Lecturas Matemáticas
Volumen **31** *(2010), páginas 93–98*
ISSN 0120–1980

Unión de vecindades para longitud de caminos y ciclos en grafos bipartitos balanceados

Daniel Brito, Pedro Mago y Felicia Villarroel
Universidad de Oriente, Núcleo Sucre, Venezuela

Abstract. Let s and n be positive integers numbers. We are concerned with the neighborhood of two vertices of a same partition in a balanced bipartite graphs of order $2n$, i.e. a graph with a bipartition into two independent vertex set, to ensure a path of lenght at least $2s-1$ or a cycle of lenght at least $2s$, for some $s < n$.

Key words and phrases. Neighborhood, Path and Cycle.

MSC2010: *05C38, 05C45, 05C70*

Resumen. Sean s y n números enteros positivos. En este artículo se establecen condiciones suficientes sobre la unión de vecindades de una misma partición en grafos bipartitos balanceados de orden $2n$, es decir un grafo con una bipartición en dos conjuntos de vértices independientes, para garantizar la existencia de caminos de longitud al menos $2s-1$ y ciclos de longitud al menos $2s$, con $s < n$.

1. Introducción

Sea $G = (A, B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ con $\mid A \mid = \mid B \mid = n$, donde $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Para un vértice x la vecindad de x se denota por $N(x) = \{y : y \in A \cup B, yx \in E\}$ y el grado de x por $d(x) = \mid N(x) \mid$. Si $y \in N(X)$, se dice que x es adyacente a y. C_k denota un ciclo de longitud k en G. En este artículo se trabaja con la siguiente orientación: si x, y son vértices de C_k, entonces xC_k^+y (respectivamente xC_k^-y) es el subcamino de C_k uniendo x a y siguiendo el sentido de la orientación (respectivamente inversa) y si x y y son vértices de un camino P en G, xP^+y (respectivamente xP^-y) denota el subcamino de P uniendo x a y siguiendo el sentido de la orientación (respectivamente inversa).

Un grafo bipartito balanceado es hamiltoniano si contiene un ciclo elemental de longitud $2n$ (ciclo hamiltoniano) y es traceable si contiene un camino elemental de longitud $2n-1$ (camino hamiltoniano).

En 1963 Moon y Moser [5] demostraron que si $G = (X, Y, E)$ es un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ tal que para cada par de vértices no adyacentes $x \in X$ y $y \in Y$ se tiene $\mid N(x) \cup N(y) \mid \geq n+1$, entonces G es un grafo Hamiltoniano.

En 1987 Faudree et al [2] definen NC como el min $\{\mid N(x) \cup N(y) \mid\}$, donde el mínimo es tomado sobre todos los pares de vértices x, y no adyacentes en el grafo y demuestran que dado un grafo, G, 2-conexo y $NC \geq s$, se tiene:

i. Si $n \geq s+2$, entonces G contiene un ciclo de longitud al menos $s+2$ o si $n < s+2$, entonces G es completo.

ii. Si s es impar y $n > s+2$, entonces G contiene un ciclo de longitud al menos $s+3$.

iii) Si $n \geq \frac{3}{2}s+2$, entonces G contiene un camino de orden al menos $\frac{3}{2}s+2$ o si $n < \frac{3}{2}s+2$, entonces G es trazable.

En 1995 Amar et al [1], adaptaron a grafos bipartitos los resultados dados en [3] y obtuvieron las siguientes cotas sobre la cardinalidad de la unión de vecindades no adyacentes $x \in X$ y $y \in Y$ en un grafo bipartito balanceado $G = (X, Y, E)$, las cuales garantizan un ciclo o un camino de longitud dada en G, para todo s natural. Si $\mid N(x) \cup N(y) \mid \geq n+1$, entonces:

i. G es trazable.

ii. G contiene un ciclo de longitud $2s$, con $2 \leq s \leq n-1$.

iii. G contiene un camino de longitud s.

Dado un grafo bipartito balanceado simple $G = (X, Y, E)$ de orden $2n$, $N_2(G)$ denota el mínimo entre $N_2(X)$ y $N_2(Y)$ donde $N_2(X) = min_{1 \leq i \neq j \leq n}\{\mid N(x_i) \cup N(x_j) \mid\}$ y $N_2(Y) = min_{1 \leq i \neq j \leq n}\{\mid N(y_i) \cup N(y_j) \mid\}$.

En 1996 P. Mago y A. Villaroel [4] obtuvieron las siguientes cotas sobre la cardinalidad de la unión de vecindades de vértices x y y pertenecientes a una misma partición en un grafo bipartito balanceado 2-conexo G de orden $2n$, las cuales garantizan un ciclo o un camino hamiltoniano.

i. Si $N_2(G) \geq \frac{n+1}{2}$, entonces G es trazable.

ii. Si $N_2(G) \geq \frac{n+3}{2}$, entonces G es hamiltoniano.

En este artículo, para s y n números enteros positivos con $s < n$ establecemos condiciones suficientes sobre la unión de vecindades de vértices de una misma partición en grafos bipartitos balanceados de orden $2n$, para garantizar la existencia de caminos de longitud al menos $2s-1$ y de ciclos de longitud al menos $2s$.

2. Resultados en grafos bipartitos balanceados

Lema 1. *Sea $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G) \geq 2$. Si $N_2(G) \geq s$ con $s < n$, entonces G contiene un camino de longitud máxima r, donde $r = 2t - 1$ o $r = 2t$, con $t \geq s$.*

Demostración. Como G es conexo existe un camino. Sea P un camino de longitud máxima. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. $P = x_1y_1x_2y_2....x_my_m$ con $r = 2m-1$. En este caso x_1 y y_m tienen sólo vecinos en P, ya que en caso contrario se formarían caminos de longitud mayor que P. Puede ocurrir:

Subcaso I.1. x_m tiene vecinos solamente en P. Si x_m tiene vecinos solamente en P, entonces por ser $| N(x_1) \cup N(x_m) | \geq s$, se sigue que $m \geq s$.

Subcaso I.2. x_m tiene vecinos en $G - P$. Si x_m tiene vecinos en $G - P$, sea y_q uno de estos, entonces y_q no puede tener vecinos en $G - P$ ya que se formaría el camino $x_1P^+x_my_qx_q$ de mayor longitud que P. Luego por ser $| N(y_m) \cup N(y_q) | \geq s$, se tiene que $m \geq s$.

Caso II. $P = x_1y_1x_2y_2....x_{m+1}$ con $r = 2m$. En este caso se tiene: x_1 y x_{m+1} tienen vecinos solamente en P, ya que en caso contrario caeríamos en el caso I. Luego por ser $| N(x_1) \cup N(x_{m+1}) | \geq s$, se tiene que $m \geq s$.

En cualquiera de los casos se tiene el resultado para cualquier m en particular para r. ☑

Teorema 1. *Sea $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito balanceado 2-conexo, de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G) \geq 2$ y sea $2 \leq s < n$. Si $N_2(G) \geq s$, entonces, G contiene un ciclo de longitud al menos $2s$.*

Demostración. Supongamos G no contiene un C_r con $r \geq 2s$ y sea P un camino de longitud máxima en G. Por el lema 1 puede ocurrir:

Caso I. $P = x_1y_1x_2y_2....x_ty_t$. En este caso se tiene:

1.- $t \geq s$.
2.- x_1 y y_t tienen vecinos solamente en P.
3.- $x_1y_t \notin E$.

Si $y_j \in N(x_1) \cap V(P)$, entonces $j < s$, ya que en caso contrario G contiene un ciclo C_r con $r \geq 2s$.

Reetiquetemos de la forma $x_1y_1x_2y_2...x_ty_t$ todos los caminos de la misma longitud que P y tomemos uno tal que $y_i \in N(x_1)$ donde i es máximo en el sentido de que x_1 no tiene vecinos en el camino $x_{i+1}P^+y_t$. Puede ocurrir:

Subcaso I.1. x_1 tiene otro vecino y_p con $p \neq 1, i$, en $x_1P^+y_i$. En este subcaso, x_p no tiene vecinos en $y_{i+1}P^+y_t$ ya que en caso contrario, si $x_qy_q \in E$ con $y_q \in V(P)$ y $q > i$. entonces se forma el camino $x_qP^-y_px_1P^+x_py_qP^+y_t$, el cual es de la misma longitud que P y si se reetiqueta con $x_q = x_1$ se contradice la maximalidad de i. Tomemos x_p con $p \neq 1, i$, como el vértice de P más cercano a x_1 tal que y_p es vecino de x_1. x_p no tiene vecinos en $G-P$ ya que en caso contrario se formaría un camino de mayor longitud que P. Contradicción.

Subcaso I.2. x_1 no tiene otro vecino y_p en $x_1P^+y_i$ con $p \neq 1, i$. En este subcaso, x_i no tiene vecinos y_q en P, con $q \geq s$. Ya que en caso contrario, se formaría un C_r, con $r \geq 2s$. Se concluye que $\mid N(x_1) \cup N(x_i) \mid< s$. Contradicción.

Caso II. $P = x_1y_1x_2y_2...x_t$ (Igual ocurre si $P = y_1x_2y_2...x_ty_t$). En este caso se tiene que x_1 y x_t no tienen vecinos en $G-P$ ya que P no sería de longitud máxima.

Sea $y_q \in N(x_1) \cap V(P)$, entonces $q < s$, ya que en caso contrario G contiene un ciclo C_r con $r \geq 2s$. Puede ocurrir:

Subcaso II.1. $q \neq 1$. En este caso x_q no tiene vecinos en el subcamino $x_sP^+x_t$. En caso contrario G contiene un ciclo C_r con $r \geq 2s$. Se concluye que $\mid N(x_1) \cup N(x_q) \mid< s$. Contradicción. Además x_q no tiene vecinos en $G-P$ ya que se formaría un camino de mayor longitud que P. Se concluye que $\mid N(x_1) \cup N(x_p) \mid< s$. Contradicción.

Subcaso II.2. $q = 1$. Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, se concluye que el único vecino de x_t es y_{t-1} entonces $\mid N(x_1) \cup N(x_t) \mid< s$. Contradicción.

Los Casos I y II demuestran que lo supuesto no es cierto y así G contiene un ciclo C_r con $r \geq 2s$. ☑

Teorema 2. *Sea $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G) \geq 2$ y sea $s < n$. Si $N_2(G) \geq s-1$, entonces, G contiene un camino P de longitud al menos $2s-1$.*

Demostración. Supongamos G no contiene caminos de la forma

$$P_1 : x_1y_1x_2y_2...x_ty_t$$

con $t \geq s$. Por el teorema 1, G contiene un ciclo de longitud $2r$, con $r \geq s-1$. Si $r \geq s$, entonces G contiene un camino de longitud al menos $2s-1$. Supongamos que $r = s-1$, y sea $C = x_1y_1x_2y_2...x_{s-1}y_{s-1}$ con $x_i \in X$ y $y_i \in Y$ un ciclo de longitud $2s-2$ en G. Claramente $G - C \neq \emptyset$ ya que en caso contrario C es hamiltoniano y así $n = s-1$. Contradicción.

Sean $H_1, H_2, ..., H_k$ componentes de $G-C$. Entonces $\mid \bigcup_{i=1}^{k} V(H_i) \mid= 2n-(2(s-1)) = 2n-2s+2$. Además, $\mid V(H_i) \mid= 1$ para todo i, puesto que si para algún $i = 1, 2, ..., k$ $\mid V(H_i) \mid> 1$ entonces, por ser G conexo, se formaría un camino de longitud mayor o igual a $(2s-2)-1+2 = 2s-1$. Contradicción.

Como G es balanceado, $G-C$ tiene al menos dos componentes $H_1 = \{x_p\}$ y $H_2 = \{y_p\}$. Como $\delta(G) \geq 2$ se tiene que x_p y y_p es cada uno de ellos vecino de al menos dos vértices en C. Sean $y_h, y_m \in V(C) \cap N(x_p)$ y $x_h, x_q \in V(C) \cap N(y_p)$.

Puesto que $x_p \in V(C) \cap N(y_h)$, se tiene que $y_p x_h, y_p x_{h+1} \notin E$. En caso contrario se formarían los caminos $x_p y_h C^+ x_h y_p$ o $x_p y_h C^- x_{h+1} y_p$ respectivamente y ambos son de longitud mayor o igual $2s-1$. Se concluye, pues, que x_h y x_{h+1} no tienen vecinos en $G-C$. Igual razonamiento demuestra que x_m y x_{m+1} no tienen vecinos en $G-C$. Se sigue que $\mid N(x_i) \cup N(x_j) \mid < s-1$ con $i, j \in \{h, h+1, m, m+1\}$ y $i \neq j$. Luego por hipótesis se concluye que $\mid N(x_i) \cup N(x_j) \mid = s-1$ con $i, j \in \{h, h+1, m, m+1\}$ y $i \neq j$. Pueden ocurrir dos casos:

Caso I. x_q está en el subcamino $y_m C^+ x_h$. En este caso $x_{m+1} y_q, x_m y_q \notin E$. En caso contrario se formarían los caminos

$$y_p x_q C^- x_{m+1} y_q C^+ y_m x_p$$

y

$$y_p x_q C^- y_m x_p y_h C^+ x_m y_q C^+ x_h ,$$

respectivamente, y ambos son de longitud mayor o igual a $2s-1$. Contradicción. Se concluye, pues, que $\mid N(x_m) \cup N(x_{m+1}) \mid < s-1$.

Caso II. x_q está en el subcamino $x_h C^+ y_m$. Según el caso 1, $q \neq m$ y $q \neq h+1$. Además $y_q \notin N(x_h) \cup N(x_{h+1})$. En caso contrario, se formarían los caminos

$$y_p x_q C^- x_{h+1} y_q C^+ y_h x_p$$

y

$$y_p x_q C^- y_h x_p y_m C^- y_q x_h C^- x_{m+1} ,$$

respectivamente, y ambos son de longitud mayor o igual a $2s-1$. Contradicción. Se concluye entonces que $\mid N(x_h) \cup N(x_{h+1}) \mid < s-1$. Contradicción. ☑

Corolario 1. *Sea $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito balanceado k-conexo, con $k \geq 2$, de orden $2n$ y sea $s < n$. Si $N_2(G) \geq s-1$, entonces, G contiene un camino de longitud al menos $2s-1$.*

Demostración. Si G es k-conexo con $k \geq 2$, entonces G es conexo con mínimo grado $\delta(G) \geq 2$, y por el teorema 2, G contiene un camino de longitud al menos $2s-1$. ☑

A partir de las demostraciones dadas podemos concluir que se establecieron condiciones suficientes sobre la unión de vecindades de vértices de una misma partición en grafos bipartitos balanceados de orden $2n$, para garantizar la existencia de caminos de longitud al menos $2s-1$ y de ciclos de longitud al menos $2s$ con $s < n$.

Referencias

[1] Amar D., Favaron O., Mago P. & Ordaz O. *Biclausure and bistability in a balanced graph bipartite.* J. Graph Theory **19**, (1)(1995), 1–17.

[2] Faudree R. J., Gould R. J., Jacobson M. S., and Schelp R. H. *Extremal problems involving neighborhood unions.* J. Graph Theory **11**(1987), 555–564.

[3] FAUDREE R. J., GOULD R. J., JACOBSON M. S., & SCHELP R. H. *Neighborhood unions and hamiltonian properties in graphs*. J. Combin. Theory. **B47** (1987),1–9.
[4] MAGO P. & VILLARROEL A. *Unión de vecindades y hamiltonicidad y traceabilidad en grafos bipartitos balanceados*. Universidad de Oriente. Cumaná Venezuela (1996),42–88.
[5] MOON J. W. & MOSER. *On hamiltonian bipartite graphs.* Israel J. Math. **1**(1963), 163–165.

(Recibido en noviembre de 2009. Aceptado para publicación en septiembre de 2010)

DANIEL BRITO, PEDRO MAGO & FELICIA VILLARROEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, ESCUELA DE CIENCIAS, NÚCLEO DE SUCRE
UNIVERSIDAD DE ORIENTE, CUMANÁ 6101-A, APARTADO 245, VENEZUELA
e-mail: danieljosb@gmail.com; pmago2001@yahoo.com; feliciavillarroel@cantv.net