autónoma de Guerrero
alanda@correo.uady.mx

Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero
gcabanas@uagro.mx

Recibido: 26/03/2019. Aceptado: 12/01/2020
doi: 10.30827/pna.v14i2.9118

ISSN: 1887-3987