

## Solución estable del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace usando potenciales de superficie

MARIO A. CORTÉS SUMANO, ANDRÉS FRAGUELA COLLAR  
ALEXANDRE GREBENNIKOV, MARÍA M. MORÍN CASTILLO  
JOSÉ J. OLIVEROS OLIVEROS

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

**ABSTRACT.** In this work the Cauchy problem for the Laplace equation in an annular bidimensional region is studied. The solution is sought like sum of surface potentials with densities defined on the boundary of the annular region which ones are numerically looking for a collocation method. The advantages of this technique are: conceptually simple, easy to implement numerically, can be applied to different curves representing the boundary and can be extended to the tridimensional case. Due to ill posedness of the Cauchy problem, the matrix obtained by collocation method, is ill conditioned presenting for that numerical instability, which is handled by the Tikhonov regularization method. Synthetic examples are presented for a circular annular region. In this case the potential is calculated in exact form and compared to the numerical approximation. The results of this work show the feasibility of the technique for the stable solution of the problem.

*Key words and phrases.* Multilinear operator; Littlewood-Paley operator; Marcinkiewicz operator; Bochner-Riesz operator; BMO function; Lipschitz function; Good  $\lambda$  inequality.

*2010 AMS Mathematics Subject Classification.* 65J20, 65J22, 45P05, 97M50.

RESUMEN. En este trabajo se estudia el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en una región anular bidimensional. La solución se propone como suma de potenciales de superficie con densidades de carga definidas sobre la frontera de la región, las cuales se buscan numéricamente por medio de un método de colocación. Entre las ventajas de este método están las de ser conceptualmente simple, fácil de implementar numéricamente, puede aplicarse a una amplia gama de curvas y puede extenderse al caso tridimensional. Debido al mal planteamiento del problema de Cauchy, la matriz obtenida del método de colocación es mal condicionada, presentando por ello inestabilidad numérica; la cual es tratada por medio del método de regularización de Tijonov. Se presentan ejemplos sintéticos para el caso de una región anular circular, en el cual se calcula de forma exacta el potencial y se compara con el obtenido numéricamente. Los resultados de este trabajo muestran la factibilidad de la técnica propuesta para hallar una solución estable a este problema.

## 1. Introducción

El problema de determinar una función armónica sobre una región anular en el plano, a partir de información parcial (datos de Cauchy) en una parte de la frontera de la región, es llamado Problema de Cauchy para la Ecuación de Laplace y lo denotaremos por medio de PCEL. Es conocido que este es un problema mal planteado porque pequeñas variaciones en los datos de Cauchy (datos de entrada) pueden producir variaciones sustanciales en su solución y además para que dicha solución exista deben imponerse condiciones de suavidad sobre estos datos de entrada. Algunas de las aplicaciones del PCEL son: determinar el deterioro de la pared interna de una tubería, conocer el potencial en una región a la que no se tiene acceso, determinar fisuras en láminas, entre otras ([1], [4], [6], [11]). Estos problemas pertenecen al grupo de los denominados problemas inversos, los cuales consisten en encontrar una propiedad desconocida de un objeto o de un medio a partir de las observaciones de una respuesta de este a una señal de prueba. Se demuestra en este trabajo que la solución del problema de Cauchy y de su problema inverso asociado (que consiste en determinar el potencial en la frontera interior de la región anular a partir de los datos de Cauchy); puede buscarse como suma de potenciales de superficie con densidades de carga definidas sobre la frontera de la región anular, las cuales deben determinarse a partir de los datos de Cauchy. Para la implementación numérica estas densidades se desarrollan en serie de Fourier y se utiliza un método de colocación ([9]) para determinar los coeficientes del desarrollo de la serie. Entre las ventajas de este método están las de ser conceptualmente simple, relativamente fácil de implementar numéricamente, puede aplicarse a una amplia gama de curvas y puede extenderse al caso tridimensional. Debido al mal planteamiento del problema de Cauchy, la matriz que resulta de aplicar el

método de colocación es mal condicionada, presentando por ello inestabilidad numérica que es tratada en este trabajo por medio del método de regularización de Tijonov. Se presentan ejemplos sintéticos en el caso de una región anular circular, en los cuales se calcula de forma exacta el potencial y se compara con el obtenido numéricamente hallando buenas aproximaciones regularizadas, por lo que los resultados obtenidos en este caso simple muestran la factibilidad de la técnica propuesta para hallar la solución en forma estable de este problema. Esta técnica ha sido empleada para el cálculo numérico de problemas de Tomografía y de fisuras [7], [8]. La solución de este problema también puede buscarse al analizar las propiedades espectrales del operador relacionado con el sistema de ecuaciones integrales equivalente [12]; sin embargo puede resultar muy complicado encontrar los valores singulares de este operador cuando la región no es circular. Se han usado técnicas de mapeos conformes para transformar la región general en un anillo circular [13] donde el problema puede ser resuelto. Para regiones simplemente conexas el mapeo puede encontrarse con la función de Schwarz-Christoffel. Sin embargo, encontrar un mapeo para una región anular general es un problema muy difícil. Este trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 se presenta el planteamiento del problema, para lo cual se dan los elementos básicos, tales como los espacios de funciones en los que se trabaja así como el sentido en el cual se puede entender la solución (clásica o débil). Se presenta un teorema de existencia y unicidad para la solución débil y en la sección 3 se muestra que esta puede buscarse como una suma de potenciales de superficie. En la sección 4 se valida el algoritmo propuesto para hallar una solución estable para diferentes condiciones de contorno en una región anular circular. Las conclusiones se dan en la sección 5.

## 2. Planteamiento del problema y resultados conocidos

Sea  $\Omega$  una región anular en  $\mathbb{R}^2$  con frontera  $S = S_1 \cup S_2$ , donde  $S_1$  es la frontera interior y  $S_2$  es la frontera exterior según muestra la figura (1).

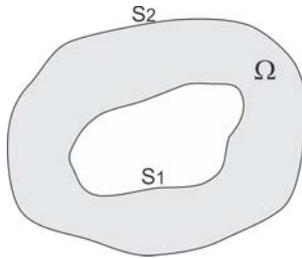


FIGURA 1. Representación geométrica de la región donde se estudia el problema.

Sea  $w$  que satisface el problema de valores en la frontera:

$$\begin{aligned}\Delta w &= 0 && \text{en } \Omega, \\ w &= \tilde{V} && \text{en } S_2, \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= h && \text{en } S_2,\end{aligned}\tag{1}$$

donde  $\tilde{V}$  es conocida (y representa en algunos problemas a la medición de potencial eléctrico). El problema (1) es un PCEL y es mal planteado ([1]). Debe observarse que para el PCEL las dos condiciones (datos de Cauchy) están dadas sobre la frontera exterior  $S_2$ , sin embargo la frontera interior  $S_1$  tomará un papel muy importante en el planteamiento operacional de este problema como se verá más adelante.

Para el análisis teórico de este problema se hará la suposición adicional de que  $h = 0$  en (1), lo cual no es una restricción ya que el problema original siempre puede ser reducido a este caso mediante la descomposición del mismo en dos problemas como sigue: sea  $u_1$  una función armónica que satisface  $\frac{\partial u_1}{\partial n} = h$  en  $S_2$  y  $u_1 = 0$  en  $S_1$ . Entonces  $w = u_1 + u$  donde  $u$  es una función armónica con condiciones de frontera dadas por  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  y  $u = \tilde{V} - u_1$  en  $S_2$ , es decir,  $u$  es solución del problema:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{en } \Omega, \\ u &= V && \text{en } S_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{en } S_2,\end{aligned}\tag{2}$$

donde  $V = \tilde{V} - u_1$ . Es importante notar que en tal descomposición el primer problema tiene una condición de contorno sobre la frontera interior  $S_1$  y la otra sobre la frontera exterior  $S_2$ , mientras que el segundo problema tiene las dos condiciones de contorno sobre la frontera exterior  $S_2$ .

Para el análisis del problema (2) se utiliza el siguiente problema ([1, 3]):

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{en } \Omega, \\ u &= \varphi && \text{en } S_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{en } S_2,\end{aligned}\tag{3}$$

el cual es bien planteado ([1]) y consiste en determinar  $u$  si conocemos  $\varphi$  en  $S_1$ .

El problema inverso que se plantea en este trabajo es el de:

*Recuperar al potencial  $u = \varphi$  en  $S_1$  a partir del conocimiento de  $u = V$  en  $S_2$ , donde  $u$  es la solución del problema (3).*

En lo que sigue vamos a considerar los siguientes espacios de funciones:  $L_2(\Omega)$  y  $L_2(S_i)$ , los espacios de funciones de cuadrado integrable definidas sobre  $\Omega$  y  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $H^1(\Omega)$  el espacio de Sobolev de funciones cuya primera derivada generalizada pertenece a  $L_2(\Omega)$ ;  $H_0^1(\Omega)$  el espacio de funciones de  $H^1(\Omega)$  que tienen soporte compacto;  $H^{1/2}(S_i)$ ,  $i = 1, 2$ , denota al espacio de las funciones de  $L_2(S_i)$  que son traza a  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ , de alguna función de  $H^1(\Omega)$  ([14]);  $C^2(\Omega)$  denota el conjunto de las funciones definidas sobre  $\Omega$  dos veces continuamente diferenciables;  $C^{1,2}(\Omega)$  denota el conjunto de las funciones sobre la región  $\Omega$  continuamente diferenciables cuya primera derivada puede extenderse hasta la frontera  $S_2$ ;  $C^{0,1}(\Omega)$  denota las funciones continuas sobre  $\Omega$  que pueden extenderse hasta  $S_1$ .

**Definición 1.**  $u$  es solución clásica del problema (3) si  $u \in C^2(\Omega) \cap C^{1,2}(\Omega) \cap C^{0,1}(\Omega)$  y satisface el problema en el sentido usual.

**Definición 2.**  $u \in H^1(\Omega)$  es solución débil del problema de contorno (3) si cumple

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = 0, \quad (4)$$

para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$  y la traza de  $u$  a  $S_1$  es  $\varphi$ .

**Teorema 1.** Para cada  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(S_1)$  la solución débil  $u$  del problema (3) existe, es única y se cumple que  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ , donde la constante  $C$  no depende de  $\varphi$ .

*Demostración.* Por ser  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(S_1)$  existe  $\Phi \in H^1(\Omega)$  tal que  $\Phi|_{S_1} = \varphi$ . Por ello la solución débil de (3) se puede expresar en la forma  $\bar{u} = u - \Phi$  con  $\bar{u} \in H_{0,1}^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) : w|_{S_1} = 0\}$ . Entonces el problema (3) es equivalente a encontrar  $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5)$$

El término en la parte derecha de la igualdad (5) es un funcional lineal y continuo en  $H_0^1(\Omega)$  ya que

$$\left| \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \|\nabla \Phi\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$$

y  $\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$  es una norma equivalente a la norma usual en  $H_{0,1}^1(\Omega)$ . Según el teorema de representación de Riesz, existe entonces una única función  $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$  que satisface (5). Consideremos sobre  $H^{\frac{1}{2}}(S_1)$  la norma

$$\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(S_1)} = \inf_{\Phi \in H^1(\Omega)} \left\{ \|\Phi\|_{H^1(\Omega)} : \text{tr}(\Phi) = \varphi \right\}.$$

Si usamos (5) con  $v = \bar{u}$  y aplicamos la desigualdad de Hölder hallamos que

$$\|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Tomando en cuenta que la norma de  $H^1(\Omega)$  es más fuerte que la de  $L_2(\Omega)$  se halla que  $\|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}$ . Además como  $u = \bar{u} + \Phi$ , se obtiene:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 2 \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}. \quad \checkmark$$

A partir de este resultado se define el operador lineal, inyectivo y compacto  $A : H^{\frac{1}{2}}(S_1) \rightarrow L_2(S_2)$  tal que a cada  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(S_1)$  le asocia la traza a  $S_2$  de la solución débil de (3). La compacidad se deduce del hecho de que el operador  $A$  es la composición del operador continuo  $T : H^{\frac{1}{2}}(S_1) \rightarrow H^1(\Omega)$  que a cada  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(S_1)$  le asocia la solución débil del problema (3) con el operador traza de  $H^1(\Omega)$  en  $L_2(\partial\Omega)$  el cual es compacto.

La relación entre los problemas (2) y (3) puede describirse a través del operador  $A$  de la manera siguiente:

*La solución del problema (3) es también solución del problema (2) si elegimos a la condición de contorno  $\varphi$  de forma que*

$$A(\varphi) = u|_{S_2} = V, \quad (6)$$

*donde  $u$  es la solución del problema (3) y  $V$  es conocida en el problema (2), es decir, si elegimos  $\varphi = A^{-1}(V)$ .*

Debemos notar que la ecuación (6), que nos da la relación entre los problemas (2) y (3), no tiene solución para cualquier función  $V \in L_2(S_2)$ . Esta es una de las características de los problemas mal planteados. Sin embargo, si se imponen condiciones de suavidad sobre la función  $V$  pueden hallarse condiciones globales de existencia de la solución del problema como las presentadas en [4], salvando de esta forma el problema de la existencia. Ha sido probado que el operador  $A$  es inyectivo ([3]), con lo que se satisface la condición de unicidad de la ecuación operacional (6). Sin embargo, debido a que el operador  $A$  es lineal, inyectivo y compacto su inverso  $A^{-1}$  no es continuo y como consecuencia de esto, al aplicar el método de colocación en la sección 5 se presenta inestabilidad numérica, lo que hace necesario aplicar técnicas de regularización para obtener una solución estable de la ecuación (6). En particular, en este trabajo aplicamos el método de regularización de Tijonov.

### 3. Búsqueda de la solución débil por medio de potenciales de superficie

En lo que sigue se supone que la frontera de  $\Omega$  es de clase  $C^2$  ([10]). Se tiene que la solución del problema (3) puede buscarse en la forma

$$u(x) = \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \Phi(x, y) ds_y + \int_{S_2} \rho_2(y) \Phi(x, y) ds_y, \quad (7)$$

para  $x \in \Omega$ , en donde  $\Phi(x, y)$  es la solución fundamental de la ecuación de Laplace ([10]) para  $\mathfrak{R}^2$  y  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son densidades que pertenecen a  $C(S_1)$  y

$C(S_2)$  respectivamente y satisfacen las ecuaciones integrales ([3]):

$$\begin{aligned} & P.V. \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \Phi(x, y) ds_y + \frac{1}{2} \rho_1(x) \\ & + \int_{S_2} \rho_2(y) \Phi(x, y) ds_y = \varphi(x), \quad x \in S_1 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{\partial}{\partial n_y} \Phi(x, y) \right) ds_y + \frac{1}{2} \rho_2(x) \\ & + P.V. \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) ds_y = 0, \quad x \in S_2, \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $P.V.$  representa al valor principal de Cauchy.

Para el desarrollo del trabajo se definen los operadores:

$$K_{ij} : C(S_j) \longrightarrow C(S_i), \quad i, j = 1, 2,$$

como:

$$K_{11}(\mu)(x) = P.V. \left( \frac{1}{\pi} \int_{S_1} \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \left( \frac{1}{|x-y|} \right) ds_y \right),$$

$$K_{12}(\mu)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \mu(y) \ln \left( \frac{1}{|x-y|} \right) ds_y,$$

$$K_{21}(\mu)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{S_1} \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \left( \frac{1}{|x-y|} \right) \right) ds_y,$$

$$K_{22}(\mu)(x) = P.V. \left( \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln \left( \frac{1}{|x-y|} \right) ds_y \right),$$

y utilizamos la notación:

$$\rho = [\rho_1, \rho_2]^t, \quad \bar{\varphi} = [2\varphi, \mathbf{0}]^t, \quad \mathbf{I} = [\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2]^t,$$

donde  $I_1$  y  $I_2$  denotan el operador identidad actuando en los espacios  $C(S_1)$  y  $C(S_2)$  respectivamente; además se define el operador matricial  $K$  como

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}.$$

De esta forma, el sistema de ecuaciones integrales (6)-(7) se lleva a la ecuación operacional

$$(K + I)\rho = \bar{\varphi}. \quad (10)$$

Ha sido probado ([3]) que el operador  $K + I$  es invertible cuando se consideran las densidades continuas y, por lo tanto, la solución está dada por:

$$\rho = (K + I)^{-1}(\bar{\varphi}). \quad (11)$$

Los operadores  $K_{ij}$  pueden extenderse de  $C(S_j)$  a  $L_2(S_j)$ ,  $j = 1, 2$  siendo estas extensiones operadores compactos ([15]). Esto es necesario para poder

buscar la solución débil del problema (3) por medio de la ecuación operacional (10).

La siguiente definición, basada en los trabajos realizados en [5], nos ayuda a demostrar que la solución débil puede buscarse por medio de la ecuación operacional (10).

**Definición 3.** Dada  $\varphi \in L_2(S_1)$  diremos que el problema (3) es soluble en sentido de la teoría de potencial, si existe una sucesión  $u_n$  de soluciones clásicas del problema (3) con condición de contorno  $\varphi_n$  sobre  $S_1$ , donde  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  en  $L_2(S_1)$ . Si además existe el límite de  $u_n$  en  $L_2(\Omega)$  diremos que dicho límite es solución en sentido de la teoría de potencial del problema (3).

Para cualquier  $\varphi \in L_2(S_1)$  el problema (3) es soluble en sentido de teoría de potencial. Aún más, dada  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(S_1)$ , existe una sucesión  $\varphi_n \in C^1(S_1)$  tal que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  en  $L_2(S_1)$ . Las soluciones clásica y débil coinciden en este caso para cada  $\varphi_n$  ([14]). Denotemos por  $u_n$  a la solución correspondiente a  $\varphi_n$ . Como las soluciones  $u_n$  son armónicas y se extienden hasta la frontera, son acotadas. De las propiedades de los potenciales de superficie y del hecho de que el operador dado en (10) tiene inverso continuo se puede ver que la sucesión  $u_n$  es convergente en  $L_2(\Omega)$ . Por otra parte, ya que el operador traza es acotado y  $u_n \rightarrow u$  entonces  $tr(u_n) = \varphi_n \rightarrow \varphi = tr(u)$ , donde  $tr(u)$  es la traza de  $u$  a  $S_1$ . A partir de esto se deduce que la solución en sentido de teoría de potencial del problema (3) existe y coincide con la solución débil para cada  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(S_1)$ .

#### 4. Solución estable del PCEL.

La solución del problema (2) se busca en la forma (7), con lo que se obtiene, para  $x \in S_2$ , el sistema de ecuaciones integrales siguiente:

$$\int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \Phi(x, y) ds_y + \int_{S_2} \rho_2(y) \Phi(x, y) ds_y = V(x), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{\partial}{\partial n_y} \Phi(x, y) \right) ds_y + \frac{1}{2} \rho_2(x) \\ + P.V. \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) ds_y = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

El sistema de ecuaciones integrales anterior puede expresarse en forma operacional como:

$$(\overline{K} + I_0)(\rho) = \overline{v}, \quad (14)$$

donde

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} \\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22} \end{bmatrix},$$

$\overline{K}_{11} : C(S_1) \longrightarrow C(S_2)$  con regla de correspondencia dada por

$$\overline{K}_{11}(\mu)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{S_1} \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \left( \frac{1}{|x-y|} \right) ds_y,$$

$\overline{K}_{12} : C(S_2) \longrightarrow C(S_1)$  con regla de correspondencia dada por

$$K_{12}(\mu)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \mu(y) \ln \left( \frac{1}{|x-y|} \right) ds_y,$$

$\overline{K}_{21} = K_{21}$ ,  $\overline{K}_{22} = K_{22}$ , donde  $K_{21}$ ,  $K_{22}$  son los operadores definidos en la sección 3 con  $I_0 = [0 \ I_2]$ .

En este caso, la ecuación (14) no es una ecuación de Fredholm de la segunda especie, pues  $I_0$  no es el operador identidad en el espacio  $C(S_1) \times C(S_2)$  y no podemos proceder directamente como en la ecuación (11). En este caso, el operador  $I_0$  se obtiene debido a que, al buscar  $u$  en la forma (7), el potencial de capa doble es continuo ([2], [16]), esto se debe a que el potencial se define sobre  $S_1$  y la condición de contorno  $V$  se da sobre  $S_2$ .

Como se ha mencionado, el problema inverso consiste en encontrar  $\varphi$  cuando se conoce  $V$ , es decir, dada  $V$  tenemos que encontrar las densidades de carga  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , construir la solución  $u$  con estas densidades y después restringir  $u$  a  $S_1$  para encontrar  $\varphi$ . El mal planteamiento de este problema se presenta al buscar las densidades.

El sistema de ecuaciones integrales (12)-(13) se resuelve usando un método de colocación ([9]), el cual consiste en buscar la solución aproximada como combinación lineal en una base adecuada y determinar los coeficientes de esa combinación a través de un sistema de ecuaciones lineales algebraicas. La matriz de dicho sistema es llamada matriz de colocación, que en este caso es mal condicionada. Por lo que, es necesario utilizar algún método de regularización, en este trabajo usamos el método de regularización de Tijonov que es utilizado en ecuaciones operacionales de la primera especie mal planteadas para corregir el problema de la inestabilidad de la solución ante pequeñas variaciones de los datos de entrada, la cual puede llevar a que estas pequeñas variaciones produzcan cambios sustanciales en la solución buscada. Con este método pueden hallarse soluciones aproximadas que dependen del llamado parámetro de regularización de Tijonov, que se elige convenientemente en dependencia del error cometido, para garantizar que cuando dicho error tiende a cero, la solución aproximada, converja a la única solución de la ecuación para datos sin error. Otro método de regularización para corregir la inestabilidad numérica que se presenta en los problemas mal planteados es el de Lavrentiev. En este trabajo no se utiliza este método.

Para ver la factibilidad de la propuesta anterior se estudia el problema para el caso de una región anular circular. Para el problema directo se toma el valor de  $\varphi$  como dato exacto y se calculan el potencial  $u$  y la medición  $V$  usando el sistema de ecuaciones integrales (8)-(9) y con armónicos circulares con lo que

se comprueba que se obtienen los mismos resultados. Se resuelve usando como dato de entrada una perturbación  $V^\delta$  de  $V$  y los resultados numéricos, a saber, las densidades y el potencial son comparados contra los exactos. Supongamos que las densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son de clase  $C^1$  y que han sido desarrolladas en serie de Fourier. Usando los datos de Cauchy, el método de colocación y el método de regularización de Tijonov se calculan de manera aproximada los primeros coeficientes del desarrollo en serie de las densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . Se usarán  $2s + 2$  puntos de colocación para obtener  $s + 1$  términos de cada serie. Debe realizarse un análisis para determinar el número de términos en que deben truncarse las series de Fourier de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  a fin de obtener una cota del error en la aproximación de  $u$ . Esto último sin tomar en cuenta el error de medición.

## 5. Ejemplos Numéricos

En esta sección se presentan ejemplos numéricos para validar el algoritmo desarrollado en este trabajo y se muestra que es necesario aplicar algún método de regularización. En particular, se aplica para dichos ejemplos el de Tijonov.

Para los ejemplos numéricos tomaremos  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $\delta = 0,1$  y como condición de contorno en el problema (3) tomaremos  $\varphi = R_1(\cos(3\theta) + \text{sen}(5\theta))$  y  $\varphi = e^{\cos(\theta)}$ . Resolviendo el problema directo se halla que la medición  $V$  está dada por:

$$V(\theta) = \varphi_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k}{1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k}} \{ \varphi_k^1 \cos k\theta + \varphi_k^2 \text{sen} k\theta \}, \quad (15)$$

donde  $\varphi_0, \varphi_k^1, \varphi_k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$  son los coeficientes de Fourier de  $\varphi$ . En el caso de  $\varphi = R_1(\cos(3\theta) + \text{sen}(5\theta))$  tales coeficientes pueden calcularse de forma exacta y para  $\varphi = e^{\cos(\theta)}$  se calcularon numéricamente. El error de la medición se obtiene incluyendo un error aleatorio a los coeficientes de Fourier de la medición exacta  $V$ . La función error se toma en la manera siguiente:

$$Er = \sum_{k=1}^{\overline{M}} \left( \frac{Er_k^1}{k} \cos(k\theta) + \frac{Er_k^2}{k} \text{sen}(k\theta) \right), \quad (16)$$

con  $|Er_k^1| < 0,01$ ,  $|Er_k^2| < 0,01$  y  $\overline{M} = 101$ .

Tomando en cuenta que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  se tiene que  $\|Er\|_{L_2(S_2)} < \delta = 0,1$ . Se define  $V_\delta = V + Er$ . En este caso  $\|V - V_\delta\|_{L_2(S_2)} < \delta$ . Realizamos programas en el lenguaje de programación MATLAB en los que los errores aleatorios se generaron con la función rand y los coeficientes de Fourier de  $\varphi = e^{\cos(\theta)}$  se calcularon numéricamente usando la función quadl.

En la figura 2 se muestra la solución del problema (3) para  $\varphi(\theta) = R_1(\cos(3\theta) + \text{sen}(5\theta))$  y en las figuras 3 y 4 se muestran las gráficas de las soluciones aproximadas sin y con regularización, respectivamente. En la figuras 5 y 6 se muestran

la gráficas del potencial exacto  $\varphi(\theta) = R_1(\cos(3\theta) + \text{sen}(5\theta))$  en la curva interior  $S_1$  y sus aproximaciones con y sin regularización, respectivamente con  $s = 19$ , es decir, 20 coeficientes de Fourier para cada densidad. El parámetro de regularización que se tomó fue  $\alpha=0.01$  y se eligió numéricamente. El error absoluto entre el potencial exacto y el recuperado está dado por 0.1009. Resultados similares se obtienen usando diferentes funciones de error (obtenidas de (17) por medio de la función rand).

En la siguiente tabla se muestra el comportamiento del error absoluto ante la variación del parámetro de regularización para este primer ejemplo.

$\alpha$	Error absoluto
0.1	0.1972
0.01	0.1009
0.001	0.1864
0.0001	0.5157
0.00001	0.9929

En la figura 7 se muestra el potencial exacto  $\varphi(\theta) = e^{\cos(\theta)}$  en la curva interior  $S_1$  y en las figuras 8 y 9 sus aproximaciones sin y con regularización. En las figuras 10 y 11 se muestran las gráficas de  $\varphi(\theta) = e^{\cos(\theta)}$  así como de las aproximaciones con y sin regularización, respectivamente. Nuevamente, por medio de experimentos numéricos, se elige el parámetro de regularización como  $\alpha = 0.8$ . Se observa gráficamente que la aproximación obtenida por este método es buena. Sin embargo, se requiere un posprocesamiento para mejorar dicha aproximación en los puntos donde la derivada cambia de signo (tomando en cuenta que la función es periódica). Este punto no será tratado en este trabajo.

En la siguiente tabla se muestra el comportamiento del error absoluto ante la variación del parámetro de regularización para este segundo ejemplo.

$\alpha$	Error absoluto
0.15	0.4746
0.1	0.3992
0.01	0.9596

Se muestra con esto que el problema inverso de identificar en forma estable el potencial en la curva interior de la región anular, puede ser resuelto con la técnica de potenciales de superficie propuesta en este trabajo.

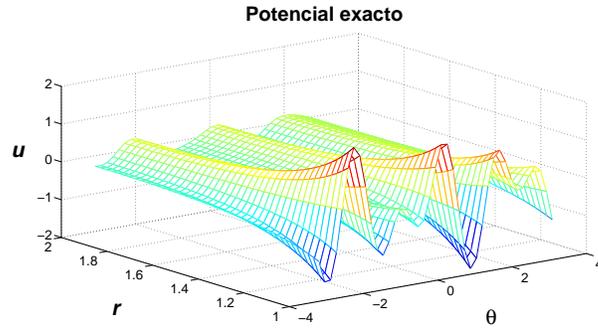


FIGURA 2. Potencial exacto.

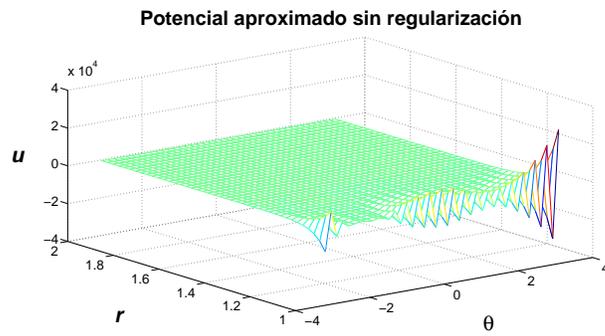


FIGURA 3. Potencial aproximado sin regularización.

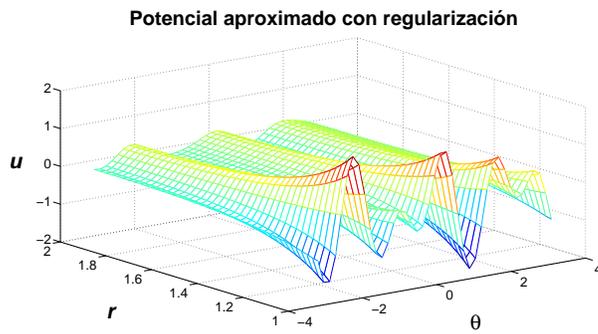


FIGURA 4. Potencial aproximado con regularización.

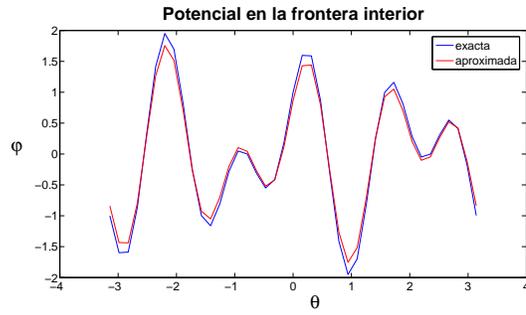


FIGURA 5. Potencial en la curva interior exacto y aproximado con regularización.

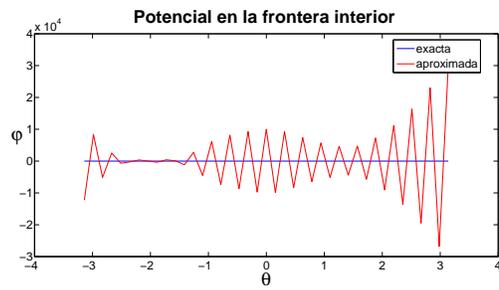


FIGURA 6. Potencial en la curva interior exacto y aproximado sin regularización.

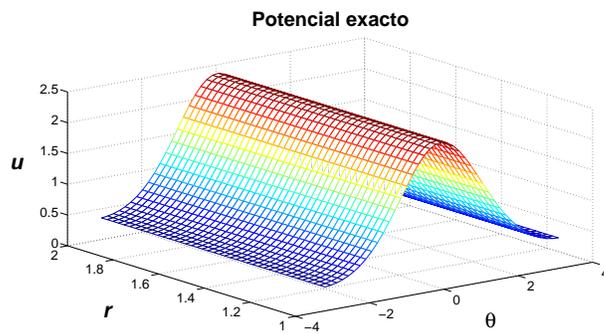


FIGURA 7. Potencial exacto.

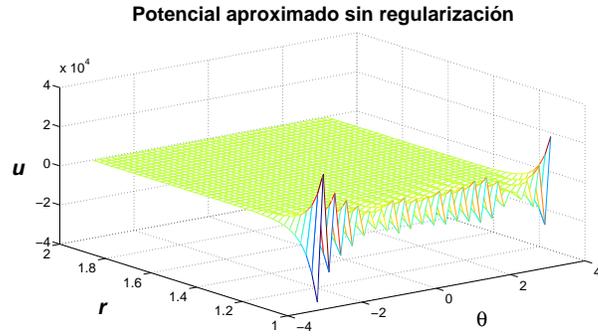


FIGURA 8. Potencial aproximado sin regularización.

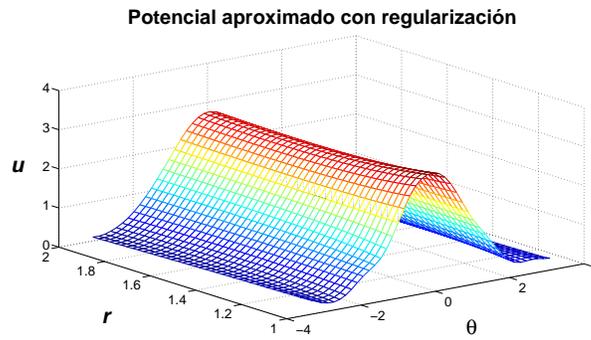


FIGURA 9. Potencial aproximado con regularización.

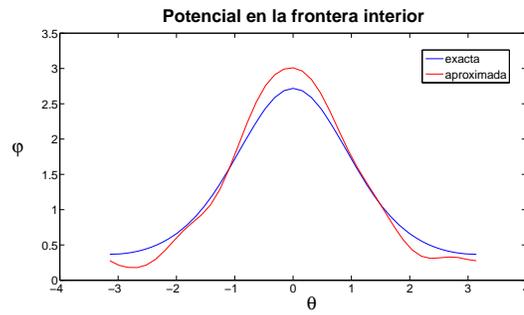


FIGURA 10. Potencial en la curva interior exacto y aproximado con regularización.

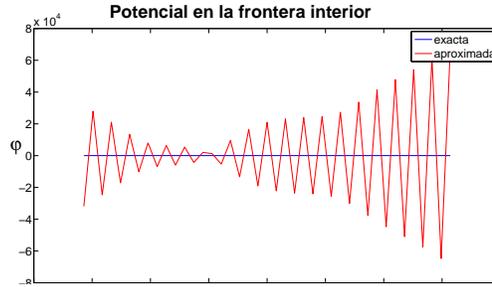


FIGURA 11. Potencial en la curva interior exacto y aproximado sin regularización.

La solución  $u$  del problema de Cauchy y, por lo tanto, del problema inverso asociado puede buscarse definiendo el potencial de capa simple sobre  $S_1$  y el potencial de capa doble sobre  $S_2$ , es decir,

$$u(x) = \int_{S_1} \rho_1(y) \Phi(x, y) ds_y + \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \Phi(x, y) ds_y \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

pero en la condición de Dirichlet debemos tomar en cuenta que la derivada normal del potencial de capa doble es continua ([10]), así que en esta condición no se presenta salto, mientras que en la condición de Neumann, por la forma en la que ahora se define, el potencial de capa doble tiene un salto ([9], [16]). Esto conduce a un sistema de ecuaciones integrales similar al dado por (12)-(13), que lleva a buscar la solución del problema inverso también en la forma (7). Más aún, se puede buscar la solución como un potencial de capa simple con una densidad de carga definida sobre la frontera de la región. Para el problema inverso obtendríamos un sistema similar al (12)-(13); sin embargo, para el problema auxiliar, el cual es bien planteado, se obtendría también un sistema como el (12)-(13) que es mal planteado ya que se introduce una inestabilidad por la forma en la que se busca la solución en esta forma. Este caso podría presentarse si en el problema que se estudia la información que interesa está dada por las densidades de carga y no por el potencial mismo.

## 6. Conclusiones

1. Se demostró que la solución débil puede buscarse como suma de potenciales de superficie y que la búsqueda de dicha solución se reduce a un sistema de ecuaciones integrales.
2. Se mostró, por medio de ejemplos numéricos para el caso de una región simple (región anular circular), la factibilidad de usar la técnica de los potenciales de superficie para hallar la solución de problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en una región anular (bidimensional) y del problema inverso de recuperar el potencial en la frontera interior de la mencionada región anular.

3. Este método puede aplicarse a regiones anulares bidimensionales con frontera no circular, lo que permite su aplicación en el problema de la determinación de fisuras en láminas. En ese caso este método debe acoplarse con un problema de optimización para hallar la solución del mencionado problema de fisuras.
4. Un problema que es de interés es el de recuperar las densidades de los potenciales de superficie pues pueden proporcionar en algunos problemas información importante del mismo. En este caso es necesario hallar la solución analítica del problema directo incluyendo las densidades.
5. El método puede extenderse al caso tridimensional haciendo los cambios adecuados lo cual puede hacerse sin mucha dificultad.
6. La solución puede buscarse en forma de la suma de un potencial de capa simple sobre  $S_1$  y uno potencial de capa doble sobre  $S_2$  obteniendo resultados teóricos y numéricos similares. Sin embargo, esto se haría en el caso en que las densidades aporten información del problema.

### Referencias

- [1] BERNTSSON F., LARS E., *Numerical Solution of the Cauchy Problem for the Laplace Equation*. Inverse Problems **17** (2001), 839–853. 2001.
- [2] COLTON D., KRESS R., *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Krieger Publishing Company, 1992.
- [3] M. MORÍN, M. CORTÉS, J. OLIVEROS Y A. FRAGUELA. *Planteamiento Operacional del Problema de Cauchy utilizando Potenciales de Superficie*. Tópicos de la Teoría de Aproximación III, Textos Científicos. BUAP. Pp. 89-106. 2009.
- [4] FRAGUELA A., MORÍN M., OLIVEROS J., *Inverse Electroencephalography for Volumetric Sources*. Mathematics and Computers in Simulations **78** (2008), 481–492.
- [5] FRAGUELA A., OLIVEROS J., GREBENNIKOV A. *Planteamiento Operacional y Análisis del Problema Inverso Electroencefalográfico*. Revista Mexicana de Física **47** (2001), 162–174.
- [6] FRAGUELA A., OLIVEROS J., CERVANTES L., MORÍN M., GÓMEZ S. *Un algoritmo no iterativo para la tomografía de capacitancia eléctrica*. Revista Mexicana de Física **51** (3) 2005), 236–242.
- [7] HADDAR H., KRESS R., *Conformal mapping and impedance tomography*. Inverse Problems **26** (7) 2010, 839–853.
- [8] KANG H. Y KEUN SEO J., *The layer potential technique for the inverse conductivity*. Inverse Problems **12** (1996), 267–278.
- [9] KIRSCH A., *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Springer Verlag, 1996.
- [10] KRESS R., *Linear Integral Equations*. Springer Verlag, 1989.
- [11] KRESS R., *Inverse Dirichlet problem and conformal mapping*. Mathematics and Computers in Simulation **66** (4–5) (2004), 255–265.
  - Número especial dedicado a *Inverse Obstacle problems*.
- [12] LEE J.Y., YOON J. R., *A Numerical method for Cauchy problem using singular value decomposition*. Comm. Korean Math. Soc. **16** (3) (2001), 487–508.
- [13] LESNIC D., HÁO NHO D., *The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method*. IMA Journal of Applied Mathematics **65** (2000), 199–217.
- [14] MIJAILOV V.P., *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Editorial Mir, Moscú, 1982.

- [15] MIKHLIN S.G., *Linear Partial Differential Equations*. Editorial Vischaya Schkola, 1977.  
[16] TIJONOV A.N., SAMARSKY A.A., *Ecuaciones de la Física Matemática*. Editorial Mir, Moscú, 1980.

(Recibido en marzo de 2011. Aceptado para publicación en julio de 2011)

MARIO A. CORTÉS SUMANO

*e-mail:* albertosumano@hotmail.com

ANDRÉS FRAGUELA COLLAR

*e-mail:* fraguela@fcfm.buap.mx

MARÍA M. MORÍN CASTILLO

*e-mail:* mmorin@ece.buap.mx

ALEXANDRE GREBENNIKOV

*e-mail:* agrebe@fcfm.buap.mx

JOSÉ J. OLIVEROS OLIVEROS

*e-mail:* oliveros@fcfm.buap.mx

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y MODELACIÓN MATEMÁTICA  
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA, PUEBLA, MÉXICO