Lecturas Matemáticas
Volumen **32** *(2011), páginas 79–91*
ISSN 0120–1980

Un método matricial para el cálculo de la constante de Olson k−baricéntrica

Juan Otero
Instituto de Tecnología de Cumaná, Venezuela
Henry Márquez & Felicia Villarroel
Escuela de Ciencias, Universidad de Oriente, Venezuela

Abstract. Given a finite abelian group G and a positive integer k, the $k-$barycentric Olson constant of G, denoted by $BO(k, \mathbb{Z}_n)$, is the minimum t such that every subset of t elements of G contains a subset with k elements $\{x_1, \ldots, x_k\}$ that satisfies the property that $\sum_{i=1}^{k} = kx_j$ for some $j \in \{1, \ldots, k\}$. One such subset with k elements is called $k-$barycentric and x_j is called a $k-$barycentric for it.
In this paper, after recalling the relevant definitions and rely on some results of the theory of set barycenters we present an algorithm to calculate the constant $BO(k, \mathbb{Z}_n)$. The algorithm is illustrated with the calculation of $BO(3, \mathbb{Z}_6)$. Half of the article contains tables that give the values $BO(k, \mathbb{Z}_n)$ for $3 \leq n \leq 23$ and $3 \leq k \leq n$.

Key words and phrases. $k-$barycentric sequence, $k-$barycentric Olson constant and matricial method.

MSC2010: *05C38, 05C45, 05C70*

Resumen. Dado un grupo abeliano finito G y un entero positivo k, la constante de Olson $k-$baricéntrica de G, denotada por $BO(k, \mathbb{Z}_n)$, es el mínimo t tal que cada subconjunto de t elementos de G contiene un subconjunto con k elementos $\{x_1, \ldots, x_k\}$ que cumple con la propiedad de que $\sum_{i=1}^{k} = kx_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, k\}$. Un tal subconjunto con $k-$elementos se llama $k-$baricéntrico y el x_j correspondiente se llama un $k-$baricentro del conjunto.
En este artículo, después de recordar las definiciones pertinentes y contar sobre algunos resultados de la teoría de los conjuntos baricéntricos, se presenta un algoritmo para calcular la constante $BO(k, \mathbb{Z}_n)$. El algoritmo está ilustrado con el cálculo de $BO(3, \mathbb{Z}_6)$. La mitad del artículo contiene tablas que dan los valores $BO(k, \mathbb{Z}_n)$ para $3 \leq n \leq 23$ y $3 \leq k \leq n$.

1. Introducción

Sea G un grupo abeliano finito de orden n, S una secuencia de elementos de G, es decir la repetición de elementos es permitida y el orden de colocación de los elementos no se considera. Sean $S \subseteq G$ una secuencia o un conjunto, $|S|$ la longitud o cardinalidad de S y $\sum(S) = \{\sigma(A) : A \subseteq S\}$, donde $\sigma(A)$ es la suma de los elementos de A. Si $\sigma(A) = 0$, decimos que A *es de suma cero*.

El primer resultado conocido sobre problemas de suma cero, es el denominado por Erdős como *lema prehistórico*: *Sea G un grupo abeliano de orden n. Entonces toda secuencia de n elementos contiene una subsecuencia de suma cero.* En 1961, Erdős, Ginzburg & Ziv [3], presentaron el siguiente teorema: *toda secuencia de $2n-1$ elementos en un grupo abeliano de orden n, contiene una n-subsecuencia de suma cero.* Este resultado constituye la base fundamental del desarrollo del área de investigación denominada *problemas de suma cero*, la cual está inmersa en el campo de la *teoría aditiva* y, por tanto, utiliza muchos resultados de dicha teoría como herramientas básicas.

Específicamente se estudian las secuencias baricéntricas, las cuales se definen como: una secuencia $f : A \to G$ donde A es un conjunto finito con $|A| \geq 2$ y tal que existe $a \in A$ que verifica $\sum f = |A|f(a)$. Usamos la palabra secuencia porque podemos asociar, sin ningún inconveniente, al conjunto A con el conjunto $\{1, 2, ..., |A|\}$. Indistintamente se usan según sea el caso las dos notaciones para una secuencia, es decir, $f : A \to G$ o $a_1 a_2 \ldots a_n$. El elemento $f(a)$ se llama *baricentro*. Cuando $|A| = k$ hablamos de *secuencia $k-$baricéntrica* y cuando f es inyectiva hablamos de *conjunto $k-$baricéntrico*; por ejemplo, en $\mathbb{Z}_5$, la secuencia 023 es 3-baricéntrica, ya que $0 + 2 + 3 = 0 = 3 \times 0$, mientras que la secuencia 112 no lo es.

El estudio de las secuencias baricéntricas se inicia en [1] y [2]. En [4] y [6], se estudia la constante de Olson $k-$baricéntrica, $BO(k, G)$, es decir, el menor entero positivo t tal que todo t-conjunto, es decir, un conjunto de cardinalidad t, en G contenga un subconjunto $k-$baricéntrico. En [6], se presenta un método algorítmico basado en la teoría de órbitas, para el cálculo de dicha constante, para $3 \leq n \leq 12$ y $3 \leq k \leq n$. En este trabajo se presenta un método basado en la teoría matricial para el cálculo de $BO(k, \mathbb{Z}_n)$. Se verifican los valores obtenidos en [4] y se corrigen 5 valores, además se calculan nuevos valores para $3 \leq n \leq 23$ y $3 \leq k \leq n$.

2. Método matricial para el cálculo de $BO(k, \mathbb{Z}_n)$

En [5], se introduce el siguiente método: Supongamos que se quiere obtener $BO(k, \mathbb{Z}_n)$, con los elementos de $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. En primer lugar, chequeamos el siguiente teorema dado en [4],

1. cuando $n = k$ y n es par se tiene que $BO(k, \mathbb{Z}_n)$ no existe.
2. si n es impar con $k = n - 1$ se tiene que $BO(k, \mathbb{Z}_n)$ no existe.

En caso contrario, se forman todas las combinaciones de esos elementos sin repetición mediante la fórmula

$$\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

donde k es la cardinalidad del conjunto a formar en la constante. Luego se verifica cuales de los conjuntos son $k-$baricéntricos y cuáles no. Si todos los conjuntos son $k-$baricéntricos nuestro método finaliza, y se tiene que $BO(k, \mathbb{Z}_n) = k$.

En caso contrario, se forman dos matrices, una formada por los conjuntos $k-$baricéntricos y otra formada por los conjuntos no $k-$baricéntricos, esta última matriz es de orden $p \times k$, donde p es el número de conjuntos no $k-$baricéntricos. A partir de cada conjunto no $k-$baricéntrico se construyen matrices de orden $m \times (k+1)$, donde $m = n - k$, y se verifica que sean matrices $k-$baricéntricas; de serlo, el valor de $BO(k, \mathbb{Z}_n) = m + 1$, sino se construyen matrices, de otro nivel, es decir, de orden $(m-1)\times(k+2)$ y se verifican que las matrices sean $k-$baricéntricas, de serlo la $BO(k, \mathbb{Z}_n) = k+2$. Así continúa el proceso hasta que todas las matrices sean $k-$baricéntricas, luego $BO(k, \mathbb{Z}_n) = q$, donde q es el número de columnas de las matrices $k-$baricéntricas del último nivel.

3. Ejemplo de aplicación del método

Verificar que $BO(3, \mathbb{Z}_6) = 5$

Paso 1: Se busca el número de combinaciones sin repetición con los elementos de $\mathbb{Z}_6$, tomados de 3 en 3, mediante la fórmula:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

que son:

$$\begin{pmatrix} 012 & 013 & 014 & 015 & 023 \\ 024 & 025 & 034 & 035 & 045 \\ 123 & 124 & 125 & 134 & 135 \\ 145 & 234 & 235 & 245 & 345 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Se chequean cuáles de estas secuencias son 3-baricéntricas y cuáles no; luego se forman dos matrices, una que va a contener como filas las secuencias 3-baricéntricas y otra que tendrá como filas las secuencias no 3-baricéntricas.

$$M3B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad MN3B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

M3B: matriz 3- baricéntrica MN3B: matriz no 3- baricéntrica

Paso 3: Construcción de submatrices de orden 3×4. Con cada una de las filas de la matriz MN3B matriz nobaricéntrica, se construyen submatrices de orden $m\times(k+1)$, en donde m es el complemento de los elementos que no están en la secuencia, es decir, $m = n - k$. Luego, se chequean si todas las submatrices son 3-baricéntricas, de ser cierto el valor de $BO(3,\mathbb{Z}_6) = k+1$, es decir $BO(3,\mathbb{Z}_6) = 4$.

En el paso 3 se generan las siguientes matrices:

$$M_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad M_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad M_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_4^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad M_5^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad M_6^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_7^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad M_8^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad M_9^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_{10}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad M_{11}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad M_{12}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Pero en la submatriz M_1^1, la fila 0134 no es 3-baricéntrica, por tanto el $BO(3,\mathbb{Z}_6) > 4$.

Paso 4: Construcción de submatrices de orden 2×5. Con la filas no 3-baricéntricas de las submatrices de orden 3×4, se construyen submatrices de orden $(m-1)\times(m+2)$, es decir, submatrices de orden 2×5, esto es,

$$M_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad M_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Así, se continúa el proceso hasta llegar a verificar que todas las submatrices que nos quedan sean 3-baricéntricas. En consecuencia, en este último nivel todas las matrices de orden 4×5 son 3-baricéntricas, esto quiere decir, que todas las filas de la submatrices son 3-baricéntricas por tanto, $BO(3, \mathbb{Z}_6) = 5$.

4. Algoritmo principal para el cálculo de la $BO(k, G)$

Entrada: n, k enteros positivos mayor o igual a 3

Salida: $BO(k, \mathbb{Z}_n)$

Paso 0 Se chequean las condiciones siguientes dadas por teoremas:

1. cuando $n = k$ y n es par se tiene que $BO(k, \mathbb{Z}_n)$ no existe.
2. si n es impar con $k = n - 1$ se tiene que $BO(k, \mathbb{Z}_n)$ no existe.

Paso 1 Se busca el número de combinaciones sin repetición de los n elementos tomados de k en k, mediante la fórmula

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Paso 2 Se chequean cuáles de la combinaciones del paso 1, mediante la subrutina secuenciakbari, son $k-$baricéntricas.

Paso 3 Se forman dos matrices, una que contiene las secuencias $k-$baricéntricas, denominada matrizbari y la otra contendrá las secuencias no $k-$baricéntricas, llamada matriznobari.

Paso 4 Con cada una de las filas de las matriznobari, se construyen submatrices de orden $m_1 \times (k+1)$, donde $m_1 = n - k$, es decir m_1 es la cardinalidad del complemento de los elementos que no están en la secuencia nobari y k es la longitud de la secuencia en estudio.

Paso 5 Se chequean si todas las submatrices son $k-$baricéntricas. Esto es aplicándole el paso 2, a todas las filas de las submatrices del paso 4, de ser todas las submatrices $k-$baricéntricas, el $BO(k, \mathbb{Z}_n) = k + 1$.

Paso 6 Sino, con cada una de las filas nobari de las submatrices del paso 4, se construyen submatrices de orden $m_2 \times (k+2)$, donde $m_2 = n - k + 1$, es la cardinalidad del complemento de los elementos que no están en la secuencia nobari y $k+1$ es la longitud de la secuencia o conjunto en estudio.

Paso 7 Se aplica nuevamente el paso 5, es decir, se chequean si todas las submatrices son $k-$baricéntricas, esto es aplicándole el paso 2, a todas las filas de las submatrices, de ser todas las submatrices $k-$baricéntricas, el $BO(k, \mathbb{Z}_n) = k + 2$.

Paso 8 Se aplica el paso 6, esto es, con cada una de las filas nobari de las submatrices del paso 7, se construyen submatrices de orden $m_3 \times (k+3)$, donde $m_3 = n - k + 2$, es la cardinalidad del complemento de los elementos que no están en la secuencia nobari y $k + 2$ es la longitud de la secuencia o conjunto en estudio.

Paso 9 Así se continúa en este ciclo hasta que, todas las submatrices sean $k-$baricéntricas.

Paso 10 Salida $BO(k, \mathbb{Z}_n) = m$, donde m es el número de columnas del último nivel analizado, en donde todas las matrices son $k-$baricéntricas.

Paso 11 Fin.

5. Tablas de nuevos valores de $BO(k, G)$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,3,4}	3	$\mathbb{Z}_{12}$	5	4,837
{0,1,3,4}	3	$\mathbb{Z}_{13}$	5	9,082
{0,1,3,7,8,10}	3	$\mathbb{Z}_{14}$	7	28,509
{0,1,3,4}	3	$\mathbb{Z}_{15}$	5	54,758
{0,1,3,7,8,10}	3	$\mathbb{Z}_{16}$	7	169,004
{0,1,3,7,8}	3	$\mathbb{Z}_{17}$	6	285,996
{0,1,3,4,10,11,13,14}	3	$\mathbb{Z}_{18}$	9	1.481,930
{0,1,3,7,8,10}	3	$\mathbb{Z}_{19}$	7	2.460,904
{0,1,3,4,10,11,13,14}	3	$\mathbb{Z}_{20}$	9	3.889,228
{0,1,3,7,8,10	3	$\mathbb{Z}_{21}$	7	5.766,538
{0,1,3,4,10,11,13,14}	3	$\mathbb{Z}_{22}$	9	16.733,393
{0,1,3,7,8,10}	3	$\mathbb{Z}_{23}$	7	20.460,577

Tabla 1. Valores de $BO(k, G)$ para $k = 3$ y $12 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,4,7,8}	4	$\mathbb{Z}_{12}$	7	11,113
{0,1,3,6,7}	4	$\mathbb{Z}_{13}$	6	21,081
{0,1,3,6,7}	4	$\mathbb{Z}_{14}$	6	65,160
{0,1,2,4,7,8}	4	$\mathbb{Z}_{15}$	7	204,575
{0,2,3,6,7,10,11,14}	4	$\mathbb{Z}_{16}$	9	579,646
{0,1,3,6,7}	4	$\mathbb{Z}_{17}$	6	978,773
{0,1,2,7,9,10,14,16}	4	$\mathbb{Z}_{18}$	8	3.265,978
{0,1,2,4,7,8}	4	$\mathbb{Z}_{19}$	7	6.329,585
{0,1,2,4,5,8,9,12,13,16}	4	$\mathbb{Z}_{20}$	11	18.471,163
{0,1,2,7,9,14,16	4	$\mathbb{Z}_{21}$	8	26.227,036
{0,1,2,7,9,14,16}	4	$\mathbb{Z}_{22}$	8	50.821,646
{0,1,2,7,9,14,16}	4	$\mathbb{Z}_{23}$	8	90.090,098

Tabla 2. Valores de $BO(k,G)$ para $k=4$ y $12 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,3,7,11}	5	$\mathbb{Z}_{12}$	7	12,765
{0,1,2,3,7,11}	5	$\mathbb{Z}_{13}$	7	43,851
{0,1,2,3,7,11}	5	$\mathbb{Z}_{14}$	7	146,062
{0,1,2,3,7,11}	5	$\mathbb{Z}_{15}$	7	647,071
{0,1,4,5,8,9,12,13}	5	$\mathbb{Z}_{16}$	9	701,792
{0,1,2,3,7,11}	5	$\mathbb{Z}_{17}$	7	1.800,581
{0,1,2,3,7,11}	5	$\mathbb{Z}_{18}$	7	4.429,099
{0,1,2,3,7,11}	5	$\mathbb{Z}_{19}$	7	14.555,809
{0,1,4,5,8,9,12,13}	5	$\mathbb{Z}_{20}$	9	44.482,105
{0,1,2,3,7,11}	5	$\mathbb{Z}_{21}$	7	68.053,995
{0,1,4,5,8,9,12,13}	5	$\mathbb{Z}_{22}$	9	90.345,290
{0,1,4,5,8,9,12,13}	5	$\mathbb{Z}_{23}$	9	113.618,208

Tabla 3. Valores de $BO(k,G)$ para $k=5$ y $12 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,3,4,6,7}	6	$\mathbb{Z}_{12}$	8	16,653
{0,1,2,3,4,6,7}	6	$\mathbb{Z}_{13}$	8	43,584
{0,1,2,3,4,6,8,12}	6	$\mathbb{Z}_{14}$	9	229,448
{0,1,2,3,4,6,7}	6	$\mathbb{Z}_{15}$	8	916,579
{0,1,2,3,4,6,7}	6	$\mathbb{Z}_{16}$	8	1.618,349
{0,1,2,3,4,6,7}	6	$\mathbb{Z}_{17}$	8	4.835,705
{0,1,2,3,4,6,8,12}	6	$\mathbb{Z}_{18}$	9	23.964,345
{0,1,2,3,4,6,7}	6	$\mathbb{Z}_{19}$	8	44.903,395
{0,1,2,3,4,6,8,12}	6	$\mathbb{Z}_{20}$	9	138.993,947
{0,1,2,3,4,6,8,12}	6	$\mathbb{Z}_{21}$	9	169.098,218
{0,1,2,3,4,6,8,12}	6	$\mathbb{Z}_{22}$	9	210.653,980
{0,1,2,3,4,6,8,12}	6	$\mathbb{Z}_{23}$	9	250.763,120

Tabla 4. Valores de $BO(k,G)$ para $k=6$ y $12 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,3,4,5,7,10}	7	$\mathbb{Z}_{12}$	9	3,930
{0,1,2,3,5,7,8}	7	$\mathbb{Z}_{13}$	8	23,220
{0,1,2,3,4,5,7,10}	7	$\mathbb{Z}_{14}$	9	313,896
{0,1,2,3,4,5,7,10}	7	$\mathbb{Z}_{15}$	9	771,812
{0,1,2,3,4,5,7,10}	7	$\mathbb{Z}_{16}$	9	2015,878
{0,1,2,3,4,5,7,10}	7	$\mathbb{Z}_{17}$	9	7426,398
{0,1,2,3,4,5,7,10}	7	$\mathbb{Z}_{18}$	9	25.911,857
{0,1,2,3,5,7,8}	7	$\mathbb{Z}_{19}$	8	44.356,218
{0,1,2,3,4,5,7,10}	7	$\mathbb{Z}_{20}$	9	85.785,009
{0,1,2,3,5,7,8}	7	$\mathbb{Z}_{21}$	8	111.983,224
{0,1,2,3,5,7,8}	7	$\mathbb{Z}_{22}$	8	139.546,093
{0,1,2,3,5,7,8}	7	$\mathbb{Z}_{23}$	8	209.452,046

Tabla 5. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 7$ y $12 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,3,4,5,7,8}	8	$\mathbb{Z}_{12}$	9	1,684
{0,1,2,3,4,5,7,8}	8	$\mathbb{Z}_{13}$	9	7,427
{0,1,2,3,4,5,7,8}	8	$\mathbb{Z}_{14}$	9	88,251
{0,1,2,3,4,5,8,10,12}	8	$\mathbb{Z}_{15}$	10	438,965
{0,1,2,3,4,5,8,10,12}	8	$\mathbb{Z}_{16}$	10	3.354,036
{0,1,2,3,4,5,8,10,12}	8	$\mathbb{Z}_{17}$	10	7,473,969
{0,1,2,3,4,5,6,7,9,10}	8	$\mathbb{Z}_{18}$	11	36.753,082
{0,1,2,3,4,5,7,8}	8	$\mathbb{Z}_{19}$	9	63.321,466
{0,1,2,3,4,5,6,7,9,10}	8	$\mathbb{Z}_{20}$	11	112.526,985
{0,1,2,3,4,5,7,8}	8	$\mathbb{Z}_{21}$	9	156.781,234
{0,1,2,3,4,5,6,7,9,10}	8	$\mathbb{Z}_{22}$	11	189.702,662
{0,1,2,3,4,5,7,8}	8	$\mathbb{Z}_{23}$	9	224.219,921

Tabla 6. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 8$ y $12 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,2,4,5,6,7,8,9,10}	9	$\mathbb{Z}_{12}$	10	0,386
{0,2,4,5,6,7,8,9,10}	9	$\mathbb{Z}_{13}$	10	1,253
{0,2,4,5,6,7,8,9,10}	9	$\mathbb{Z}_{14}$	10	13,989
{0,1,3,4,6,7,9,10,12,13}	9	$\mathbb{Z}_{15}$	11	176,975
{0,2,4,5,6,7,8,9,10}	9	$\mathbb{Z}_{16}$	10	1.175,519
{0,2,4,5,6,7,8,9,10}	9	$\mathbb{Z}_{17}$	10	5.235,619
{0,1,3,4,6,7,9,10,12,13}	9	$\mathbb{Z}_{18}$	11	45.344,263
{0,2,4,5,6,7,8,9,10}	9	$\mathbb{Z}_{19}$	10	90.234,120
{0,1,3,4,6,7,9,10,12,13}	9	$\mathbb{Z}_{20}$	11	130.193,347
{0,1,3,4,6,7,9,10,12,13}	9	$\mathbb{Z}_{21}$	11	169.092,780
{0,1,3,4,6,7,9,10,12,13}	9	$\mathbb{Z}_{22}$	11	230.762,096
{0,1,3,4,6,7,9,10,12,13}	9	$\mathbb{Z}_{23}$	11	323.989,922

Tabla 7. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 9$ y $12 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,3,4,5,6,7,9,11}	10	$\mathbb{Z}_{12}$	11	0,201
{0,1,2,3,4,5,6,7,9,11}	10	$\mathbb{Z}_{13}$	11	0,322
{0,1,2,3,4,5,6,7,9,11}	10	$\mathbb{Z}_{14}$	11	3,971
{0,1,2,3,4,5,6,7,9,11}	10	$\mathbb{Z}_{15}$	11	82,196
{0,1,2,4,5,6,8,9,10,14,15}	10	$\mathbb{Z}_{16}$	12	582.321
{0,1,2,3,4,5,6,7,9,11}	10	$\mathbb{Z}_{17}$	11	2884,163
{0,1,2,3,4,5,6,7,9,11}	10	$\mathbb{Z}_{18}$	11	29.627,904
{0,1,2,3,4,5,6,7,9,11}	10	$\mathbb{Z}_{19}$	11	65.452,098
{0,1,2,4,5,6,8,9,10,14,15}	10	$\mathbb{Z}_{20}$	12	110.345,972
{0,1,2,4,5,6,8,9,10,14,15}	10	$\mathbb{Z}_{21}$	12	145.900,234
{0,1,2,4,5,6,8,9,10,14,15}	10	$\mathbb{Z}_{22}$	12	201.763,933
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,}	10	$\mathbb{Z}_{23}$	13	234.748,973

Tabla 8. Valores de $BO(k,G)$ para $k=10$ y $12 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}	11	$\mathbb{Z}_{12}$	11	0,039
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}	11	$\mathbb{Z}_{13}$	11	0,075
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,11}	11	$\mathbb{Z}_{14}$	12	0,350
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,11}	11	$\mathbb{Z}_{15}$	12	3,107
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,11}	11	$\mathbb{Z}_{16}$	12	55,515
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,11}	11	$\mathbb{Z}_{17}$	12	781,282
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,11}	11	$\mathbb{Z}_{18}$	12	7025,902
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,11}	11	$\mathbb{Z}_{19}$	12	34.439,911
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,11}	11	$\mathbb{Z}_{20}$	12	65.126,564
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12}	11	$\mathbb{Z}_{21}$	13	99.902,392
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12}	11	$\mathbb{Z}_{22}$	13	145.892,034
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12}	11	$\mathbb{Z}_{23}$	13	223.842,322

Tabla 9. Valores de $BO(k,G)$ para $k=11$ y $12 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
	12	$\mathbb{Z}_{12}$	No existe	Por Teorema
	12	$\mathbb{Z}_{13}$	No existe	Por Teorema
{0,1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}	12	$\mathbb{Z}_{14}$	13	0,215
{0,1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}	12	$\mathbb{Z}_{15}$	13	0,795
{0,1,2,3,5,6,7,9,10,11,12,13,14}	12	$\mathbb{Z}_{16}$	14	17,692
{0,1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}	12	$\mathbb{Z}_{17}$	13	111,64
{0,1,2,3,5,6,7,9,10,11,12,13,14}	12	$\mathbb{Z}_{18}$	14	4.288,112
{0,1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}	12	$\mathbb{Z}_{19}$	13	10.335,285
{0,1,2,3,5,6,7,9,10,11,12,13,14}	12	$\mathbb{Z}_{20}$	14	45.349,231
{0,1,2,3,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15}	12	$\mathbb{Z}_{21}$	15	97.735,826
{0,1,2,3,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15}	12	$\mathbb{Z}_{22}$	15	134.727,782
{0,1,2,3,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15}	12	$\mathbb{Z}_{23}$	15	199.827,725

Tabla 10. Valores de $BO(k,G)$ para $k=12$ y $12 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}	13	$\mathbb{Z}_{13}$	13	Por Teorema
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}	13	$\mathbb{Z}_{14}$	13	Por Teorema
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}	13	$\mathbb{Z}_{15}$	13	0,148
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}	13	$\mathbb{Z}_{16}$	14	0,433
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}	13	$\mathbb{Z}_{17}$	14	7,927
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}	13	$\mathbb{Z}_{18}$	14	214,143
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}	13	$\mathbb{Z}_{19}$	14	2.913,283
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}	13	$\mathbb{Z}_{20}$	14	23.332,217
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13}	13	$\mathbb{Z}_{21}$	15	46.892,090
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13}	13	$\mathbb{Z}_{22}$	15	87.672,908
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13}	13	$\mathbb{Z}_{23}$	15	122.456,278

Tabla 11. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 13$ y $13 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
	14	$\mathbb{Z}_{14}$	No existe	Por Teorema
	14	$\mathbb{Z}_{15}$	No existe	Por Teorema
{0,1,2,3,4,5,...,12,13}	14	$\mathbb{Z}_{16}$	15	0,278
{0,1,2,3,4,5,...,12,13}	14	$\mathbb{Z}_{17}$	15	0,761
{0,1,2,3,4,5,...,12,13}	14	$\mathbb{Z}_{18}$	15	43,547
{0,1,2,3,4,5,...,12,13}	14	$\mathbb{Z}_{19}$	15	326,487
{0,1,2,3,4,5,...,12,13,14}	14	$\mathbb{Z}_{20}$	16	11.867,728
{0,1,2,3,4,5,...,12,13,14}	14	$\mathbb{Z}_{21}$	16	34.236,785
{0,1,2,3,4,5,...,12,13,14}	14	$\mathbb{Z}_{22}$	16	66.210,567
{0,1,2,3,4,5,...,12,13,14}	14	$\mathbb{Z}_{23}$	16	98.781,120

Tabla 12. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 14$ y $14 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,3,...,12,13}	15	$\mathbb{Z}_{15}$	15	Por Teorema
{0,1,2,3,...,12,13}	15	$\mathbb{Z}_{16}$	15	Por Teorema
{0,1,2,3,...,12,13}	15	$\mathbb{Z}_{17}$	15	0,239
{0,1,2,4,6,...,17}	15	$\mathbb{Z}_{18}$	16	5,007
{0,1,2,4,6,...,17}	15	$\mathbb{Z}_{19}$	16	19,330
{0,1,...,8,10,11,12,13,15,16,17,18}	15	$\mathbb{Z}_{20}$	17	2.213,238
{0,1,2,4,6,...,17}	15	$\mathbb{Z}_{21}$	16	27.665,613
{0,1,2,4,6,...,17}	15	$\mathbb{Z}_{22}$	16	54.874,023
{0,1,2,4,6,...,17}	15	$\mathbb{Z}_{23}$	16	87.241,909

Tabla 13. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 15$ y $15 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
	16	$\mathbb{Z}_{16}$	No existe	Por Teorema
	16	$\mathbb{Z}_{17}$	No existe	Por Teorema
{0,1,2,3,5,6,...,16}	16	$\mathbb{Z}_{18}$	17	0,351
{0,1,2,3,5,6,...,16}	16	$\mathbb{Z}_{19}$	17	1,001
{0,1,2,3,5,6,...,16}	16	$\mathbb{Z}_{20}$	17	133,863
{0,1,2,3,5,6,...,16}	16	$\mathbb{Z}_{21}$	17	1.318,126
{0,1,2,3,5,6,...,16}	16	$\mathbb{Z}_{22}$	17	36.946,984
{0,1,2,3,5,6,...,16}	16	$\mathbb{Z}_{23}$	17	79.568,431

Tabla 14. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 16$ y $16 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,3,...,15}	17	$\mathbb{Z}_{17}$	17	Por Teorema
{0,1,2,3,...,15}	17	$\mathbb{Z}_{18}$	17	Por Teorema
{0,1,2,3,...,15}	17	$\mathbb{Z}_{19}$	17	0,127
{0,1,2,3,4,6,...,12,14,18}	17	$\mathbb{Z}_{20}$	18	0,984
{0,1,2,3,4,6,...,12,14,18}	17	$\mathbb{Z}_{21}$	18	61,026
{0,1,2,3,4,6,...,12,14,18}	17	$\mathbb{Z}_{22}$	18	1.480,173
{0,1,2,3,4,6,...,12,14,18}	17	$\mathbb{Z}_{23}$	18	30.767,222

Tabla 15. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 17$ y $17 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
	18	$\mathbb{Z}_{18}$	No existe	Por Teorema
	18	$\mathbb{Z}_{19}$	No existe	Por Teorema
{0,1,2,3,...,16,17}	18	$\mathbb{Z}_{20}$	19	0,151
{0,1,2,3,...,16,17}	18	$\mathbb{Z}_{21}$	19	2,052
{0,1,2,3,...,16,17}	18	$\mathbb{Z}_{22}$	19	108,089
{0,1,2,3,...,16,17}	18	$\mathbb{Z}_{23}$	19	2160,187

Tabla 16. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 18$ y $18 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
{0,1,2,3,...,16,17}	19	$\mathbb{Z}_{19}$	19	Por Teorema
{0,1,2,3,...,16,17}	19	$\mathbb{Z}_{20}$	19	Por Teorema
{0,1,2,3,...,16,17}	19	$\mathbb{Z}_{21}$	19	0,054
{0,1,2,3,...,16,17,18}	19	$\mathbb{Z}_{22}$	20	1,254
{0,1,2,3,...,16,17,18}	19	$\mathbb{Z}_{23}$	20	63,358

Tabla 17. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 19$ y $19 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
	20	$\mathbb{Z}_{20}$	No existe	Por Teorema
	20	$\mathbb{Z}_{21}$	No existe	Por Teorema
{0,1,2,3,...,16,17,18,19}	20	$\mathbb{Z}_{22}$	21	0,269
{0,1,2,3,...,16,17,18,19}	20	$\mathbb{Z}_{23}$	21	1,704

Tabla 18. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 20$ y $20 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
$\{0,1,2,3,...,16,17,18,19\}$	21	$\mathbb{Z}_{21}$	21	Por Teorema
$\{0,1,2,3,...,16,17,18,19\}$	21	$\mathbb{Z}_{22}$	21	Por Teorema
$\{0,1,2,3,...,16,17,18,19\}$	21	$\mathbb{Z}_{23}$	21	0,236

Tabla 19. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 21$ y $21 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
	22	$\mathbb{Z}_{22}$	No existe	Por Teorema
	22	$\mathbb{Z}_{23}$	No existe	Por Teorema

Tabla 20. Valores de $BO(k,G)$ para $k = 22$ y $22 \leq n \leq 23$

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
$\{0,1,2,3,...,16,17,18,19,20,21\}$	23	$\mathbb{Z}_{23}$	23	Por Teorema

Tabla 21. Valor de $BO(k,G)$ para $k = 23$ y $n = 23$

6. Tablas de valores de la $BO(k,G)$ corregidos

Cota inferior	**k**	**G**	$BO(k,G)$	**Tiempo(seg)**
$\{0,1,2,4,7,8\}$	4	$\mathbb{Z}_{10}$	7	1.089
$\{0,1,2,4,7,8\}$	4	$\mathbb{Z}_{12}$	7	11.155
$\{0,1,2,3,4,6,7\}$	6	$\mathbb{Z}_{12}$	8	13.060
$\{0,1,2,3,5,7,8,10\}$	7	$\mathbb{Z}_{12}$	9	3.192
$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$	9	$\mathbb{Z}_{12}$	10	0.303

Tabla 22. Valores de $BO(k,G)$ corregidos

Referencias

[1] C. DELORME, I. MÁRQUEZ, O. ORDAZ & A. ORTUÑO. *Existency condition for barycentric sequences*. Discrete Math. **281** (2004), 163–172.

[2] DELORME, S. GONZÁLEZ, O. ORDAZ & M. VARELA. *Barycentric sequences and barycentric Ramsey numbers stars*. Discrete Math. **277** (2004), 45–46

[3] P. ERDŐS, A. GINZBURG & A. ZIV. *Theorem in the addittive number theory*. Bull. Res. Council Israel. **10** (1961), 41–43

[4] O. ORDAZ. M. VARELA & F. VILLARROEL. *$k-$barycentric Olson Constant*. Math. Reports **11**(61)(2009), 33–45.

[5] J. OTERO. *Un método matricial para el cálculo de las constantes de Davenport y Olson $k-$baricéntrica*. Tesis de Maestría. Universidad de Oriente. República Bolivariana de Venezuela, 2011.

[6] F. VILLARROEL. *La constante de Olson k-baricéntrica y un teorema inverso de Erdős–Ginzburg–Ziv*. Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela. República Bolivariana de Venezuela, 2008.

(Recibido en marzo de 2011. Aceptado para publicación en diciembre de 2011)

JUAN OTERO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
INSTITUTO DE TECNOLOGÍA DE CUMANÁ, CUMANÁ, VENEZUELA
e-mail: jmotero746@gmail.com

Henry Márquez
Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias, Núcleo de Sucre
Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela
e-mail: henrylmarquez@gmail.com
Felicia Villaroel
Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias, Núcleo de Sucre
Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela
e-mail: feliciavillarroel@gmail.com