Lecturas Matemáticas
Volumen **32** *(2011), páginas 23–27*
ISSN 0120–1980

Un comentario sobre "New exact solutions for the combined sinh-cosh-Gordon equation"

Juan Carlos López Carreño & Rosalba Mendoza Suárez
Universidad de Pamplona, Pamplona, Colombia

Abstract. Gómez & Salas in [1] presented twelve "new exact solutions" of the combined sinh-cosh-Gordon equation. In this note we show that these solutions can be found from the general solution.

Key words and phrases. Partial differential equations.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 35C05

Resumen. Gómez & Salas en [1] presentan doce "nuevas soluciones exactas" de la ecuación sinh-cosh-Gordon combinada. En esta nota, mostramos que estas soluciones son casos particulares de la solución general.

1. Introducción

Gómez & Salas en [1] consideran la ecuación sinh-cosh-Gordon combinada

$$u_{tt} - ku_{xx} + \alpha \operatorname{senh}(u) + \beta \cosh(u) = 0, \tag{1}$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales, u es una función real de las dos variables independientes x, t, y α, β, k son parámetros reales no nulos. Haciendo uso de transformaciones adecuadas, que son estándares en el estudio de este tipo de ecuaciones, los autores en [1], reducen la ecuación (1) a la ecuación diferencial ordinaria

$$2\left(\lambda^2 - k\right) vv'' - 2\left(\lambda^2 - k\right)\left(v'\right)^2 + (\alpha + \beta)\, v^3 - (\alpha - \beta)\, v = 0, \tag{2}$$

donde $v = v(\xi) = v(x + \lambda t)$, así las soluciones exactas de (1), se obtienen de las soluciones exactas de (2), definiendo $u(x,t) := \log v(x + \lambda t)$.

Mediante el método proyectivo de ecuaciones de Riccati general, método que describen en la sección dos del mencionado artículo, ellos afirman que obtienen “nuevas soluciones exactas”de la ecuación (2) y, por ende de la ecuación (1), para “muchos valores” de k, α y β. En las conclusiones, afirman también los autores de [1], que el método utilizado por ellos en la búsqueda de soluciones exactas de (2), es un “método poderoso” y es más complicado que otros métodos.

El objetivo principal de esta corta nota, es mostrar que la ecuación (2) se puede resolver, usando métodos elementales y que las doce soluciones encontradas por Gómez & Salas en [1], se pueden obtener como casos particulares de la “solución general” hallada en esta nota; de esta manera las soluciones obtenidas en [1], no deberían ser consideradas como nuevas.

2. Solución de la ecuación (2)

Siguiendo la sugerencia que se encuentra en los textos básicos sobre ecuaciones diferenciales, ver [2], las sustituciones

$$v'(\xi) = p, \qquad v''(\xi) = \frac{dp}{d\xi} = \frac{dp}{dv}\frac{dv}{d\xi} = p\frac{dp}{dv}, \tag{3}$$

permiten reducir la ecuación (2), a la ecuación de primer orden

$$\frac{dp}{dv} - \frac{1}{v}p = \frac{1}{p}\left(-\frac{(\alpha+\beta)}{2\left(\lambda^2-k\right)}v^2 + \frac{\alpha-\beta}{2(\lambda^2-k)}\right), \tag{4}$$

que reconocemos como una ecuación de Bernoulli. Haciendo la sustitución $z = p^2$, propuesta por Leibniz en 1696, la ecuación (4) se transforma en la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dv} - \frac{2}{v}z = -\frac{(\alpha+\beta)}{\lambda^2-k}v^2 + \frac{\alpha-\beta}{\lambda^2-k}, \tag{5}$$

la solución de (5), permite escribir la solución general de (2) mediante la expresión

$$\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 = -\frac{(\alpha+\beta)}{(\lambda^2-k)}v^3 + Cv^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{\lambda^2-k}\right)v, \tag{6}$$

donde C en una constante (arbitraria).

La solución general de (6) se puede expresar via las funciones elípticas de Weiertrass [3].

Sin embargo, se pueden encontrar soluciones periódicas y soluciones de onda solitarias, para algunos valores particulares de la constante C. Para ello, tomando raíz cuadrada en ambos miembros de (6), separando variables e integrando se obtiene

$$\int \frac{dv}{\sqrt{-\frac{(\alpha+\beta)}{n}v^3 + Cv^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{n}\right)v}} = \pm\xi + C_1, \tag{7}$$

donde C_1 es una constante arbitraria, $n = \lambda^2 - k$. Como se verá a continuación para valores adecuados de la constante C, la integral que figura en (7) se puede calcular por métodos elementales. La expresión que aparece en el radical del lado izquierdo de (7), se transforma en:

$$-\frac{(\alpha+\beta)}{n}v^3 + Cv^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{n}\right)v = -\frac{v}{n}\left[(\alpha+\beta)\,v^2 - nCv + (\alpha-\beta)\right]$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{m^2 v}{n\,(\alpha-\beta)}\left[v^2 - \frac{n\,(\alpha-\beta)\,C}{m^2}v + \frac{(\alpha-\beta)^2}{m^2}\right] \\ &= -\frac{m^2 v}{n\,(\alpha-\beta)}\left[\left(v - \frac{n\,(\alpha-\beta)\,C}{2m^2}\right)^2 + A\right], \end{aligned} \tag{8}$$

con

$$m = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}, \quad A = \frac{(\alpha-\beta)^2}{m^2} - \left(\frac{n\,(\alpha-\beta)\,C}{2m^2}\right)^2.$$

En (8) escogemos C, de modo que $A = 0$, esto es $C = \pm\frac{2m}{n}$, de (8) se observa que (7) se transforma en

$$I_{\pm} = \int \frac{dv}{\left(v \pm \frac{(\alpha-\beta)}{m}\right)\sqrt{v}} = \pm\sqrt{-\frac{m^2}{(\alpha-\beta)\,n}}\;\xi + C_1, \tag{9}$$

en donde

$$I_{+} = \int \frac{dv}{\left(v + \frac{(\alpha-\beta)}{m}\right)\sqrt{v}}, \quad I_{-} = \int \frac{dv}{\left(v - \frac{(\alpha-\beta)}{m}\right)\sqrt{v}}.$$

Como $m = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, se debe cumplir $\alpha-\beta>0$ y $\alpha+\beta>0$ ó $\alpha-\beta<0$ y $\alpha+\beta<0$, la expresión subradical del lado derecho de (9) indica que con el fin de seguir evitando la introducción de cantidades imaginarias, se debe tener que $(\alpha-\beta)$ y n tengan signos contrarios; lo anterior motiva considerar los siguientes dos casos:

Caso 1. Supongamos que $\alpha > \beta, \mathbf{n} < \mathbf{0}$**.** Nótese que tanto I_+ como I_-, se pueden evaluar por métodos elementales de cálculo; a manera de ilustración si $w = \sqrt{v}$, entonces $2dw = \frac{dv}{\sqrt{v}}$ así:

$$\begin{aligned} I_{+} \quad &= \int \frac{2dw}{w^2 + \left(\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)}{m}}\right)^2} = 2\,\sqrt{\frac{m}{(\alpha-\beta)}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{m}{(\alpha-\beta)}}w\right) \\ &= 2\,\sqrt{\frac{m}{(\alpha-\beta)}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{m}{(\alpha-\beta)}}\sqrt{v}\right); \end{aligned} \tag{10}$$

teniendo en cuenta (10) en (9), despejando v se obtiene finalmente:

$$v = \frac{(\alpha-\beta)}{m}\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-m}{n}}\xi + C_1\right). \tag{11}$$

De manera análoga, al ser evaluada I_-, se obtiene para v la expresión

$$v = \frac{(\alpha-\beta)}{m}\left(\frac{1+C_1\exp\left(\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}\xi\right)}{1-C_1\exp\left(\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}\xi\right)}\right)^2. \tag{12}$$

Caso 2. Supongamos que $\alpha < \beta, n > 0$. Procediendo de manera similar al caso 2.1, se obtienen las siguientes soluciones de la ecuación (2)

$$v = \frac{(\beta-\alpha)}{m}\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}\xi + C_1\right). \tag{13}$$

$$v = \frac{(\beta-\alpha)}{m}\left(\frac{1+C_1\exp\left(\pm\sqrt{\frac{m}{n}}\xi\right)}{1-C_1\exp\left(\pm\sqrt{\frac{m}{n}}\xi\right)}\right)^2. \tag{14}$$

En (11), (12), (13) y (14) C_1 es una constante arbitraria.

A continuación veremos que todas las soluciones de Gómez y Salas en [1] se obtienen de (11), (12), (13) y (14) para ciertos valores particulares de la constante C_1. En efecto,

$v_1 = \frac{(\alpha-\beta)}{m}\frac{\csc\left(\sqrt{-\frac{m}{n}}\xi\right)+1}{\csc\left(\sqrt{-\frac{m}{n}}\xi\right)-1}$ es (11), con $C_1 = \frac{\pi}{4}$,

$v_2 = \frac{(\beta-\alpha)}{m}\frac{\csc\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\xi\right)+1}{\csc\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\xi\right)+1}$ es (13), con $C_1 = \frac{\pi}{4}$,

$v_3 = \frac{(\alpha-\beta)}{m}\frac{\csc\left(\sqrt{-\frac{m}{n}}\xi\right)-1}{\csc\left(\sqrt{-\frac{m}{n}}\xi\right)+1}$ es (11), con $C_1 = -\frac{\pi}{4}$,

$v_4 = \frac{(\beta-\alpha)}{m}\frac{\csc\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\xi\right)-1}{\csc\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\xi\right)+1}$ es (13), con $C_1 = -\frac{\pi}{4}$,

$v_5 = \frac{(\alpha-\beta)}{m}\cot^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{m}{n}}\xi\right)$ es (11), con $C_1 = \frac{\pi}{2}$,

$v_6 = \frac{(\beta-\alpha)}{m}\cot^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}\xi\right)$ es (13), con $C_1 = \frac{\pi}{2}$,

$v_7 = \frac{(\beta-\alpha)}{m}\coth^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}\xi\right)$ es (14), con $C_1 = 1$,

$v_8 = \frac{(\beta-\alpha)}{m}\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}\xi\right)$ es (13), con $C_1 = 0$,

$v_9 = \frac{(\alpha-\beta)}{m}\tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{m}{n}}\xi\right)$ es (12), con $C_1 = -1$,

$$v_{10} = \frac{(\beta-\alpha)}{m} \tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}\xi\right) \quad \text{es (14), con} \quad C_1 = -1,$$

$$v_{11} = \frac{(\alpha-\beta)}{m} \coth^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{m}{n}}\xi\right) \quad \text{es (12), con} \quad C_1 = 1,$$

$$v_{12} = \frac{(\alpha-\beta)}{m} \tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{m}{n}}\xi\right) \quad \text{es (11), con} \quad C_1 = 0.$$

Finalmente, Gómez & Salas concluyen en [1] "el método proyectivo de ecuaciones de Riccati es un método poderoso para encontrar soluciones exactas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales". No obstante, lo mostrado en esta nota nos señala que, por lo menos para la ecuación bajo estudio, el método usado por ellos no es tan poderoso.

Referencias

[1] C. A. Gómez, A. Salas, *New exact solutions for the combined sinh-cosh-Gordon equation,* Lecturas Matemáticas, Volumen especial (2006), 87–93.

[2] Edwards, Penney, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones,* Prentice-Hall, México,1986

[3] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis,* 4th edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

(Recibido en febrero de 2011. Aceptado para publicación en mayo de 2011)

Juan Carlos López
Departamento de Matemáticas
Universidad de Pamplona, Pamplona, Colombia
e-mail: jclopez@unipamplona.edu.co

Rosalba Mendoza Suárez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Pamplona, Pamplona, Colombia
e-mail: rosalbame@unipamplona.edu.co