Lecturas Matemáticas
Volumen **34** *(1) (2013), páginas 131–148*
ISSN 0120–1980

Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales[1]

Continued fractions in the historical development of the real numbers

Luis Cornelio Recalde & Viviana Lorena Vargas
Universidad del Valle, Cali, Colombia

Resumen. Una teoría satisfactoria de los números reales tuvo que esperar hasta mediados del siglo XIX. En este siglo, varios matemáticos establecieron construcciones de los números reales, formalizando el significado de estos objetos que se habían trabajado por mucho tiempo de una manera intuitiva. Sin embargo, previo a estas presentaciones, surgen diferentes técnicas operativas las cuales pueden considerarse como catalizadoras de tales construcciones. En este artículo se muestra que en los trabajos de Euler, sobre fracciones continuas, podemos vislumbrar una construcción implícita de los reales. Ésto permite sustentar la idea de que las fracciones continuas constituyen elementos de causalidad para las construcciones de los reales por parte de Karl Weierstrass, Charles Méray, George Cantor y Richard Dedekind.

Key words and phrases. Real numbers system, continued fractions, history of mathematics.

Abstract. A satisfactory theory of the real numbers had to wait for the second half of 19th century. At that moment, several mathematicians proposed diverse constructions of the real numbers, giving meaning to these objects which for a long time were worked on an intuitive basis. However, previously to these constructions, different operative techniques were considered and we may see them as catalyzers for

[1]Artículo realizado en el marco del proyecto de Investigación *La construcción histórica de los números reales: de las técnicas operativas a las representaciones formales*, financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Valle, Convocatoria 1-2009. Centro de información 7810.

these constructions. In this article we present EULER's work related to continuous fractions, where we can recognize an implicit construction of the real numbers. This allows to consider that continuous fractions constitute elements of causality for the constructions of real numbers by KARL WEIERSTRASS, CHARLES MERAY, GEORGE CANTOR and RICHARD DEDEKIND

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 01A20, 01A35, 01A40, 01A50, 11A55

Introducción

El propósito de este artículo es analizar algunos aspectos del proceso histórico de formación y construcción de los números reales. En particular se pretende mostrar que las construcciones de los números reales, establecidas en el siglo XIX, no sólo fueron motivadas como consecuencia de los requerimientos de rigor de algunos conceptos y procedimientos del análisis matemático, sino también debido a la necesidad de formalizar una serie de métodos de representación que sustentaban algunas técnicas operativas, las cuales exigían estructuración.

Entre los aspectos que típicamente se considera suscitaron la construcción de los reales podemos señalar: la demostración del valor intermedio por parte de BOLZANO, la determinación de los errores de CAUCHY en la demostración de algunos teoremas, la falta de fundamentación del cálculo diferencial que producía en DEDEKIND insatisfacción didáctica y el desconocimiento de las propiedades topológicas del continuo lineal que le impedía a CANTOR resolver el problema de unicidad de la representación de funciones en series trigonométricas. Sin embargo, en este documento mostraremos que podemos encontrar elementos de causalidad en el tratamiento simbólico y el uso de representaciones significantes de cantidades numéricas.

Desde un tratamiento moderno de los números reales resulta difícil entender la profundidad conceptual que enmarcan los sistemas de representación. Esto se debe al hecho que en la actualidad los conjuntos numéricos se han sintetizado en sistemas formales que esconden los problemas epistemológicos que se hacen evidentes en las revisiones históricas. Precisamente una diferencia rotunda con las presentaciones modernas y el desarrollo histórico, es que en la actualidad trabajamos los números reales como una estructura de entes abstractos con una operatividad y lenguaje propios, mientras que durante un largo periodo de tiempo se desarrolló una teoría de cantidades numéricas, cuyo campo de significación variaba según las circunstancias. De esta forma, la primera gran revolución en la búsqueda de estructura numérica, provino con la incorporación del sistema de representación decimal indo–arábigo.

A partir de la representación decimal se desatan las ataduras que desde la antigüedad nos tenían maniatados a una idea de número como colección de unidades, lo cual impedía la aceptación del uno como número y la existencia de un formalismo matemático para el tratamiento de fracciones o radicales. Así, por ejemplo, Diofanto, en la resolución de algunas ecuaciones, debía ejecutar verdaderos malabarismos operatorios con fracciones, sin ninguna generalidad. Justamente ese es uno de los aspectos que nos permite señalar a los árabes como los forjadores del álgebra. Si bien no manejaban expresiones simbólicas para las variables, la representación decimal les permitió establecer algoritmos de resolución para algunos tipos especiales de ecuaciones de segundo grado. La representación decimal muestra su fortaleza a partir de los desarrollos de los algebristas italianos Tartaglia, Cardano y Bombelli en el siglo XVI. Sin embargo fue el matemático flamenco Simon Stevin, quien mejor interpretó los alcances de la "revolución decimal". En su obra *L´Arithmetique*, de 1565, desarrolla una extensión del concepto de número. A diferencia de sus antecesores, Stevin considera la divisibilidad de la unidad, y por lo tanto a la unidad misma y a sus partes como números, pues se pueden operar y ordenar. En este sentido, Stevin desarrolla una ontología del número basado en la operatividad; como lo dice explícitamente: "son las operaciones que podamos realizar con los números las que determinan su naturaleza".

Al proporcionar un algoritmo de cálculo para las fracciones y los radicales, con la representación decimal se empieza a establecer una diferencia entre las expresiones decimales infinitas, para los radicales, y las expresiones finitas o periódicas para las fracciones. Desde una óptica moderna, se ha establecido la diferencia: racionales e irracionales algebraicos. La incorporación de los irracionales trascendentes se dio a partir de la incorporación de otra forma de representación que constituye el epicentro de este artículo: las fracciones continuas.

Una fracción continua es una expresión de la forma:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots}}}. \tag{1}$$

Los términos a_i y b_i pueden ser números enteros positivos[2]. Esta notación fue introducida por Alfred Pringsheim en 1898; sin embargo, existen otras formas de notación como por ejemplo la empleada por Pietro Cataldi (1548-1626) [1]:

$$a_0 \cdot \& \frac{b_1}{a_1.} \& \frac{b_2}{a_2.} \ldots$$

[2]Cuando todos los términos b_i son iguales a 1, la fracción continua se conoce como *simple*. Sin embargo, en un contexto más amplio los términos a_i y b_i pueden ser números complejos o funciones, en tal caso se llama *fracción continua generalizada*.

Otras notaciones son las siguientes

$$a_0 \frac{b_1}{a_1+} \frac{b_2}{a_2+} \cdots \frac{b_n}{a_n+} \cdots{}^{3}$$

ó

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \cdots \frac{b_n|}{|a_n} + \cdots{}^{4}$$

Las fracciones continuas tienen sus primeros antecedentes en los trabajos de EUCLIDES, dado que el algoritmo para hallar el máximo común divisor entre dos enteros provee un método para hallar una fracción continua. Posteriormente, en el siglo XVI se pueden mencionar los resultados de BOMBELLI y CATALDI quienes las emplean para encontrar aproximaciones de raíces cuadradas. JOHN WALLIS en su obra *La aritmética de los infinitesimales* presenta una pequeña teoría acerca de las fracciones continuas y una interesante representación de $\frac{4}{\pi}$. En los trabajos realizados por LEONHARD EULER, se encuentra una sistematización de la teoría de las fracciones continuas y, entre líneas, se puede intuir en un sentido actual una construcción de los reales en términos de fracciones continuas. Precisamente, mostrar tal lectura de la obra de EULER es el objetivo de este artículo.

1. El desarrollo de las fracciones continuas

El aporte de EUCLIDES al desarrollo de las fracciones continuas se da en dos instancias, producto de la separación que establece para los números y magnitudes. La primera tiene que ver con las magnitudes, en los libros V, VI y X. La segunda instancia corresponde a los libros VII, VIII y XIX, que tratan de la teoría de números.

El algoritmo de Euclides, desarrollado en los *Elementos*, para hallar el máximo común divisor entre dos números enteros, es un método que permite encontrar la fracción continua de un número racional. Este algoritmo se presenta en el libro VII de los *Elementos* a través de las siguientes proposiciones [4]:

Proposición VII. 1: Dados dos números desiguales y restándose sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede la unidad, los números iniciales serán primos entre sí.

Proposición VII. 2: Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.

Las siguientes proposiciones del libro X, expresan la *antiphaeresis*, la cual corresponde a la versión para magnitudes de las proposiciones anteriores

Proposición X. 1: Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad, y de la que queda, una magnitud mayor

[3]Por Sir JOHN FREDERICK WILLIAM HERSCHEL (Inglaterra, 1792 - 1871)
[4]Debida a MORITZ ABRAHAM STERM (Alemania, 1807-1894)

que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Proposición X. 2: Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

Los procesos que se presentan en las anteriores proposiciones se interpretan de la siguiente manera en dirección a las fracciones continuas [1]:

Dados dos números enteros positivos a, b con $a > b$, existen, p_0 entero positivo y $r_2 < b$, entero no negativo, tales que

$$a = p_0 b + r_2.$$

De igual forma, existen un entero positivo p_1 y un entero no negativo r_3, con $r_3 < r_2$, tales que

$$b = p_1 r_2 + r_3.$$

Si se sigue procediendo de la misma manera se tiene que

$$r_{n-1} = p_{n-1} r_n + r_{n+1} \text{ con } a = r_0, b = r_1,$$

hasta que $r_k = 0$, con $n = 1, 2, \ldots$.

De esta forma, el racional $\frac{a}{b}$ se puede escribir como una fracción continua finita de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} = p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{\cdots}{p_{n-1} + \cfrac{1}{p_n}}}}}.$$

El anterior proceso no se presenta de manera explícita en el trabajo de Euclides, sin embargo, constituye el principio rector utilizado *a posteriori* para establecer la representación en fracciones continuas para números racionales.

1.1. Desarrollo de Las fracciones continuas desde una perpectiva algebraica. Uno de los primeros escenarios en el que se va esbozando la necesidad de extender el concepto de número más allá de la teoría euclidiana se puede visualizar en el desarrollo de la teoría de ecuaciones, trazada inicialmente, entre otros, por Diofanto y Al-Khwarizmi.

Diofanto desarrolla lo que se conoce como álgebra sincopada, es decir, su trabajo se presenta en un lenguaje intermedio entre lo retórico y lo simbólico. Para la solución de ecuaciones, Diofanto incorpora las fracciones de enteros positivos, pero no las raíces inexactas. Uno de los aspectos que nos interesa destacar de la obra de Diofanto tiene relación con la incorporación de un tratamiento simbólico de las cantidades numéricas. En general, Diofanto procede como nosotros en la resolución de ecuaciones, pero descarta, por carecer de significado, las soluciones que no sean racionales y positivas, cuestión que determina el carácter de las denominadas ecuaciones diofánticas. Para la resolución de ecuaciones, Diofanto se aleja de la tradición euclidiana, y establece operaciones entre fracciones y entre fracciones y números. Diofanto denomina *aritmo* a la incógnita, la cual opera con los números. Estas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

1. Todo número multiplicado por una fracción que tenga por denominador el mismo número es la unidad.
2. Los divisores de un número, diferentes a él, multiplicados entre sí son divisores del número.
3. El producto del inverso del aritmo por el inverso del aritmo es el inverso de cuadrado del aritmo.
4. El producto de lo deficiente por lo deficiente es positivo.[5]
5. El producto de lo deficiente por lo positivo es lo deficiente.

Aunque Diofanto no establece un sustento formal para estas propiedades, observamos que se va abriendo camino una concepción de número, a partir de la operatividad, más allá de la influencia euclidiana.

Al-Khwarizmi implementa un método general de solución de ecuaciones en su libro *Hisab Al-jabr Wa'l Muqabalah*, considerado el primer libro auténtico de álgebra, cuya etimología revela las operaciones de transposición (al-jabr) y cancelación (al-muquabalah). Se pueden diferenciar dos clases de conceptos primitivos indispensables para el cálculo por al-jabr y muqabalah: los llamados algebraicos y los aritméticos. Los primeros corresponden a la incógnita simple, denominada "raíz", y el cuadrado de la incógnita que se designa como "tesoro". Los aritméticos corresponden a los números racionales positivos, la igualdad y las operaciones suma, resta producto, cociente y radicación. Tanto los conceptos algebraicos como los aritméticos son designados por palabras y los problemas son expuestos y solucionados de manera retórica, pero en el tratamiento numérico, usado en la resolución de ecuaciones, utiliza la representación decimal, lo que le permite calcular raíces con buena aproximación. A estas raíces aún no se les reconoce un carácter numérico en el sentido euclidiano. Pero dado que tienen un comportamiento similar, pues se pueden operar y ordenar, se les da el apelativo de *cantidades numéricas*.

El estatuto numérico de las fracciones se va configurando desde su representabilidad y funcionalidad, en el sentido que aparecen como coeficientes en las ecuaciones. De ninguna manera se puede hablar de un orden ontológico, sino que se toman como elementos auxiliares que van dando sustento a la consideración de las razones como números.

[5]Desde una visión moderna, lo deficiente correspondería a números precedidos del signo menos. Durante mucho tiempo se les designaba como cantidades negativas.

La búsqueda de soluciones de ecuaciones de la forma $P_n(x) = 0$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, plantea la necesidad de extender las soluciones más allá de las fracciones. En primer lugar se puede mencionar al italiano Luca Pacioli (1445-1514), quien en su obra *Summa Aritmética* realiza una recopilación de los desarrollos más significativos de la época en el campo de la aritmética, el álgebra, la geometría y la contabilidad. Pacioli expone algunos procedimientos para multiplicar y aproximar raíces cuadradas, además de métodos de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas.

De esta manera, surgen otro tipo de cantidades numéricas, como las negativas, raíces e imaginarias; sin embargo, no se puede hablar propiamente de racionales o irracionales, sólo se tiene una colección de cantidades que se comportan de manera similar a los números (enteros positivos), y aunque no se tiene claridad sobre su naturaleza, se usan de manera reiterada.

Los algebristas italianos, aceptaban como solución a sus ecuaciones los irracionales cuadráticos, los cuales se aproximaban a través de racionales utilizando la representación decimal. Estas aproximaciones, que en principio se calculaban sin reglas generales, tuvieron un gran refinamiento a través de la representación en fracciones continuas. Los primeros en implementarlas fueron los italianos Pietro Cataldi (1548 - 1626) y Rafael Bombelli.

Bombelli acepta las soluciones negativas de ecuaciones y proporciona un algoritmo para extraer raices cuadradas, el cual es equivalente a su expansión en fracciones continuas; sus desarrollos se presentan en *L'Algebra parte maggiore dell' aritmetica in tre libri* (1572) y en la segunda edición denominada *L'Algebra Opera* (1579). En particular, Bombelli extrae la raíz cuadrada de 13, equivalente a la siguiente representación en fracción continua:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4|}{|6} + \frac{4|}{|6} + \dots$$

que en términos modernos se puede obtener de la siguiente manera

$$r = A - a^2 = (\sqrt{A} + a)(\sqrt{A} - a)$$

Luego

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{a + \sqrt{A}} = a + \cfrac{r}{a + \cfrac{r}{a + \cfrac{r}{a + \dots}}}$$

El método seguido por Bombelli, para la extracción de la raiz cuadrada de un número A es el siguiente

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + x$$

luego

$$r = 2ax + x^2$$

Si se omite x^2, se tiene $x = \dfrac{r}{2a}$, así

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{2a}$$

Dado que $x = \dfrac{r}{2a}$ o $x^2 = \dfrac{rx}{2a}$ entonces

$$r = 2ax + \frac{r}{2a}x = (2a + \frac{r}{2a})x$$

Es decir

$$x = \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a}}$$

Ahora se tiene la siguiente aproximación

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a}}$$

Si se continúa procediendo de la misma manera se obtiene la fracción continua infinita

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \ddots}}}$$

Pietro Cataldi es otro protagonista en el desarrollo de las fracciones continuas, considerado por algunos autores como su descubridor. Cataldi sigue el mismo método de Bombelli, pero además da un notación a las fracciones continuas y algunas de sus propiedades. En su obra *Tratado acerca de la manera muy corta para encontrar la raíz cuadrada de los números, y reglas para aproximarse continuamente al resultado correcto de las raíces de los números no cuadrados, junto a sus causas e inventos, y también la manera para hallar su raíz cúbica, aplicando todo esto a las operaciones militares y a otras cosas*(1613), [6] Cataldi aproxima la raíz de 18, obteniendo

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \dots}}}$$

Cataldi computa los primeros 15 términos y afirma que son alternadamente más grandes y más pequeñas que $\sqrt{18}$ y que convergen a este valor.

[6] Tradución libre del título original *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri, et regole da approssimarsi di continuo al vero nelle radice de'numeri non quadrati, con le cause et inuentioni loro, et anco il modo di pigliarne la radice cuba, applicando il tutto alle operationi militari et altro.*

1.2. Desarrollo de las fracciones continuas desde la perspectiva del cálculo. Otro de los focos de desarrollo del concepto de número, que nos interesa, tiene relación con la evolución de la noción del área. Cuestión que hunde sus raíces en el problema de las cuadraturas de figuras planas, planteado desde la antigüedad griega. Si bien EUCLIDES resuelve, con regla y compás, el problema para las figuras rectilíneas, el inconveniente se presenta en las figuras no rectilíneas, en particular con la cuadratura del círculo; problema relacionado con la caracterización de la razón entre la circunferencia y su diámetro, que nos lleva directamente a la constante π.

En la antigüedad este problema se trabajaba usando el método de exhaución, considerando el área de polígonos inscritos y circunscritos al círculo. A partir del método exhaustivo, ARQUÍMEDES encontró una acotación para π:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

El problema general de las cuadraturas no tuvo avances sustanciales hasta el Renacimiento, cuando surgen una serie de métodos que dan luces para su resolución. A partir de la incorporación de la geometría analítica se da un cambio de enfoque del problema al transformarse en el problema de hallar el área bajo la curva; esto es, asignarle un número a cada región plana. Para el caso del círculo, tal como lo había especificado ARQUÍMEDES, se trata de determinar la naturaleza de π. Para ello hubo necesidad de incorporar una serie de procedimientos infinitesimales propios del cálculo. A partir de estos métodos se obtuvieron representaciones de π en sucesiones numéricas, como la serie de Newton, la serie de Leibniz y el producto de Wallis.

JOHN WALLIS (1616-1703), en su obra *La aritmética de los infinitesimales* resuelve el problema de la cuadratura del círculo. Uno de los métodos utilizados por WALLIS para demostrar sus resultados lo denomina *inducción*. Sin embargo, no se trata del moderno método de inducción matemática; el método consiste en encontrar una regla general de formación a partir de casos particulares que le permita extender un resultado. Además utiliza interpolación, que le permite incorporar pasos intermedios a partir de reconocer una ley secuencial genérica. A través de estos métodos WALLIS encuentra una expresión para π como el producto infinito,

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \dots};$$

expresión que aunque sorprendente, poca información proporciona sobre la característica de π. WALLIS comprende que este aspecto es muy significativo pues sospecha que si bien no es un racional, su naturaleza es diferente a las raíces inexactas; históricamente se abre la perspectiva de cantidades irracionales no algebraicas. Fue WILLIAM BROUNCKER, quien dio las primeras luces en esta dirección al encontrar la siguiente representación en fracciones continuas para la expresión de WALLIS, sin ninguna argumentación.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \dots}}}. \tag{2}$$

Wallis se propone comprobar tal resultado y empieza observando que el producto de dos números impares consecutivos es igual al cuadrado del par intermedio menos uno, así:

$$\begin{aligned} 1 \times 3 &= 2^2 - 1 \\ 3 \times 5 &= 4^2 - 1 \\ 5 \times 7 &= 6^2 - 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Según Wallis, Brouncker estaba buscando los valores que se deben sumar a los factores de tal forma que el producto no sea el cuadrado menos uno sino el cuadrado, lo cual se puede deducir del *producto infinito de Wallis*, luego:

$$\begin{aligned} A \times B &= 2^2 \\ B \times C &= 4^2 \\ C \times D &= 6^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wallis encuentra que estos valores $A, B, C, \dots$ son las siguientes fracciones continuas pero no muestra los pasos intermedios en el proceso [10]:

$$A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}, B = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \ddots}}}, C = 5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{3^2}{10 + \cfrac{5^2}{10 + \ddots}}}, \dots$$

De manera análoga procede para el producto de números pares consecutivos, formando un producto menor que el cuadrado requerido si el número de fracciones adjuntas al entero es par, o más grande si es impar, además, si se toman más términos el producto se aproximará al cuadrado requerido, lo cual confirma de la siguiente manera [10].

Sea F el primer número entero de cualquier factor y sea $F + 2$ el siguiente. El número entre ellos es $F+1$, el producto formado es F^2+2F, el cual es menor que el cuadrado de $F + 1$, es decir, $F^2 + 2F + 1$. Ahora se añade una fracción a F y a $F + 2$, de tal forma que su producto sea $(F + 1)^2$; esto es, $F + \frac{1}{2F}$ y

$F+2+\dfrac{1}{2F+4}$ cuyo producto es $\dfrac{4F^4+16F^3+20F^2+8F+4}{4F^2+8F}$, el cual es más grande que el cuadrado

$$F^2+2F+1=\frac{4F^4+16F^3+20F^2+8F}{4F^2+8F}.$$

Agregando una fracción más $F+\dfrac{1}{2F+\dfrac{9}{2F}}$ y $F+2+\dfrac{1}{2F+4+\dfrac{9}{2F+4}}$,

que forman el producto $\dfrac{16F^6+96F^5+280F^4+480F^3+649F^2+594F}{16F^4+64F^3+136F^2+144F+225}$, el cual es menor que el cuadrado

$$F^2+2F+1=\frac{16F^6+96F^5+280F^4+480F^3+649F^2+594F+225}{16F^4+64F^3+136F^2+144F+225}.$$

El cuadrado se puede aproximar tanto como se quiera. Luego, Brouncker pudo haber argumentado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi}&=\frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times\dots}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times\dots} &&=2\times\frac{1\times(3\times 3)\times(5\times 5)\times\dots}{(2\times 2)\times(4\times 4)\times(6\times\dots}\\ &=\frac{(2\times 2)\times(6\times 6)\times(10\times 10)\times\dots}{(4\times 4)\times(8\times 8)\times(12\times 12)\times\dots} &&=\frac{AB\times CD\times EF\times\dots}{BC\times DE\times FG\times\dots}=A.\end{aligned}$$

Esta forma de representación introduce una visión intuitiva acerca de otro tipo de cantidades numéricas: las cantidades trascendentes.

Históricamente, una cantidad empieza a considerarse número en cuanto exista un algoritmo para aproximarla en términos de racionales, como es el caso de los irracionales cuadráticos; las fracciones continuas en Wallis cobran vital importancia pues en sus trabajos se muestra, por primera vez, un número irracional no algebraico como una fracción continua.

Desde la antigüedad, los matemáticos se dieron que cuenta que los racionales eran la herramienta que se requería para obtener los irracionales. Las fracciones continuas son una muestra de ello, pues la representación en esta forma, brinda una sucesión de racionales (los convergentes parciales) que converge al número. De hecho, dada la fracción continua

$$\alpha=a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4+\dots}}}},$$

se tiene que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n},$$

donde p_n y q_n, están dados de manera recursiva por

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2},$$

tomando,

$$p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + b_1$$

$$q_0 = 1, q_1 = a_1.$$

Esto permite asociar una sucesión de racionales $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ a cada fracción continua. Luego, si α es un número irracional representado como una fracción continua, entonces se puede aproximar por medio de racionales. La representación en fracciones continuas tiene ventajas, dado que, dependiendo de su forma, se puede determinar el tipo de número que representa, puesto que si la fracción continua es finita, entonces es un número racional, si es infinita es un irracional, y, más aún, si la fracción continua es infinita periódica es un irracional cuadrático.

2. **Las fracciones continuas en Euler**

La mayor contribución a las fracciones continuas hasta el siglo XVIII se debe a Leonhard Euler. En sus obras, *Introducción al Análisis del Infinito* y *Sobre Fracciones Continuas*, realiza una sistematización de la teoría de las fracciones continuas. Concretamente, Euler establece tres resultados: (1) Cada número racional se puede representar como una fracción continua finita. (2) Todo número irracional se puede representar como una fracción continua infinita. (3) Una fracción continua periódica es el cero de una ecuación cuadrática. Además, Euler muestra expresiones para e, $\dfrac{e+1}{e-1}$, $\dfrac{e-1}{2}$.

Teniendo la fórmula de recurrencia y dado que Euler encuentra que cada número se puede representar como una fracción continua, entonces se tiene que cada número irracional se puede expresar como el límite de una sucesión de racionales. Además, esta representación como fracción continua no sólo ofrece una aproximación a través de racionales, sino que ofrece la mejor aproximación. Al respecto, en *Sobre Fracciones Continuas* afirma:

> *Una fracción cuyo numerador y denominador están dados por números infinitamente largos (los cuales están dados por cantidades irracionales y tracendentes) será una fracción continua extendiéndose a infinito.*

2.1. Euler y la construcción de los reales. De ninguna manera se puede afirmar que exista en Euler una preocupación sentida por construir un corpus numérico al estilo de las elaboraciones de Cantor y Dedekind. Sin embargo, la organización de sus resultados desde una perspectiva moderna, nos permite visualizar una construcción implícita de $\mathbb{R}$. En este sentido, nos encontraríamos frente a un cuerpo numérico delineado cien años antes de las construcciones típicas y edificado a partir de la representación de las cantidades numéricas en fracciones continuas. Para ello supongamos la existencia del conjunto F de las fracciones continuas y estudiemos las propiedades básicas que caracterizan a $\mathbb{R}$, las cuales se cumplen en F.

Como hemos comentado antes, Euler establece una clasificación de las fracciones continuas F en finitas e infinitas, es decir, fracciones de la forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \qquad \text{y} \qquad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}},$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son números enteros positivos[7] . Dada una fracción continua se definen sus convergentes[8], como los números racionales $\frac{p_n}{q_n}$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{q_0} &= a_0\\
\frac{p_1}{q_1} &= a_0 + \frac{1}{a_1}\\
\frac{p_2}{q_2} &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}\\
\frac{p_3}{q_3} &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}
\end{aligned}$$

[7]Como se puede notar, Euler sólo se preocupa por la representación de los números reales positivos.

[8]También llamados convergentes parciales.

$$\vdots$$

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}.$$

La sucesión de convergentes $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ puede ser finita o infinita, dependiendo de la naturaleza de la fracción continua.

El proceso de formación de los convergentes parciales de toda fracción continua sigue la siguiente ley de recurrencia:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

A través de esta relación de recurrencia entre los numeradores y denominadores de los convergentes parciales, se tiene que cada número real positivo α se puede describir como una sucesión de racionales que converge al número,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}.$$

Euler demuestra que las fracciones continuas finitas representan números racionales y que los números racionales se escriben como fracciones continuas finitas; además muestra que los irracionales se representan como fracciones continuas infinitas. Pero no prueba que una fracción continua infinita representa un número irracional, es decir, no prueba la convergencia de la fracción continua. Sin embargo, tiene los elementos básicos para establecer este resultado, tal como lo mostramos a continuación.

Dado que $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{q_1} &= \frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} \\ \frac{p_2}{q_2} &= \frac{p_1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{q_{m-1} q_m}. \tag{3}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} u = \langle a_0; a_1, a_2, \ldots\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle a_0; a_1, \ldots, a_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} \end{aligned}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n-1}q_n}. \tag{4}$$

Esta serie converge, pues $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{q_n q_{n-1}} = 0$, dado que

$$q_n \geq 2^{\frac{n-2}{2}}, \tag{5}$$

lo cual se demuestra por inducción sobre n, dado que $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$. De esta forma cada fracción continua converge a un número real α.

El anterior resultado permite establecer un puente de contacto entre la representación en fracciones continuas y la representación en sucesiones fundamentales. Las operaciones de suma y producto en F se definirían de acuerdo a las operaciones con sucesiones fundamentales y por lo tanto cumplirían las mismas propiedades algebraicas. Una ventaja adicional de la representación en fracciones continuas es su unicidad, lo cual fue utilizado por Cantor para demostrar la equipotencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

En el conjunto F de las fracciones continuas se puede definir una relación de orden de la siguiente manera. Dadas las fracciones continuas,

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}} \qquad \text{y} \qquad \beta = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{b_4 + \ddots}}}}$$

se tiene que

1. Si $a_0 \neq b_0$ entonces $\alpha > \beta$ si $a_0 > b_0$.
2. Si $a_0 = b_0$, entonces $\alpha > \beta$ si $a_1 < b_1$.
3. Si $a_0 = b_0$ y $a_1 = b_1$, entonces $\alpha > \beta$ si $a_2 > b_2$.
4. En general, si $a_i = b_i$ para todo $n \leq i$ entonces $\alpha > \beta$ si $a_{n+1} > b_{n+1}$ donde i es número impar. Si i es un número par entonces $\alpha > \beta$ si $a_{n+1} < b_{n+1}$.

De esta definición fácilmente se sigue que F es un cuerpo arquimediano y se pueden demostrar las otras propiedades de $\mathbb{R}$, que son características del orden.

3. Conclusiones

Teniendo en cuenta los aspectos desarrollados en este artículo, se ha podido mostrar, para el caso de las fracciones continuas, que los sistemas de representación no sólo constituyen empaques que permiten la operatividad, sino que guardan elementos conceptuales que brindan información sobre la naturaleza del número. Típicamente se argumenta la importancia histórica de las fracciones continuas por su contribución en las siguientes cuestiones: La resolución de ecuaciones diofánticas (como la dada por JOSEPH LOUIS LAGRANGE en 1780 para la ecuación de Pell[9]); la demostración de la irracionalidad de algunos números reales como e, $\frac{e+1}{e-1}$, $\frac{e-1}{2}$, por parte de EULER[10]; la demostración, por parte de LAGRANGE, de que una raíz real de una cuadrática irracional, es una fracción continua periódica; la representación de funciones avanzadas, como la función de Bessel, utilizando la presentación de la función hipergeométrica en fracciones continuas, elaborada por GAUSS en 1813; la demostración, en 1844, de la existencia de irracionales de naturaleza diferente a las raíces de números enteros positivos que no son cuadrados perfectos, lo cual abre el abanico de los irracionales trascendentes. Cuestión utilizada por LINDEMANN, en 1882, para demostrar la trascendencia de π y por lo tanto, para demostrar la imposibilidad de la cuadratura del círculo con regla y compás. Las fracciones continuas se utilizaron también en el llamado “problema de los momentos”, solucionado por THOMAS JAN STIELTJES en su artículo *Recherches sur les fractions continues* de 1894 [8].

Además la representación en fracciones continuas provee la mejor aproximación de un número real. Se dice que un número racional $\frac{p}{q}$ es una mejor aproximación de un número real x, si para todos los racionales $\frac{p}{q}$, con $0 < s < q$, se tiene que $|qx - p| < |sx - r|$, con $p \neq r, q \neq s$.

Sin embargo, más allá de estos casos particulares, en este artículo hemos mostrado, desde una mirada macro, que las fracciones continuas esbozan y dimensionan una construcción de los reales, lo cual constituye un elemento de causalidad importante para los desarrollos de CANTOR y DEDEKIND. Esto se debe a que las fracciones continuas contienen información acerca del número que representan: los racionales como las fracciones continuas finitas y los irracionales como las infinitas.

Estableciendo las propiedades básicas del conjunto F de las fracciones continuas, podemos observar que satisfacen las condiciones que debe cumplir una “buena definición” de número real, según RICHARD DEDEKIND; esto es: no

[9]Esta ecuación es la siguiente: $x^2 - ny^2 = 1$, con n entero positivo que no es un cuadrado perfecto.

[10]Resultado generalizado por LAMBERT para e^x y $\tan x$.

hacen alusión a cuestiones de tipo geométrico ni intuitivo, permiten establecer las operaciones básicas y una relación de orden y, por último, provienen de una misma definición. Éste es un aspecto muy importante, pues hasta el siglo XVIII no había una definición clara de número real. Algunos números se obtenían como solución de ecuaciones, otros como la cuadratura de figuras geométricas, etc. A partir de Euler, las fracciones continuas evidencian la posibilidad de definir los reales desde la aritmética, sin hacer alusión a la medida de magnitudes como se hacía usualmente.

Tal como lo hemos presentado, podemos decir que históricamente las fracciones continuas van delineando construcciones como las de Heine y Cantor, en términos de sucesiones de Cauchy, pues cada sucesión de convergentes parciales corresponde a un representante de las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy. Esto nos permite mostrar que las técnicas operativas, en este caso las fracciones continuas, constituyen un eslabón conceptual en el desarrollo de la noción de número real.[11]

Referencias

[1] Brezinski, Claude. *The history of continued fractions and Padé approximants.* Springer–Verlag: Berlín, 1991.

[2] Cantor, Georg. *Fundamentos para una teoría general de conjuntos.* Traducción de José Ferreirós & Emilio Gómez. Crítica: Barcelona, 2003.

[3] Dedekind, Richard. *¿Qué son y para qué sirven los números?* Alianza Editorial: Madrid, 1998

[4] Euclides. *Los elementos.* Editorial Gredos: Madrid, 1991.

[5] Euler, Leonhard. *Introduction to analysis of the infinite.* Book I. Traducción de John Blanton. Springer–Verlag: New York, 1988.

[6] Euler, Leonhard. *An essay on continued fractions.* Traducción de Bostwick Wyman. Springer-Verlag : New York, 1985.

[7] Jones, W. B. & Thron, W. J. *Continued Fractions: Analytic Theory and Applications.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, volume 11. Addison-Wesley: Reading MA, 1980.

[8] Stieltjes, Thomas Jan. *Recherches sur les fractions continues.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **8** (4) (1894), J1–J122.

[9] Wall, H. S. *Analytic Theory of Continued Fractions.* Van Nostrand, New York, 1948.

[10] Wallis, John. *The arithmetic of the infinitesimals.* Traducción de Jackeline Stedall. Springer–Verlag. New York. 2004.

(Recibido en octubre de 2012. Aceptado para publicación en diciembre de 2012)

Luis Cornelio Recalde
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle, Cali, Colombia

[11]Para los interesados en profundizar respecto al desarrollo histórico de las fracciones continuas se recomienda las monografías: (1) Wall, H. S., *Analytic Theory of Continued Fractions*, Van Nostrand, New York, 1948. (2) Jones, W. B. & Thron, W. J. *Continued Fractions: Analytic Theory and Applications.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications volume 11, Addison-Wesley, Reading MA, 1980.

e-mail: luis.recalde@correounivalle.edu.co
Viviana Lorena Vargas
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle, Cali, Colombia
e-mail: vivagra@gmail.com