Lecturas Matemáticas
Volumen **29** *(2008), páginas 83–93*
ISSN 0120–1980

La evolución de la teoría de grupos en las ecuaciones diferenciales[1]

D. Blázquez–Sanz
Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia

Abstract. In this article we survey the evolution of group theory and its relation with the theory of algebraic and differential equations. We follow the path from the seminal work of E. Galois to the development of differential Galois theory of Emile Picard and Ernest Vessiot.

Key words and phrases. Galois, group, differential equations, solvability.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. 01A55, 20-03

Resumen. En este trabajo realizamos un seguimiento de la evolución de la teoría de grupos y su relación con la teoría de ecuaciones algebraicas y diferenciales. Recorremos el camino desde el trabajo original de Galois hasta el desarrollo de la teoría de Galois diferencial de Emile Picard y Ernest Vessiot.

1. Surgimiento de la noción de grupo

La noción de grupo de transformaciones, ha acompañado de forma implícita a la geometría a lo largo de todo su desarrollo histórico. Las noción de semejanza entre figuras, presente desde el mismo origen de la geometría, presupone de forma implícita la posibilidad de transformar la una en la otra por medio de algún tipo de transformación del espacio que las contiene. De esta manera, en el lenguaje actual hablamos del grupo de las semejanzas, y dos figuras se dicen semejantes si están relacionadas por alguna de ellas.

Sin embargo, el estudio de los grupos, como estructuras algebraicas *per se* no ha sido sistematizado hasta el siglo XIX. La teoría de grupos de permutaciones –transformaciones de un espacio finito– se aplica directamente al problema de la resolución de ecuaciones algebraicas. Es esta aplicación práctica de la

[1]Este artículo fue presentado en la 3a. EI–MUSA, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, en agosto de 2008

teoría es la que parece haber interesado a los pensadores de la época por el estudio sistemático de la estructura de los grupos de permutaciones. Desde este comienzo se ha recorrido un largo camino, en la elevación del grado de abstracción, hasta llegar al desarrollo actual de la teoría.

La resolución de ecuaciones algebraicas ha sido uno de los problemas cruciales de las matemáticas de la edad moderna. Desde bien antiguo eran conocidos los métodos generales para la resolución de la ecuación de segundo grado, descritos en términos aritméticos o geométricos[2]. En la alta edad media se conocía un método geométrico general para la ecuación cuadrática, basado en la intersección de una recta y una ellipse[3]. Finalmente en el *Ars Magna* de Gerolamo Cardano (1501–1576)[4] se recogen los métodos aritméticos para la resolución de las ecuaciones algebraicas hasta el cuarto grado.

La notación matemática moderna, desarrollada por François Viète (1540-1603), y adoptada por Pierre de Fermat y René Descartes (1596-1650) abre el horizonte: los nuevos métodos analíticos permiten abordar de forma sencilla problemas que apenas podian ser formulados en lenguaje geométrico. La aritmética y la geometría se unifican mediante la geometría analítica. Es posible entonces tratar las ecuaciones algebraicas de forma sistemática. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) acomete esta tarea, y reune los métodos de solución de la ecuación cuadrática, cúbica y cuártica en un único formalismo.

Sin embargo, a las puertas del siglo XIX, era desconocida la existencia de un método general para la resolución de las ecuaciones algebraicas. La célebre respuesta llega de la mano del Niels Henrik Abel (1802-1829) en 1822: la ecuación general de quinto grado no es resoluble por radicales[5]. No existe ninguna fórmula que permita expresar las soluciones en término de un número finito de operaciones algebraicas.

En este momento aparece la genial contribución del joven matemático francés Evariste Galois (1811-1831). Por encima de la aplicación específica está su genial intuición: la íntima relación entre las soluciones de un problema y sus simetrías que él expresó bajo el nombre de *teoría de la ambigüedad* (véase la carta a Auguste Chevallier en [4]). Detrás de cada problema matemático hay oculto un grupo que actúa sobre las soluciones. Este es el grupo de transformaciones que son invisibles para nosotros, los algebristas. De esta manera el espacio de soluciones está siempre dado con una cierta *ambigüedad*.

Es necesario decir, que en el trabajo de Galois la noción de grupo aparece de forma absolutamente práctica. No hay nada parecido a una axiomática. Los grupos considerados verifican los axiomas de la teoría precisamente porque son

---

[2]En tablillas babilónicas, se encuentran ejercicios prácticos de ecuaciones de segundo grado

[3]Atribuido a Ommar Hayyám, nacido en 1048.

[4]*Ars Magna,* 1545 estos resultados se atribuyen igualmente a Niccolò Fontana Tartaglia (1500–1557).

[5]Resultado conocido como teorema de Abel-Ruffini

grupos de permutaciones de las soluciones de una ecuación. Únicamente he llegado a encontrar la siguiente afirmación:

> *. . . Donc, si dans un pareil groupe on a les substitutions S et T, on est sûr d'avoir la substitution ST . . .*[6]

Podría parecer que en la obra de Galois la palabra *grupo* es tomada como sinónimo de *conjunto de permutaciones*. Sin embargo, no se trata de conjuntos cualesquiera, están compuestos por aquellas permutaciones que dejan invariantes unas ciertas funciones: por tanto, son grupos. La estructura algebraica no es impuesta axiomáticamente, sino que es deducida.

2. Breve nota sobre la teoría de Galois

En su memoria de 1831, E. Galois considera el siguiente problema. Tomemos una ecuación algebraica irreducible de grado m,

$$a_0 + a_1 x + \ldots a_m x^m = 0, \quad a_i \in \mathbb{Q}$$

que tiene exactamente m soluciones complejas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Dado que las soluciones son desconocidas, el orden en el que a estos m símbolos se corresponden con las soluciones es también arbitrario. Si consideramos una permutación σ de los m índices, podemos decir que

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$$

son las soluciones de la ecuación, pero también,

$$\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(m)}.$$

Asumamos, que aunque las raíces son desconocidas, nos es dado conocer los valores de toda función racional de las raíces que tome un valor racional. Es decir, consideremos una función racional de m variables,

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \frac{P(x_1, \ldots, x_m)}{Q(x_1, \ldots, x_m)}, \quad P, Q \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$$

tal que $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ sea un número racional. Dicha función f se dice, *determinable racionalmente*. Una permutación σ es *admisible* para la ecuación si y solo si para toda función racional f determinable racionalmente se tiene,

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = f(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(m)}).$$

Ejemplo 1. Consideremos la ecuación cúbica,

$$x^3 + px + q = 0, \qquad p, q \in \mathbb{Q}.$$

El discriminante de la ecuación es,

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_2)^2 = 27q^2 - 4p^3,$$

[6] *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*, 1831. Incluida en [4]. Dicha memoria fue rechazada para publicación por Simeón Denis Poisson (1781–1840).

que es función de los coeficientes p y q, por ser función simétrica de las raíces. Asumamos que Δ es un cuadrado perfecto $\Delta = \frac{a^2}{b^2}$. Entonces, escogiendo adecuadamente el signo de a se tiene:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{a}{b}.$$

En este caso,

$$\begin{aligned} f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \frac{a}{b} \\ f(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3) &= -\frac{a}{b} \\ f(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

en general

$$f(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \alpha_{\sigma(3)}) = \epsilon(\sigma)\frac{a}{b}.$$

Donde $\epsilon(\sigma)$ es el signo de la permutación σ. Las permutaciones impares alteran el valor de f y por tanto no son admisibles. Son únicamente admisibles permutaciones pares.

En su memoria de 1831, Galois considera el *grupo* de las permutaciones admisibles. Demuestra que recíprocamente, toda función racional de las m raíces que es invariante por el grupo de las transformaciones admisibles, toma un valor racional. Lo establece de la siguiente manera.

Théorème 1. *Soit une équation donée, dont $a, b, c, \ldots$ sont des m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des letres $a, b, c, \ldots$ qui jouira de la propiété suivante:*

1. *Que toute fonction des racines, invariable par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue;*
2. *Réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable rationnellement, soit invariable par les substitutions.*

En dicha memoria presenta un criterio para la resolución por radicales de las ecuaciones de grado primo. El método para la resolución del caso general es sugerido en una carta a su amigo A. Chevallier[7]. El teorema final de resolución por radicales es el siguiente. Un grupo G se dice resoluble si existe una cadena de subgrupos, cada uno de ellos *normal* en el anterior,

$$\{e\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = G,$$

tal que el cociente H_i/H_{i-1} es conmutativo.

Teorema 2. *Una ecuación algebraica es resoluble por radicales si y solo si su grupo es resoluble.*

[7]Que según se dice fue escrita en la víspera de su muerte

En términos modernos el *Théorème 1* dice que el cuerpo fijo del cuerpo de descomposición de una ecuación irreducible es el de los números racionales. De otra manera, que es una extensión normal, o *de Galois*. El salto a la presentación moderna de Richard Dedekind (1831-1916) y Emil Artin (1898–1962) parece abismal, pero no lo es en absoluto. Veamos cómo realizarlo de forma sencilla.

Consideremos Σ el cuerpo de descomposición, generado por los números racionales y las m raices $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Si consideramos m variables libres $x_1, \ldots, x_m$ hay un morfismo canónico de $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ en Σ que asigna a cada variable una solución de la ecuación. Su núcleo será un cierto ideal máximal $\mathfrak{m}$ (conviene obervar que un ideal e máximal si y sólo si su anillo cociente es un cuerpo, y por lo tanto la máximalidad de $\mathfrak{m}$ es equivalente a la epiyectividad de la proyección canónica).

$$0 \to \mathfrak{m} \to \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m] \to \Sigma \to 0$$

$$P(x_1, \ldots, x_m) \mapsto P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

Consideremos una función racional,

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \frac{P(x_1, \ldots, x_m)}{Q(x_1, \ldots, x_m)}, \quad f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \frac{a}{b},$$

determinable racionalmente. Entonces $bP - aQ$ está en el ideal $\mathfrak{m}$. Recíprocamente todo elemento de $\mathfrak{m}$ es una función determinable racionalmente. Determinemos cuáles son los automorfismos de Σ. Estos son los automorfismos de $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ que descienden a Σ, es decir, los automorfismos ϕ que conservan el ideal máximal $\mathfrak{m}$, en el sentido de que $\mathfrak{m} = \phi(\mathfrak{m})$. En primer lugar, dichos automorfismos deben provenir de una permutación de las variables $x_1, \ldots, x_m$, si bien este punto requiere una prueba más o menos elemental. Admitido este punto, queda claro que los *automorfismos de* Σ *sobre* $\mathbb{Q}$ son las permutaciones admisibles de las raíces, pues conservar $\mathfrak{m}$ es equivalente a conservar los valores de las funciones determinables racionalmente.

Teorema 3. *Todo elemento de Σ invariante por un automorfismo es un número racional.*

3. La noción de grupo de Lie

El genial matemático noruego Sophus Lie (1842-1899) lleva la teoría de grupos del álgebra a la geometría analítica a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX. Para estos efectos Lie se apoya sobre la geometría analítica. Atribuye a Descartes la noción fundamental de que *el espacio no está constituido por los puntos sino por los objetos que viven en el.* Intuición que Lie dice haber aprendido de Julius Plücker (1801-1868). El propio Sophus Lie considera el invierno de 1873 como la fecha de nacimiento de la noción. Hemos de tener en cuenta que entre 1869 y 1872 trabajó conjuntamente con Felix Klein (1849-1925) en Berlín, quien fuera asistente de Plücker.

La noción es simple. En una variedad diferenciable existen infinidad de transformaciones biyectivas. El conjunto de estas transformaciones es de forma natural un grupo que a su vez contiene infinidad de grupos. La intuición de Lie fue transportar la geometría desde el espacio original al grupo de sus transformaciones. En muchos casos, los grupos de transformaciones a considerar son de nuevo variedades diferenciables. Es decir, *grupos de Lie*.

Ejemplo 2. Consideremos el plano $\mathbb{R}^2$. De entre todas las transformaciones biyectivas del plano, consideremos aquellas que son lineales. Una transformación lineal del plano viene dada por cuatro números reales u_{ij},

$$\begin{aligned} x &\mapsto u_{11}x + u_{21}y \\ y &\mapsto u_{21}x + u_{22}y \end{aligned}$$

y es biyectiva si y solo si $u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}$ es distinto de cero. Podemos identíficar el grupo de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ con el abierto de $\mathbb{R}^4$,

$$GL(2, \mathbb{R}) = \{(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) \in \mathbb{R}^4 \mid u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} \neq 0\}.$$

Tenemos entonces, un espacio, y un grupo de transformaciones que es a su vez *un espacio*. Podemos, pues, hacer geometría y análisis sobre el grupo. Uno de los hechos matemáticos que hace de los grupos de Lie potentes herramientas para el tratamiento de las ecuaciones diferenciales es que son *generados infinitesimalmente*. Esto significa que hay ciertas *transformaciones infinitesimales* del espacio que generan el grupo. Una transformación infinitesimal no es otra cosa que una ecuación diferencial de primer orden. De esta manera surgen las *algebras de Lie* que son el aspecto infinitesimal de los grupos de Lie.

Ejemplo 3. En el caso del grupo lineal, los campos lineales,

$$x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}$$

son generadores infinitesimales. *El flujo de cualquiera de estos campos, o de una combinación lineal de ellos, es un flujo de transformaciones lineales*. Por ejemplo, el flujo de la rotación infinitesimal,

$$\vec{R} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},$$

viene dado por,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que es una familia monoparamétrica de campos lineales.

Lie aplica la teoría de grupos de transformaciones a las ecuaciones diferenciales. Nadie ha estado tan cerca como él del desarrollo de una teoría general de las ecuaciones diferenciales. En general, una ecuación diferencial admite grupos de simetrías: transformaciones que convierten la ecuación en sí misma. Utilizando los grupos de simetrías se desarrollan métodos de integración para las ecuaciones diferenciales. Este tratamiento es similar al dado por Galois a las ecuaciones algebraicas. Sin embargo, no es equivalente, como prueba el desarrollo de la teoría de Picard-Vessiot que exponemos má adelante (nótese que el Teorema 4 es enunciado en un sólo sentido mientras que el de Galois es un *si y solo si*).

En 1893 Lie finaliza el tercer volumen de su *Theorie der Transformationsgruppen* junto con Friedrich Engel (1861–1941), así como el volumen *elemental* sobre las aplicaciones *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten Infinitesimalen Transformationen* junto con Georg Scheffers (1866–1945). Allí encontramos el siguiente resultado, con un cierto sabor a la teoría de Galois, que aquí enunciamos en términos modernos.

Teorema 4 [Lie 1893] *Si la ecuación diferencial,*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x}, \mathbf{t})\,.$$

admite un grupo de simetrías conexo y resoluble que actúa en codimensión uno, entonces es integrable por cuadraturas.

Es necesario observar que en los trabajos de S. Lie, Ernest Vessiot (1865–1952), o F. Klein no existe una noción abstracta de grupo, así como ocurría con Galois. Se considera en todo caso *grupos continuos de transformaciones.* De este modo, el espacio donde el grupo actúa es un dato adicional. De hecho, tanto S. Lie como F. Klein se resistieron a la noción abstracta de grupo de Lie, pensando que dicho punto de vista distancia demasiado la teoría de sus aplicaciones. Es a través de los trabajos posteriores de otros autores que se desarrolla la teoría abstracta de grupos de Lie. Wilhelm Killing (1847–1923) comienza la teoría abstracta de álgebras de Lie que es desarrollada en la tesis de Élie Cartan (1869–1894) y en los trabajos del siglo XX de E. Cartan y Hermann Weyl (1885–1955).

4. La teoría de Picard y Vessiot

Paralelamente a los trabajos de Lie sobre integración por cuadraturas, Emile Picard (1856–1941) y su alumno Ernest Vessiot extienden los resultados de E. Galois a las ecuaciones diferenciales lineales. Se trata del trabajo de tesis de Vessiot, que es publicado bajo el título *Sur l'intégration des équations différentielles lineaires* en los Anales de la École Normale Supérieure.

Picard y Vessiot dan a los sistemas de ecuaciones diferenciales homogéneos lineales el mismo tratamiento que Galois. Consideran una ecuación diferencial con n incógnitas,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \tag{1}$$

donde los elementos de matriz de $A(t)$ son funciones racionales de t. La definición del grupo es análoga a la de Galois. Las soluciones de (1) forman un espacio vectorial. Es por tanto adecuado, considerar transformaciones lineales en lugar de simplemente permutaciones. Consideramos una matriz fundamental de soluciones $U(t)$, cuyos elementos de matriz son $u_{ij}(t)$ funciones de t. De nuevo consideramos funciones racionales en n^2. Una función racional se dice *determinable racionalmente* si y solo si su valor sobre la matriz fundamental de soluciones es de nuevo una función racional del tiempo.

$$f(x_{ij}) = \frac{P(x_{ij})}{Q(x_{ij})}, \quad f(U(t)) = f(u_{ij}(t)) \in \mathbb{C}(t).$$

La definición de grupo es tal cual. Una matriz σ no degenerada es *admisible* si para toda funcion f *determinable racionalmente* se tiene que

$$f(U(t)) = f(U(t)\sigma) \in \mathbb{C}(t).$$

Ejemplo 4 Consideremos la ecuación de Airy,

$$\ddot{x} - tx = 0.$$

Que escribimos como un sistema matricial es,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Sea U una matrix fundamental de soluciones. Si derivamos el determinante $|U| = u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12}$, y substituimos en la ecuación, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}|U| = 0.$$

Se sigue que $|U| = \lambda$, donde λ es una constante que depende de la elección del sistema de soluciones[8]. De esta manera el *determinante* $|U|$ es una función racionalmente determinable. Una transformación σ admisible debe verificar:

$$|U\sigma| = |U| = \lambda$$

y por tanto $|\sigma| = 1$. Es entonces claro que toda transformación admisible por la ecuación de Airy tiene determinante 1.

En la tesis de Vessiot encontramos:

Théorème 5. *A toute équation linéaire correspond un groupe Γ de transformations linéaires homogénes, qui jouit des deux propietes suivantes:*

1. *Toute fonction rationnelle des intégrales qui a une expression rationnelle admet toutes les transformations de ce groupe;*
2. *Toute fonction rationnelle des intégrales invariante par toutes les transformations de ce groupe a une expression rationnelle.*

[8]Lo que que es en realidad un caso particular del teorema de *Abel-Liovulle*. El determinante w de cualquier matriz fundamental de soluciones de la ecuación (1) verifica $\dot{w} = tr(A(t))w$.

El conjunto de las matrices admisibles forma un grupo, el *grupo de Galois diferencial* de la ecuación. Dicho grupo es un grupo de Lie, y en particular un grupo algebraico, como veremos más adelante.

En este caso, las extensiones por radicales son substituidas por los conceptos de *cuadraturas elementales*, que en el caso de las ecuaciones lineales son *cuadraturas* y *exponenciales de cuadraturas*.

Théorème 6. *Pour qu'une équation linéaire soit intégrable par quadratures, if faut et il suffit que le groupe des transformations de cette equations soit un groupe conexe integrable.*

Aquí, la noción de grupo integrable es similar a la de resoluble. El grupo G se dice integrable si existe una cadena de resolución,

$$\{e\} = H_0 \lhd \ldots \lhd H_n = G,$$

con los cocientes H_i/H_{i-1} de dimensión 1.

5. Grupos algebraicos

Los grupos de Galois de las ecuaciones diferenciales son en particular grupos algebraicos lineales. Los grupos algebraicos lineales son grupos de matrices *definidos por ecuaciones algebraicas*. Estos grupos fueron estudiados por vez primera por Ludwig Maurer (1859–1927), que publica cuatro trabajos entre 1888 y 1899.

El trabajo de Maurer es continuado por Claude Chevalley (1909–1984) , que se convierte en el gran fundador de la teoría de grupos algebraicos.

> *The principal interest of the algebraic groups seems to me to be that they establish a synthesis, at least partial, between the two main parts of group theory, namely the theory of Lie groups and the theory of finite groups* (Chevalley, citado por A. Borel (1923–2003) [3]).

En los años cuarenta Ellis Kolchin (1916–1991), alumno del fundador del álgebra diferencial Joseph Ritt (1893–1951), retoma la teoría de Picard-Vessiot, a la que le dota de formalidad algebraica. Los grupos de Galois diferencial son entonces grupos algebraicos. Ellis Kolchin desarrolla una generalización de la teoría de Picard-Vessiot, la teoría de las extensiones fuertemente normales. Los grupos de Galois de las extensiones fuertemente normales tienen un comportamiento similar al de los grupos algebraicos, pero no son grupos lineales. Kolchin desarrolla una teoría axiomática de los grupos algebraicos que permite demostrar que los grupos de Galois de las extensiones fuertemente normales son grupos algebraicos.

El paso de la teoría de Picard-Vessiot a la teoría contemporánea, es totalmente análogo a lo que hemos visto para la teoría de Galois clásica. Sin embargo, ahora son necesarios algunos fundamentos de álgebra diferencial. Consideremos u_{ij} los elementos de matriz de una matriz fundamental de soluciones del sistema (1). Paralelamente consideramos el anillo diferencial $\mathbb{C}(t)[x_{ij}]$ donde las derivadas de las n^2 variables x_{ij} se definen según la ecuación (1). Entonces, la aplicación que asigna x_{ij} a u_{ij} es un morfismo de anillos diferenciales, y su núcleo es un ideal diferencial.

$$\mathfrak{m}_U \to \mathbb{C}(t)[x_ij] \to \mathbb{C}(t, u_{ij}).$$

El ideal $\mathfrak{m}_U$ será un ideal diferencial primo máximal[9]. Para funciones determinables racionalmente tenemos:

$$f(u_{ij}) = \frac{P(u_{ij})}{Q(u_{ij})} = \frac{p(t)}{q(t)} \in \mathbb{C}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad P(x_{ij})q(t) - Q(x_{ij})p(t) \in \mathfrak{m}_U.$$

Una transformación σ es admisible racionalmente si y solo si deja fijo al ideal $\mathfrak{m}_U$ y de ahí se sigue[10] que el grupo de Galois es un grupo lineal algebraico.

6. Nuevas Perspectivas

La teoría de Galois diferencial puede ser, en la actualidad, la herramienta más potente en el problema de la clasificación e integración de las ecuaciones diferenciales. A comienzos del siglo XXI se encuentran nuevas aplicaciones de la teoría de Picard-Vessiot a problemas de integrabilidad de sistemas dinámicos no lineales (Juan José Morales–Ruiz, Jean Pierre Ramis, Haruo Yoshida, Andrzej J. Maciejewski, Maria Prsylbriska, etc). También se proponen teorías de Galois no lineales (Umemura, Bernard Malgrange, Guy Casale, basados en ideas originales de Jules Drach (1871-1949) y Paul Painlevé (1863–1933); la conexión entre la teoría de Galois diferencial y la superposición no lineal, así como interesantes aplicaciones a la mecánica cuántica (Ramis, Alain Connes).

El avance más notable, es probablemente el establecimiento de la teoría de Galois no lineal por Hiroshi Umemura y Malgrange. De nuevo la definición es idéntica a la original de Galois. Para una ecuación diferencial, se consideran todas las transformaciones del espacio que respetan todos los *invariantes diferenciales racionales* de la ecuación. El esquema es idéntico al de Galois, pero las complicaciones técnicas han retrasado la teoría hasta el siglo XXI. En primer lugar, el espacio de tales transformaciones no es un grupo sino un *pseudogrupo* de dimensión infinita. Sin embargo, a dichos pseudogrupos puede

[9] Si bien no necesariamente maximal como ideal en el sentido de la teoría de anillos no diferencial.

[10] Con algunos detalles adicionales.

asignárseles un objeto proalgebraico, bautizado por scmm B. Malgrange como *grupoide de Lie*. De esta manera hablamos del grupoide de Galois de una ecuación diferencial.

Con vistas al futuro, baste citar la brillante intuición de Sophus Lie sobre la influencia de Galois quien en 1894 escribía:

> *Ayant vu combien les idées de Galois se sont peu à peu montrées fécondes dans tant de branches de l'analyse, de la géometrie et même de la mécanique, il est bien permis d'eserer que leur puissance se manifestera égalment en physique mathematique. Que nous représentent en effet les phénomènes naturels si ce n'est une succession de transformations infinitésimales, dont les lois de l'univers sont les invariants.*

Agradecimientos. Quiero agradecer a Primitivo Acosta, Jesús Hernando Pérez y Reinaldo Nuñez su constante apoyo. Ellos son quienes me animaron a preparar la charla de divulgación sobre la cual escribí estas notas. Agradezco también el apoyo institucional de la Universidad Sergio Arboleda, a través de la agencia de gestión de la investigación Civilizar. Finalmente quiero agradecer las numerosas correcciones y observaciones del anónimo revisor de este documento.

Referencias

[1] N. H. Abel, *Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen.* J. reine angew. Math. 1, 1826, 65-84.
[2] W. W. Rouse Ball, *A Short Account of the History of Mathematics,* Dover, 1960.
[3] A. Borel, *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups,* AMS and LMS publications, 2001.
[4] E. Galois, *Oeuvres Mathématiques*, Éditions Jaques Gabay, 1989.
[5] E. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups* , 1985.
[6] D. E. Smith, *History of Mathematics, vol. II,* Dover, 1925.
[7] E. Vessiot, *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires,* Annales scientifiques de l'ENS, 3e série, tome 9 (1892), p. 197–280.

(Recibido en septiembre de 2008. Aceptado para publicación en diciembre de 2008)

David Blázquez–Sanz
Escuela de Matemáticas
Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia
Calle 74, no. 14-14
e-mail: david.blazquez-sanz@usa.edu.co