Lecturas Matemáticas
Volumen **35** *(2) (2014), páginas 151–158*
ISSN 0120–1980

Aplicación de una desigualdad integro diferencial en el análisis cualitativo de las soluciones de un sistema integrodiferencial tipo Volterra

Application of an integro–differential inequality to the qualitative analysis of solutions of an integro–differential Volterra type system

Denis Álvarez Mora, Manuel Peña Chávez, Luis A. Pernía Nieves
Universidad de Granma, Cuba
José Ramón Velázquez Codina
Universidad de Holguín, Cuba

Resumen. En este trabajo es obtenida una nueva desigualdad integral del tipo Gronwall-Bellman-Bihari, la que es utilizada en el estudio de la acotación, la atractividad y el crecimiento lento de las soluciones de un Sistema Integro-Diferencial tipo Volterra.

Key words and phrases. desigualdad integral, acotación, crecimiento lento, atractividad.

Abstract. In this paper a new integral inequality of Gronwall-Bellman-Bihari type is obtained, that is used in the study of the boundedness, atractivity and the slow growth of the solutions of a System Integro-differential Volterra type.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 45D05, 26D10, 45F15

1. Introducción

Uno de los métodos de trabajo para el estudio de la acotación, el crecimiento lento y la atractividad de las soluciones de los Sistemas Integro-Diferenciales tipo Volterra, consiste en construir desigualdades integrales de tipo Gronwall–Bellman–Bihari [1], [2], [3], [4], [5],[6],[7]. En este trabajo se propone una nueva desigualdad que permitirá obtener condiciones suficientes para el estudio de las propiedades antes mencionadas de las soluciones $x(t)$ del sistema

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds + f(t)\,, \tag{1}$$

donde $A(t)$ y $B(t,s)$ son matrices cuadradas de orden n continuas, $n \geq 1$, $0 \leq s \leq t < +\infty$ y $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ continua, así como, para que $x(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Este trabajo toma como referencia los resultados obtenidos por [7], [8], [9]. La desigualdad obtenida permite obtener mayoraciones para las funciones desconocidas $x(t)$ y $x'(t)$ en término de las funciones $a(t)$ y $b(t)$. Aquí intervienen un conjunto de funciones continuas $x(t) \geq 0, (x(0) \neq 0)$, $x'(t) \geq 0, a(t) \geq 0, b(t) \geq 0$ definidas en el intervalo $[0, +\infty)$. Esta desigualdad es de gran importancia en la demostración de los resultados que se exponen en la última parte del artículo, donde se dan condiciones suficientes que permiten garantizar las propiedades cualitativas de las soluciones del sistema (1) mencionadas anteriormente.

2. Principales resultados

El siguiente teorema constituye una extensión de uno de los teoremas dados por [7] y [8]. Las funciones $x(t), x'(t), a(t), b(t)$ son las mismas que se definieron con anterioridad.

Teorema 1. *Si*

$$x'(t) \leq k + \int_0^t [a(s)x'(s) + b(s)x'(s)(x(s) + x'(s))]ds\,, \tag{2}$$

entonces

$$x'(t) \leq \frac{k exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)}{1 - [x(0) + k]\int_o^t b(s)exp\left[\int_0^s (a(r)+1)dr\right]}\,.$$

*D*emostración. Sea

$$m(t) = k + \int_0^t [a(s)x'(s) + b(s)x'(s)(x(s) + x'(s))]ds\,.$$

Entonces $m(0) = k$ y

$$m'(t) = a(t)x'(t) + b(t)x'(t)(x(t) + x'(t))\,, \tag{3}$$

por lo que (2) se puede escribir como

$$x'(t) \leq m(t)\,; \tag{4}$$

integrando (4) obtenemos

$$x(t) \leq x(0) + \int_0^t m(s)ds\,; \tag{5}$$

sustituyendo (3) y (4) en (2) se obtiene

$$m'(t) \leq a(t)m(t) + b(t)m(t)\left[x(0) + \int_0^t m(s)ds + m(t)\right]. \tag{6}$$

Hagamos

$$v(t) = x(0) + \int_o^t m(s)ds + m(t)\,; \tag{7}$$

derivando esta expresión se obtiene

$$v'(t) = m(t) + m'(t)\,; \tag{8}$$

teniendo en cuenta (6) tenemos

$$v'(t) \leq a(t)v(t) + b(t)v^2(t) + v(t)\,,$$

o lo que es lo mismo

$$v'(t) \leq (a(t)+1)v(t) + b(t)v^2(t)\,;$$

resolviendo esta inecuación diferencial se obtiene que

$$v(t) \leq \frac{[x(0)+k]\,exp\left(\int_0^t (a(s)+1)\right)}{1-[x(0)+k]\int_0^t b(s)exp\left(\int_0^s (a(r)+1)dr\right)ds}\,; \tag{9}$$

sustituyendo $v(t)$ en (6) obtenemos

$$m'(t) \leq a(t)m(t) + b(t)m(t)\frac{[x(0)+k]\,exp\left(\int_0^t (a(s)+1)ds\right)}{1-[x(0)+k]\int_0^t b(s)exp\left(\int_0^s (a(r)+1)dr\right)ds}\,;$$

por tanto,

$$\frac{m'(t)}{m(t)} \leq a(t) + \frac{[x(0)+k]\,b(t)exp\left(\int_0^t (a(s)+1)ds\right)}{1-[x(0)+k]\int_0^t b(s)exp\left(\int_0^s (a(r)+1)dr\right)ds}\,;$$

integrando la última expresión se obtiene

$$m(t) \leq \frac{k exp\left(\int\limits_0^t a(s)ds\right)}{1-[x(0)+k]\int\limits_0^t b(s)exp\left(\int\limits_0^s (a(r)+1)dr\right)ds};$$

teniendo en cuenta (4) se concluye que

$$x'(t) \leq \frac{k exp\left(\int\limits_0^t a(s)ds\right)}{1-[x(0)+k]\int\limits_0^t b(s)exp\left(\int\limits_0^s (a(r)+1)dr\right)ds}. \quad ☑$$

3. Aplicaciones

En esta sección se muestra cómo es posible utilizar la desigualdad obtenida en la demostración de un teorema, en el cual se dan condiciones suficientes para garantizar el estudio de la acotación del sistema (1), además se obtendrán dos corolarios; el primero referido a la atractividad y el segundo al crecimiento lento de las soluciones. A continuación se precisan algunos de los conceptos básicos que serán utilizados posteriormente. Para un $t_0 \geq 0$ y una función continua $\phi : [0, t_0] \to \mathbb{R}^n$ una solución del sistema (1) es una función $x : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ que satisface este sistema para $t \geq t_0$ y tal que $x(t) = \phi(t)$ para $0 \leq t \leq t_0$. Bajo las condiciones establecidas, el sistema (1)tiene solución única denotada por $x(t, t_0, \phi)$ o simplemente $x(t)$. La solución $x(t) = 0$ del sistema (1) se llama solución nula. Las soluciones del sistema (1) que satisfacen la condición $x(0) = x_0$ están dadas por la fórmula de variación de los parámetros:

$$x(t) = R(t, 0)x(0) + \int\limits_0^t R(t, s)f(s)ds\,,$$

donde $R(t, s)$ es una matriz cuadrada de orden n que satisface la condición

$$\frac{\partial R(t, s)}{\partial s} = -R(t, s)A(s) - \int\limits_s^t R(t, u)B(u, s)du, \qquad R(t, t) = I\,.$$

A continuación precisamos tres definiciones que facilitarán la comprensión de los resultados que se expondrán en lo adelante.

Definición 1. Una función continua $x(t)$ se dice *lentamente creciente* si y sólo si para todo $\alpha > 0$ existe una constante $M > 0$ (que puede depender de α) tal que $|x(t)| \leq M exp(\alpha t)$

Definición 2. Para una función $\phi \in C(\mathbb{R}_+)$ y $t \in \mathbb{R}_+$ su *norma* se define como

$$\|\phi(t)\|_{t_0} = \text{máx}\{|\phi(t)|: 0 \leq t \leq t_0\}\,.$$

Definición 3. La solución $x(t)$ del sistema (1) es *atractiva* si para todo $t_0 \geq 0$ existe $\delta_0 \geq 0$ tal que si $\|\phi(t)\|_{t_0} < \delta$ entonces $|x(t, t_0, \delta)| \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

El siguiente teorema garantiza la acotación de las soluciones del sistema (1).

Teorema 2. *Sea $x(t)$ solución del sistema (1). Supóngase que se cumplen las condiciones siguientes:*

(a) $\left|\dfrac{\partial R(t,s)f(s)}{\partial t}\right| \leq a(s)|x'(s)| + b(s)|x'(s)|[|x(s)| + |x'(s)|]$

(b) $|R'(t,0)x(0)| + |f(t)| \leq k \qquad k \in \mathbb{R}_+^*$

(c) $\int\limits_0^{+\infty} exp\left(\int\limits_0^t a(s)ds\right) dt < +\infty$

(d)

$$\int\limits_0^{+\infty} b(t)exp\left(\int\limits_0^t (a(r)+1)dr\right) dt \leq K_1 < \frac{1}{|x(0)+k|}, x(0) \neq -k, K_1 \in \mathbb{R}_+^*,$$

entonces $x(t)$ está acotada.

Demostración. Dado que

$$x(t) = R(t,0)x(0) + \int\limits_0^t R(t,s)f(s)ds$$

entonces

$$x'(t) = R'(t,0)x(0) + \int\limits_0^t \frac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s)ds + f(t).$$

Luego de (a) y (b) resulta que

$$|x'(t)| \leq k + \int\limits_0^t [a(s)|x'(s)| + b(s)|x'(s)|(|x(s) + |x'(s)|)]ds.$$

Por el teorema (1) se cumple que

$$|x'(t)| \leq \frac{k exp\left(\int\limits_0^t (s)ds\right)}{1 - [x(0)+k]\int\limits_o^t b(s)exp\left[\int\limits_0^s (a(r)+1)dr\right]};$$

integrando ésta última desigualdad entre 0 y t, obtenemos

$$|x(t)| \leq \int_0^t \frac{kexp\left[\int_0^t a(s)ds\right] dt}{1 - [x(0)+k]\int_0^s b(u)exp\left(\int_0^u [a(r)+1]dr\right) du} + |x(0)|$$

y usando las condiciones (c) y (d) se concluye que $x(t)$ está acotada. ☑

Corolario 1. *Si en el teorema 2 se agrega la condición*

(e) *Existen* $M, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ *tales que* $M > 1$ *y* $\beta|x(t)| \leq (M-1)|x'(t)|$

y se cambian las premisas (a) y (b) por las siguientes

$$(\text{a}')\ \left|\frac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s)\right| \leq \frac{a(s)}{M}|x'(s)+\beta x(s)| exp[-\beta(t-s)] +$$
$$+ \frac{b(s)}{M}|x'(s)+\beta x(s)| \left[|x(s)| + |x'(s)+\beta x(s)|\right] exp[-\beta(t-s)]$$

(b') $|R'(t,0)x(0)| + |f(t)| \leq \frac{K}{M}$, *respectivamente, entonces* $x(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$.

Demostración. De las premisas (a$'$) y (b$'$) y la fórmula de variación de los parámetros se infiere que

$$|x'(t)|exp(\beta t) \leq \frac{k}{M} + \frac{1}{M}\int_0^t [a(s)|x'(s)+\beta x(s)| +$$
$$+ b(s)|x'(s)+\beta x(s)| \left(|x(s)| + |x'(s)+\beta x(s)|\right)] exp(\beta s) ds\,,$$

por tanto,

$$|x'(t)|exp(\beta t) \leq \frac{k}{M} + \frac{1}{M}\int_0^t [a(s)|(x(s)exp(\beta s))'| +$$
$$+ b(s)[|(x(s)exp(\beta s))'| \left(|x(s)exp(\beta s)| + |(x(s)exp(\beta s))'|\right)] ds\,.$$

De la condición (e) es inmediato que

$$M|x'(t)|exp(\beta t) \geq [|x'(t)+\beta x(t)|] exp(\beta t \geq |[x(t)exp(\beta t)]'|)\,;$$

luego, de las dos últimas desigualdades, se obtiene la siguiente estimación

$$|x_1'(t)| \leq k + \int_0^t [a(s)|x_1'(s)| + b(s)|x_1'(s)|(|x_1(s) + |x_1'(s)|)] ds\,,$$

donde $x_1(t) = x(t)exp(\beta t)$ y $x_1(0) = x(0)$; aplicando el teorema 1 y las premisas (c) y (d) del teorema 2 garantizamos que $x_1(t) \leq K$ donde $K \in \mathbb{R}_+^*$ y esto significa que $x(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. ☑

Corolario 2. *Supongamos que se cumplen las condiciones (c) y (d) del teorema 2, las condiciones (e) y (b') del corolario anterior y que además*

$$(a'')\left|\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}f(s)\right| \leq \frac{a(s)}{M}|x'(s)-\beta x(s)|exp[\beta(t-s)]+$$
$$+\frac{b(s)}{M}|x'(s)-\beta x(s)|\left[|x(s)|+|x'(s)-\beta x(s)|\right]exp[\beta(t-s)]\,.$$

Entonces la solución $x(t)$ del sistema (1) es lentamente creciente.

Demostración. De la fórmula de variación de los parámetros y las premisas b' y a'' se deduce que

$$|x'(t)|exp(-\beta t) \leq \frac{k}{M}+\frac{1}{M}\int\limits_0^t [a(s)|x'(s)-\beta x(s)|+$$
$$+\,b(s)|x'(s)-\beta x(s)|\left(|x(s)|+|x'(s)-\beta x(s)|\right)]exp(-\beta s)ds\,;$$

por tanto,

$$|x'(t)|exp(-\beta t) \leq \frac{k}{M}+\frac{1}{M}\int\limits_0^t [a(s)|(x(s)exp(-\beta s))'|+$$
$$+\,b(s)|(x(s)exp(-\beta s))'|\left(|x(s)exp(-\beta s)|+|(x(s)exp(-\beta s))'|\right)]ds\,;$$

teniendo en cuenta la condición (e), se sigue que

$$x'(t)|exp(-\beta t) \geq [|x'(t)+\beta x(t)|]exp(-\beta t \geq$$
$$\geq |x'(t)exp(-\beta t)-\beta x(t)exp(-\beta t)| \geq |[x(t)exp(-\beta t)]'|)\,;$$

de las dos últimas desigualdades obtenemos

$$|x_1'(t)| \leq k+\int\limits_0^t [a(s)|x_1'(s)|+b(s)|x_1'(s)|(|x_1(s)+|x_1'(s)|)]ds\,,$$

donde $x_1(t) = x(t)exp(-\beta t)$ y $x_1(0) = x(0)$. De acuerdo con el teorema 1 y las premisas (c) y (d) se puede asegurar que $x_1(t) \leq K$, donde $K \in \mathbb{R}_+^*$ y esto significa que $|x(t)| \leq Kexp(\beta t)$, tal como se quería. ☑

4. Conclusiones

La desigualdad integrodiferencial obtenida constituye una extensión de desigualdades obtenidas anteriormente. Dicha desigualdad permitió estudiar la acotación, la atractividad y el crecimiento lento de las soluciones de un sistema integrodiferencial tipo Volterra.

Bibliografía

[1] Burton, T. A. *Structure of Solutions of Volterra Equations*. SIAM Review **25** (1983), 243–264.

[2] Burton, T. A & Mahfoud, W. E. *Stability Criteria for Volterra Equations*. Trans. Am. Soc. **279** (1983), 143–174.

[3] Mahfoud, W. E. *Boundedness properties in Volterra integro–differential systems*. Pro. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 37–45

[4] Nápoles, J. E. & Velázquez, J. R. *Boundedness and stability properties of some integro–difrerential systems*. Revista Integración (UIS-Colombia), **14** (1) (1996), 9–14.

[5] Nápoles, J. E. & Velázquez, J. R. *Propiedades cualitativas de las soluciones de una ecuación Integro-diferencial tipo Volterra*. Memorias primera Conferencia Científica de Matemática y Computación, Universidad de Oriente. 1996, 65–69.

[6] Pachpate, B. G. *On some nonlinear Volterra integro–differential equations*. Ann. st. Univ. Al. I. Cuza **XXII** (1976), 153–160.

[7] Pachpate, B. G. *On some fundamental integro–differential and integral inequalities*. Ann. st.Univ. Al. I. Cuza **XXIII** (1977), 77–86.

[8] Velázquez, J. R.*Sobre el comportamiento cualitativo de ciertos sistemas integrodiferenciales*. Revista Ciencias Matemáticas Nro. 1 (2002).

[9] Velázquez, J. R. *Acotación, atractividad y crecimiento lento de las soluciones de un sistema integrodiferencial tipo Volterra*. Memorias VIII Congreso Nacional de Matemática Computación. S. Spíritus: 2003.

(Recibido en mayo de 2014. Aceptado para publicación en agosto de 2014)

Denis Álvarez Mora
Facultad de Ciencias Técnicas
Universidad de Granma
Bayamo, Cuba
e-mail: dalvarezmora@udg.co.cu

José Ramón Velázquez Codina
Facultad de Matemática e Informática
Universidad de Holguín
Holguín, Cuba
e-mail: velaquez@facinf.uho.edu.cu

Luis Alberto Pernía Nieves
Facultad Ciencias Técnicas
Universidad de Granma
Bayamo, Cuba
e-mail: lpernia@udg.co.cu

Manuel Peña Chávez
Facultad Ciencias Técnicas
Universidad de Granma
Bayamo, Cuba
e-mail: mpenac@udg.co.cu