Lecturas Matemáticas
Volumen **37** (1) (2016), páginas 25-33
ISSN 0120-1980

Algunas representaciones en series de la función zeta de Riemann en argumentos impares

Some series representations of the Riemann zeta function at odd arguments

A. Soria-Lorente, A. A. González-Aguilera, A. M. Centurión-Fajardo y E. R. Moreno-Roque

Universidad de Granma

Resumen. En este artículo se muestran algunas representaciones en series de la función zeta de Riemann en argumentos impares, propuestas por varios autores.

***Palabras clave*:** función zeta de Riemann, representaciones en series, números irracionales.

Abstract. In this article we present some series representations of the Riemann zeta function at odd arguments proposed by several authors.

***Key words*:** Riemann zeta function, series representations, irrational numbers.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 94A60, 11T71, 14G50.

1. Introducción

Desde tiempos antiguos hasta la actualidad, el estudio de los números irracionales ha sido de gran interés no solo para la comunidad matemática, sino también para la comunidad científica en general. Hoy en día estos números están vinculados directamente al coste computacional, debido a que se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales no periódicas, lo cual implica que los ordenadores en muchas ocasiones necesiten de valiosas herramientas matemáticas para poder tener un control aproximado de ellos. Algunos ejemplos de estos números son el número áureo o número de oro, el número de plata [15, 27], el número neperiano, etc. En particular, en este artículo nos centraremos en aquellos números que se obtienen tras evaluar la *función zeta de Riemann*

$$\zeta(k) \equiv \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{\log^{k-1} x}{1-x} dx, \tag{1}$$

en argumentos k impares. Gran parte de los matemáticos que investigan en esta área creen que estos números son irracionales y trascendentes, de ahí la importancia que se les otorga. Un resultado que avala en cierta medida esta conjetura fue el conseguido en el año 2001 por BALL y RIVOAL [6], quienes probaron que la sucesión $\{\zeta(2k+1)\}_{k\geq 1}$ contiene una infinidad de irracionales. Ese mismo año, el ruso VLADIMIR ZUDILIN, un investigador de la Universidad Lomonósov de Moscú, probó que al menos uno de los números $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ y $\zeta(11)$ es irracional [33]. Además, en el año 2002 logró demostrar que cada uno de los conjuntos

$$\begin{gathered}\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \zeta(15), \zeta(17), \zeta(19), \zeta(21)\}, \\ \{\zeta(7), \zeta(9), \ldots, \zeta(35), \zeta(37)\}, \{\zeta(9), \zeta(11), \ldots, \zeta(51), \zeta(53)\}\end{gathered}$$

contiene al menos un número irracional; véase para más detalles [34]. Lo cierto es que son escasos los resultados que existen acerca de las propiedades aritméticas de los números $\zeta(2k+1)$, con $k \in \mathbb{N}$, lo cual los convierte en un motivo de inspiración para los jóvenes investigadores interesados en desarrollar esta área de las matemáticas.

Hoy en día se sabe que LEONHARD PAUL EULER fue el primero en evaluar la función zeta de Riemann (1) en argumentos pares [24], a partir de lo cual obtuvo el siguiente resultado:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

donde los B_{2k} son los llamados *números de Bernoulli* [14], resultado que no pudo extender para el caso en que los argumentos eran impares. Más tarde, este entusiasta matemático propuso la siguiente conjetura para el caso impar:

$$\zeta(2k+1) = \frac{p_k}{q_k} \pi^{2k+1},$$

donde p_k y q_k son números enteros. No obstante, los esfuerzos de EULER para validar su conjetura fuero fallidos [25]. Por cierto, dicha conjetura fue refutada recientemente; para más detalles véase [30]. A pesar de los frustrados intentos de EULER, él nos legó un valioso resultado, que ha inspirado a un sinnúmero de matemáticos. Dicho resultado no es más que la primera representación en series de $\zeta(3)$ en función del resultado (2)

$$\zeta(3) = -\frac{4\pi^2}{7} \sum_{k\geq 0} \frac{\zeta(2k)}{(2k+1)(2k+2)2^{2k}}; \tag{3}$$

véase para más detalle [29]. Muchos años después, en 1978, ROGER APÉRY sorprendió a la comunidad matemática con una asombrosa y elegante demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$ [5, 13, 25, 31], logrando de esta manera uno de los tan ansiados sueños de EULER. En dicha demostración consideró la representación en serie

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}},$$

obtenida inicialmente por MÁRKOV in 1890 [18].

El propósito fundamental de este artículo es dar a conocer algunas de las representaciones en series de la función zeta de Riemann, conseguidas por varios autores, las cuales aparecerán en la próxima sección.

2. Algunas representaciones en series

En esta sección mostraremos algunas representaciones en series, primero para $\zeta(3)$, luego para $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$, y para finalizar de $\zeta(2k+1)$ con $k \in \mathbb{N}$. Lo cierto es que son muchas las representaciones en series que diversos autores han conseguido para $\zeta(3)$, pero en este artículo solo pretendemos dar una representación de ellas.

Muchos años después de los resultados de EULER, en el año 1998, CHEN y SRIVASTAVA [11] dieron varias representaciones en series para $\zeta(3)$, que convergen mucho más rápido en comparación con (3), entre las que se incluye

$$\zeta(3) = -\frac{8\pi^2}{5}\sum_{k\geq 0}\frac{\zeta(2k)}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)2^{2k}}.$$

En el año 2000 SRIVASTAVA [28] dedujo el siguiente resultado:

$$\zeta(3) = -\frac{6\pi^2}{23}\sum_{k\geq 0}\frac{(98k+121)\zeta(2k)}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)2^{2k}}.$$

También en ese año, BORWEIN y otro autores [9] dedujeron la siguiente representación en series:

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{7}\left[\log 2 - \frac{1}{2} + \sum_{k\geq 1}\frac{\zeta(2k)}{4^n(n+1)}\right].$$

En el año 2008, KHODABAKHSH HESSAMI PILEHROOD y TATIANA HESSAMI PILEHROOD [20] dedujeron la expresión

$$\zeta(3) = \frac{1}{4}\sum_{k\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{56n^2-32n+5}{n^3(2n-1)^2\binom{2n}{n}\binom{3n}{n}},$$

que es conocida como la *fórmula de Amdeberhan* para $\zeta(3)$; véase para más detalles [3]. Y ese mismo año [21] a la siguiente expresión:

$$\zeta(3) = \sum_{k\geq 0}(-1)^n\frac{n!^{10}\left(205n^2+250n+77\right)}{64(2n+1)!^5},$$

obtenida inicialmente por AMDEBERHAN Y ZEILBERGER en [4]. Luego, en el 2010, KHODABAKHSH HESSAMI PILEHROOD y TATIANA HESSAMI PILEHROOD [22] derivaron la siguiente fórmula:

$$\zeta(3) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{205n^2-160n+32}{n^5\binom{2n}{n}^5},$$

conseguida inicialmente por AMDEBERHAN y ZEILBERGER en el año 1997; véase para más detalle [4].

Un poco más recientemente, en el 2014, en [25] SORIA-LORENTE dedujo, a partir de ciertas formas ortogonales, la siguiente representación en series:

$$\zeta(3) = \frac{7}{6} + \sum_{n\geq 1}\frac{24n^3+30n^2+16n+3}{2n^3(n+1)^3\Theta_n\Theta_{n+1}},$$

siendo

$$\Theta_n = {}_4F_3\left(\begin{array}{c|c} -n,-n,n,n+1 & \\ & 1 \\ 1,1,1 & \end{array}\right),$$

donde ${}_rF_s$ denota las series hipergeométricas ordinarias; véase para más detalle [16, 17, 19].

En el caso de $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ y $\zeta(11)$ no ocurre lo mismo que en el de $\zeta(3)$. Todavía queda mucho que investigar en este sentido; no han sido numerosos los resultados obtenidos hasta el momento, ni tampoco han sido muchos los autores que se han dedicado a desarrollar estas áreas de las matemáticas, por lo cual aún continúa siendo un problema abierto el estudio de nuevas representaciones en series para estas constantes y, sobre todo, el estudio de las propiedades aritméticas de las mismas [24].

Uno de los resultados vinculado con $\zeta(5)$ es el propuesto por SRIVASTAVA en [28], donde dedujo lo siguiente:

$$\zeta(5) = \frac{2\pi^2}{27}\zeta(3) - \frac{4\pi^4}{9}\sum_{k\geq 0}\frac{\zeta(2k)}{(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)2^{2k}}.$$

Otro de los resultados fue conseguido en el año 1996 por los autores BORWEIN y BRADLEY, quienes arribaron a esta expresión:

$$\zeta(5) = 2\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k^5\binom{2k}{k}} - \frac{5}{2}\sum_{k>j\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}j^{-2}}{k^5\binom{2k}{k}};$$

véase para más detalle [7, 8].

Más adelante, en el año 2008, KHODABAKHSH HESSAMI PILEHROOD y TATIANA HESSAMI PILEHROOD [20] dedujeron las siguientes representaciones en series:

$$\zeta(5)=\frac{3}{16}\sum_{n\geq 1}\frac{(4n-1)\left(16n^3-8n^2+4n-1\right)}{(-1)^{n-1}n^5(2n-1)\binom{2n}{n}\binom{3n}{n}}+4^{-1}\sum_{n>k\geq 1}\frac{(-1)^n\left(56n^2-32n+5\right)}{n^3(2n-1)^2\binom{2n}{n}\binom{3n}{n}k^2},$$

y

$$\begin{aligned}\zeta(5)&=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\left(31n^2-20n+4\right)}{n^7\binom{2n}{n}^5}\\&\quad+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\left(205n^2-160n+32\right)}{n^5\binom{2n}{n}^5}\left(\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{1}{k^2}-\sum_{0\leq k\leq n}\frac{1}{2(k+n)^2}\right),\end{aligned}$$

respectivamente.

Entre los pocos resultados vinculados a $\zeta(7)$ se encuentran los conseguididos por BORWEIN y BRADLEY en año 1996 [7, 8, 22, 23]

$$\zeta(7)=2\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^7}-2\sum_{k>j\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^5j^2}+\frac{5}{2}\sum_{k>j>i\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^3j^2i^2},$$

y

$$\zeta(7)=\frac{5}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^7}+\frac{25}{2}\sum_{k>j\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^3j^4},$$

respectivamente. También cabe destacar que en el año 2008, KHODABAKHSH HESSAMI PILEHROOD y TATIANA HESSAMI PILEHROOD [21] dedujeron el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}\zeta(7)&=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\left(25n^2-10n+2\right)}{n^9\binom{2n}{n}^5}\\&\quad-\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\left(205n^2-160n+32\right)}{n^5\binom{2n}{n}^5}\left(\sum_{1\leq k\leq 2n}\frac{1}{k^4}-\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{3}{k^4}\right).\end{aligned}$$

En los trabajos antes mencionados de BORWEIN y BRADLEY se pueden encontrar las siguientes representaciones en series para

$$\begin{aligned}\zeta(9)&=\frac{9}{4}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^9}-\frac{5}{4}\sum_{k>j\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^7j^2}+5\sum_{k>j\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^5j^4}\\&\quad+\frac{45}{4}\sum_{k>j\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^3j^6}-\frac{25}{4}\sum_{k>j>i\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^3j^4i^2},\end{aligned}$$

y

$$\zeta(11)=\frac{5}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^{11}}+\frac{25}{2}\sum_{k>j\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^{7}j^{4}}$$
$$-\frac{75}{4}\sum_{k>j\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^{3}j^{8}}+\frac{125}{4}\sum_{k>j>i\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^{3}j^{4}i^{4}},$$

respectivamente.

En cuanto a las representaciones en series para $\zeta(2k+1)$ con $k\in\mathbb{N}$, el lector puede encontrar un buen número de ellas en el trabajo [29], presentado por SRIVASTAVA en el año 2012. Uno de los resultados registrados en dicho trabajo fue el alcanzado por ZHOU y CAI [32] en el año 2007, donde ambos dedujeron

$$\zeta(2n+1)=(-1)^{n}\frac{4(2\pi)^{2n}}{(2n+1)!}\sum_{k\geq 0}R_{2n+1,k}\zeta(2k),$$

siendo los coeficientes $R_{2n+1,k}$ racionales dados mediante

$$R_{2n+1,k}=\sum_{0\leq m\leq 2n}\binom{2n}{m}\frac{(2n+1)B_{2n-m}}{2^{2k+m+1}(2k+m+1)(m+1)}.$$

Por otro lado, en el año 2014 [26] SORIA-LORENTE y otros autores presentaron ciertos resultados vinculados con la *función zeta de Hurwitz*, donde entre los casos particulares se encuentran precisamente las siguientes representaciones en series:

$$\zeta(2n+1)=(j+1)^{-(2n+1)}\,{}_{2n+2}F_{2n+1}\left(\left.\begin{array}{c}1,j+1,\ldots,j+1\\ \\ j+2,\ldots,j+2\end{array}\right|1\right)$$
$$+\sum_{0\leq k\leq j-1}{}_{2}F_{1}\left(\left.\begin{array}{c}-k,1\\ \\ 2\end{array}\right|1\right),\quad j\in\mathbb{N},$$

y

$$\zeta(2n+1)={}_{2n+1}F_{2n}\left(\left.\begin{array}{c}1,\ldots,1\\ \\ 2,\ldots,2\end{array}\right|1\right)-2^{-(2n+1)}\,{}_{2n+2}F_{2n+1}\left(\left.\begin{array}{c}2,\ldots,2\\ \\ 3,\ldots,3\end{array}\right|1\right).$$

respectivamente. Los autores del presente trabajo, recomiendan continuar desarrollando el tema presentado, fundamentalmente en aras de vincular dichos resultados con la posible irracionalidad de los valores de la función zeta de Riemann en argumentos impares.

Agradecimientos

Los autores expresan sus más sinceros agradecimientos a los árbitros por sus valoradas sugerencias. Agradecemos además, al proyecto ClaveMat, financiado por la unión Europea, www.clavemat.com.

Referencias

[1] H. Alzer, D. Karayannakis and H. M. Srivastava, *Series representations for some mathematical constants*, J. Math. Anal. Appl.**320** (2006), 145-162.

[2] G. Almkvist and A. Granville, *Borwein and Bradley's Apéry-like formulae for* $\zeta(4n+3)$, Experiment. Math. **8** (1999), 197-203.

[3] T. Amdeberhan, *Faster and faster convergent series for* $\zeta(3)$, Electron. J. Comb. **3**(1996), no. 1.

[4] T. Amdeberhan and D. Zeilberger, *Hypergeometric series acceleration via the WZ method*, Elect. J. Comb. **4** (1997), no. 2.

[5] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Journées arithmétiques de Luminy, Astérisque**61** (1979), 11-13.

[6] K, Ball and T. Rivoal, *Irrationalité d'une innité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Inv. Math. **146** (2006), 193-207.

[7] J. M. Borwein and D. M. Bradley, *Searching symbolically for Apéry-like formulae for values of the Riemann zeta function*, ACM SIGSAM Bulletin **30** (1996), no. 2, 2-7.

[8] J. M. Borwein and D. M. Bradley, *Empirically determined Apéry like formulae for* $\zeta(4n+3)$, Experiment. Math. **6** (1997), no. 3, 181-194.

[9] J. M. Borwein, D. M. Bradley and R. E. Crandall, *Computational strategies for the Riemann zeta function*, J. Comput. Appl. Math., **121** (2000), 247-296.

[10] J. M. Borwein, D. J. Broadhurst and J. Kamnitzer, *Central binomial sums, multiple Clausen values, and zeta values*, Experiment. Math. **10** (2001), 25-41.

[11] M.-P. Chen and H. M. Srivastava, *Some families of series representations for the Riemann* $\zeta(3)$, Resultate Math. **33** (1998), 179-197.

[12] H. Cheng, B. Gergel and E. Kim, *Space-Efficient Evaluation of Hypergeometric Series*, ACM SIGSAM Bulletin **39** (2005), no. 2, 41-52.

[13] H. Cohen, *Démonstration de l'irrationalité de* $\zeta(3)$ *(d'après R. Apéry)*, Séminaire de Théorie des Nombres, Grenoble, pp. VI.1-VI.9, 1978.

[14] J. Cohen and R. Guy, R., *The Book of Numbers*, Copernicus, Springer-Verlag New York, Inc., 1997.

[15] V. Condesse and C. Minnaard, *La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro*, Revista Iberoamericana de Educación **42** (2007), no. 2, 1-9.

[16] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[17] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its* q*-analogue*, Report 98-17, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1998.

[18] A. A. Markoff, *Mémoire sur la transformation des séries peu convergentes en séries très convergentes*, Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersburg, VII série, t. XXXVII, no. 9, 1890.

[19] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions in Mathematical Physics*, Birkhauser Verlag, Basel, 1988.

[20] K. H. Pilehrood and T. H. Pilehrood, *Generating function identities for* $\zeta(2n+2)$, $\zeta(2n+3)$ *via the WZ method*, Electron. J. Comb. **15** (2008), 1-9.

[21] K. H. Pilehrood and T. H. Pilehrood, *Simultaneous generation for zeta values by the Markov-WZ method*, Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **10** (2008), no. 3, 115-124.

[22] K. H. Pilehrood and T. H. Pilehrood, *Series acceleration formulas for beta values*, Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. **12** (2010), no. 2, 223-236.

[23] T. Rivoal, *Simultaneous Generation of Koecher and Almkvist-Granville's Apéry-Like Formulae*, Experiment. Math. **13** (2004), no. 14, 503-508.

[24] A. Soria-Lorente, *Arithmetic of the values of de Riemann's zeta function in integer arguments*, Revista de Investigación G. I. E. Pensamiento Matemático, **IV** (2014), 33-44, ISSN 2174-0410.

[25] A. Soria-Lorente, *Nesterenko-like rational function, useful to prove the Apéry's theorem*, Notes Number Theory Discrete Math. **20** (2014), no. 2, 79-91.

[26] A. Soria-Lorente, E. R. Moreno and R. R. Avilés, *Hypergeometric representations of the Hurwitz zeta function*, Revista de Investigación G. I. E. Pensamiento Matemático, ISSN 2174-0410, accepted, 2014.

[27] V. W. Spinadel, *La familia de los números metálicos*, Cuadernos del Cimbage, (2003), no. 6, 17-44.

[28] H. M. Srivastava, *Some simple algorithms for the evaluations and representations of the Riemann zeta function at positive integer arguments*, J. Math. Anal. Appl. **246** (2000), 331-351.

[29] H. M. Srivastava and C. Junesang, *Zeta and q-Zeta functions and associated series and integrals*, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, ISBN: 978-0-12-385218-2, 2012.

[30] M. Takaaki, *Negation of the conjecture for odd zeta values*, International Journal of Pure and Applied Mathematics **91** (2014), no. 1, 103-111.

[31] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta\,(3)$, Math. Intelligencer **1** (1978/79), 195-203.

[32] X. Zhou and T. Cai, *A generalization of a curious congruence on harmonic sums*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1329-1333.

[33] W. Zudilin, *One of the eight numbers* $\zeta\,(5)\,, \zeta\,(7)\,, \ldots, \zeta\,(17)\,, \zeta\,(19)$ *is irrational*, Mat. Zametki [Math. Notes] (2001), 472-476.

[34] W. Zudilin, *Irrationality of values of the Riemann zeta function*, Izvestiya: Mathematics **66** (2002), no. 3, 489-542.

Recibido en julio de 2015. Aceptado para publicación en marzo de 2016.

A. SORIA-LORENTE
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE GRANMA
BAYAMO-MANZANILLO, CUBA
e-mail:asorial@udg.co.cu

A. A. GONZÁLEZ-AGUILERA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE GRANMA
BAYAMO-MANZANILLO, CUBA
e-mail: agonzaleza@udg.co.cu

A. M. CENTURIÓN-FAJARDO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE GRANMA
BAYAMO-MANZANILLO, CUBA
e-mail: acenturionf@udg.co.cu

E. R. MORENO-ROQUE
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE GRANMA
BAYAMO-MANZANILLO, CUBA
e-mail: emorenor@udg.co.cu