Lecturas Matemáticas
Volumen **24** *(2003), páginas 39–51*

Bolas no convexas

Bernardo Mayorga
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga
Gilberto Arenas
Universidad del Valle, Cali

Abstract. The intuitive notion of "ball" implies the attribute of "roundness", and hence of "convexity". In the present paper it is shown that, notwithstanding that belief, in some appropiately defined spaces it is possible to find balls that are not convex.

Key words and phrases. Metric space, linear space, convexity.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 46A19. Secondary 54E40.

Resumen. La noción intuitiva de bola implica el atributo de "redondez", y por consiguiente de "convexidad". En el artículo se muestra que, en contra de ese prejuicio, en algunos espacios definidos apropiadamente se pueden encontrar bolas que no son convexas.

1. Introducción

En los cursos de análisis se estudian los conceptos de espacio métrico y de espacio lineal. En el primero los objetos fundamentales son las *bolas*, y en el segundo juega papel importante la noción de *convexidad* de un conjunto. Intuitivamente sería de esperar que las bolas fueran siempre conjuntos convexos. En la mayoría de los espacios "corrientes" ello es así (por ejemplo, en todos los que aparecen en los textos estándar de análisis para pregrado). Sin embargo, la afirmación no tiene validez en general, y el propósito de este artículo es precisamente dar algunos ejemplos de espacios en los cuales existen bolas que no son convexas.

2. Repaso de conceptos básicos

Definición 1. *Un **espacio métrico** es un conjunto M, no vacío, de objetos (que llamaremos **puntos**) dotado de una función*

$$\begin{array}{rccc} d: & M \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$

*(llamada **métrica** o **distancia** en el espacio) que satisface los dos siguientes axiomas:*

M1 : $\forall\, x, y \in M : d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$
M2 : $\forall\, x, y, z \in M : d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$

Fácilmente se verifica que, no importa cuáles sean los puntos $x, y, z \in M$, se cumple $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ y $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 2. *Sean un espacio métrico (M, d), un elemento $a \in M$ y un número real positivo r. El conjunto*

$$\{x \in M \mid d(a, x) < r\}$$

*se denomina la **bola** con centro en a y radio r. Se denota $B(a; r)$.*

Definición 3. *Un **espacio lineal** sobre un campo C es un grupo abeliano L en el cual está definida la operación de multiplicación de un elemento del campo por uno del grupo de manera que se satisfacen los siguientes axiomas:*

L1 : $\forall\, \alpha, \beta \in C, \forall\, x \in L : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x;$
L2 : $\forall\, \alpha, \beta \in C, \forall\, x \in L : (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x;$

L3 : $\forall\, \alpha \in C, \forall\, x, y \in L : \alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
L4 : $\forall\, x \in L : 1x = x$

(en los anteriores axiomas el signo + señala la operación intrínseca del grupo, y 1 es la unidad del campo C, que por lo general es el de los números reales o el de los complejos).

Si mediante el símbolo $\odot$ representamos el elemento neutro del grupo, puede comprobarse sin dificultad que cualesquiera que sean $\alpha \in C$ y $x \in L$, se tiene $\alpha\odot = \odot$ y $0x = \odot$.

Definición 4. *Sean L un espacio lineal sobre los números reales y x, y dos elementos de L. Se dice que el conjunto*

$$\{z \in L \mid z = (1 - t)\, x + ty,\ t \in \mathbb{R}\} \equiv \overleftrightarrow{x, y}$$

es ***la recta que pasa por los puntos*** *x* ***e*** *y.*

Definición 5. *Sea L un espacio lineal sobre los números reales y x, y dos elementos de L. El conjunto*

$$\{z \in L \mid z = (1 - t)\, x + ty,\ t \in [0, 1]\} \equiv \overline{x, y}$$

se denomina ***segmento cerrado que une los puntos*** *x* ***e*** *y. Si los puntos x e y no se incluyen (i.e., si $t \in (0, 1)$), se habla del* ***segmento abierto****, y se denota $\overline{x, y}$.*

Definición 6. *Sea L un espacio lineal sobre los números reales y $S \subset L$. Se dice que S es un* ***conjunto convexo*** *si dados dos puntos cualesquiera $x, y \in S$, se tiene $\overline{x, y} \subset S$.*

Definición 7. *Se dice que un espacio lineal L sobre los números reales es* ***normado*** *si existe una función*

$$\begin{array}{ccccc} N & : & L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & N\,(x) \end{array}$$

(llamada ***norma****) que satisface los siguientes axiomas:*

N1 : $N\,(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \odot$;
N2 : $\forall\, \alpha \in C, \forall\, x \in L : N\,(\alpha x) = |\alpha|\, N\,(x)$;
N3 : $\forall\, x, y \in L : N\,(x + y) \leq N\,(x) + N\,(y)$.

Fácilmente se comprueba que la norma de cualquier elemento es un número no negativo (más aún, como consecuencia de N1, si $x \neq \odot$ entonces $N(x) > 0$). Por lo general, en vez de la notación $N(x)$ se utiliza $\|x\|$.

Definición 8. *De un conjunto L que esté provisto simultáneamente de las estructuras métrica y lineal diremos que es un espacio* ***metricolineal.***

Definición 9. *Se dice que un espacio metricolineal L con métrica d goza de la propiedad de* ***concordancia*** *si se satisfacen los dos siguientes requerimientos:*

C1 : $\forall\, x, y, z \in L : d(x, y) = d(x + z, y + z)$ *(invariabilidad con respecto a desplazamientos);*
C2 : $\forall\, \alpha \in C,\ \forall\, x, y \in L : d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y)$ *(semihomogeneidad de la métrica).*

Teorema 10 ([1])**.** *En todo espacio metricolineal concordante las bolas son conjuntos convexos.*

Demostración. En efecto, supongamos que tenemos un espacio metricolineal (L, d), y en él una bola $B(a; r)$. Si $x, y \in B(a; r)$, cualquier punto z del segmento $\overline{x, y}$ lo podemos representar como $z = (1 - t)\, x + ty$, con algún $t \in (0, 1)$ conveniente. Si demostramos que $z \in B(a; r)$, ello significará, de acuerdo con la definición 6, que la bola es convexa. Aplicando las propiedades de invariabilidad con respecto a desplazamientos y de semihomogenidad de la métrica tenemos:

$$\begin{aligned}
d(a, z) &= d(\odot, z - a) \\
&= d(\odot, (1 - t)\, x + ty - a) \\
&= d(\odot, (1 - t)\, x + ty - (1 - t)\, a - ta) \\
&= d(\odot, (1 - t)(x - a) + t(y - a)) \\
&= d(-(1 - t)(x - a), t(y - a)) \\
&\leq d(-(1 - t)(x - a), \odot) + d(t(y - a), \odot) \\
&= (1 - t)\, d(\odot, x - a) + td(\odot, y - a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1-t)\,d(a,x) + td(a,y) \\ &< (1-t)\,r + tr = r, \end{aligned}$$

es decir, $d(a,z) < r$, y por consiguiente $z \in B(a;r)$. ☑

Definición 11. *Se denomina **producto escalar** o **interno** en el espacio lineal L sobre el campo $\mathbb{R}$ a una función*

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle : & L \times L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle \end{array}$$

que satisface los siguiente axiomas:

$E1:\ \forall\, x \in L : \langle x,x\rangle \in \mathbb{R}_0^+;$
$E2:\ \langle x,x\rangle = 0 \Longrightarrow x = \odot;$
$E3:\ \forall\, x,y,z \in L : \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle\,;$
$E4:\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, x,y \in L : \langle \alpha x,y\rangle = \alpha\,\langle x,y\rangle\,.$

Sin dificultad se comprueba que $\langle\odot,x\rangle = 0$ (y por lo tanto $\langle\odot,\odot\rangle = 0$). Esto último implica, en virtud de $E2$, que $\langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = \odot$. En consecuencia, según $E1$, si $x \neq \odot$ entonces $\langle x,x\rangle > 0$.

En los espacios lineales con producto interno tiene lugar el siguiente teorema importante:

Teorema 12 (Desigualdad de Buñakovski)**.** *Sea L un espacio lineal con producto escalar. Entonces, cualesquiera sean los elementos $x,y \in L$ se tiene*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle\,. \tag{1}$$

En los espacios lineales reales se puede introducir una norma mediante la fórmula

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}, \tag{2}$$

como se comprueba sin dificultad.

En el caso de $\mathbb{R}^n$ como espacio lineal real, si se utiliza el producto escalar estándar tenemos

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Esta norma coincide exactamente con la generada por la métrica d_2 en $\mathbb{R}^n$, que se definirá en el parágrafo 1.

Para los espacios lineales sobre $\mathbb{R}$ la desigualdad (1) y la norma introducida mediante la igualdad (2) implican que para cualesquiera $x, y \in L$

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Pero como $\langle x, y\rangle$ es un número real que puede ser de cualquier signo, si $x \neq \odot$, $y \neq \odot$, tendremos entonces

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1. \tag{3}$$

Esto último nos permite introducir, en un espacio lineal L sobre $\mathbb{R}$ con producto escalar y normado mediante (2), el concepto de ángulo entre dos de sus elementos.

Definición 13. *Dados x, $y \in L$, se define el **ángulo** $\theta\,(x, y)$ entre ellos mediante la función*

$$\begin{array}{rcl} \theta : L \times L & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \theta\,(x, y) \equiv \begin{cases} 0, \quad si \quad x = y = \odot\,; \\ \pi/2, \quad si \quad x = \odot \;\veebar\; y = \odot\,; \\ \cos^{-1}\left[\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}\right], \; si \;\; x \neq \odot \;\wedge\; y \neq \odot\,. \end{cases} \end{array} \tag{4}$$

En virtud de la desigualdad (3) esta función está bien definida. Nótese que $\theta\,(x, y) \in [0, \pi]$, y que $\theta = 0$ si y solo si $x = \alpha y$ para algún $\alpha > 0$.

3. Algunos ejemplos

3.1. Consideremos la familia de espacios métricos $(\mathbb{R}^n, d_p)$, en donde

$$d_p\,(x, y) \equiv \left\langle \sum_{i=1}^{n} |x_\imath - y_\imath|^p \right\rangle^{1/p}, \;\; p \in [1, \infty)$$

(la demostración de que la métrica está bien definida se puede ver en [2]). Si utilizamos en $\mathbb{R}^n$ la suma corriente de énuplas y su multiplicación por escalares, tenemos que $(\mathbb{R}^n, d_p)$ es una familia de espacios metricolineales. Se dice que la métrica en $(\mathbb{R}^n, d_p)$ es *euclidiana* cuando $p = 2$. Es claro que con $n = 1$ toda la familia queda reducida al caso $d_p(x, y) = |x - y|$, que se denomina *métrica ordinaria* y se denota d_0.

Todo espacio lineal normado se convierte en métrico mediante la fórmula $d(x, y) \equiv \|x - y\|$, como se prueba trivialmente. Sin embargo, la respuesta a la pregunta de si en un espacio metricolineal cualquiera la métrica genera una norma solo es afirmativa para el caso de *espacios metricolineales concordantes* (la demostración se puede ver, por ejemplo, en [1]).

Sin esfuerzo se comprueba que la familia $(\mathbb{R}^n, d_p)$ es concordante, y que la familia de métricas d_p genera una familia de normas $\|\cdot\|_p$ mediante la fórmula

$$\|x\|_p \equiv d_p(\odot, x).$$

3.2. El conjunto $C[a, b]$ de funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$ conforma, si utilizamos la suma corriente de funciones reales y su producto por escalar, un espacio lineal. Si además introducimos la métrica

$$d_p(f, g) \equiv \left\langle \int_a^b |f - g|^p \right\rangle^{1/p}, \qquad p \in [1, \infty),$$

tendremos la familia $(C[a, b], d_p)$ de espacios metricolineales (para una demostración de que la métrica está bien definida se puede ver [2]). También se verifica que cada uno de los espacios de la familia es concordante, y que se puede generar una familia de normas $\|\cdot\|_p$ mediante la fórmula

$$\|f\|_p \equiv d_p(\odot, f),$$

en donde obviamente $\odot$ representa la función nula.

En los espacios lineales es posible introducir el concepto de *longitud de un segmento* de varias maneras. Si el espacio es normado, se puede definir la longitud $\mu(\overleftrightarrow{x,y})$ del segmento $\overleftrightarrow{x,y}$ mediante la igualdad $\mu(\overleftrightarrow{x,y}) = \mu\left(\overline{x,y}\right) \equiv \|x-y\|$. Si el espacio es metricolineal, se puede utilizar $\mu(\overleftrightarrow{x,y}) \equiv d\left(x,y\right)$. Es de notar que en $\left(\mathbb{R}^2, d_p\right)$, por ejemplo, el *único* caso en que la longitud del segmento $\overleftrightarrow{x,y}$ coincide con la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo con vértices en los puntos $\left(x_1,x_2\right),\ \left(y_1,x_2\right),\ \left(y_1,y_2\right)$ (si $x_1 \neq y_1$ y $x_2 \neq y_2$) es cuando $p = 2$, es decir, cuando la métrica del espacio es la euclidiana:

$$\mu\left(\overleftrightarrow{x,y}\right) = d_2\left(x,y\right) = \sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2 + \left(x_2-y_2\right)^2}.$$

En consecuencia, en $\mathbb{R}^2$ (respectivamente, $\mathbb{R}^3$) la única métrica para la cual las representaciones cartesianas de las bolas son círculos (respectivamente, esferas) es la euclidiana.

4. Bolas no convexas

4.1. La métrica angular. Consideremos ahora el espacio lineal real $\mathbb{R}^2$ dotado del producto escalar estándar y normado mediante la fórmula (2), e introduzcamos una métrica de la siguiente manera: sean $x,\, y \in \mathbb{R}^2$, y sea $\theta\left(x,y\right)$ el ángulo entre ellos según la definición 13. Definamos la métrica d_* de la siguiente manera[1]:

$$\begin{array}{rlcl} d_*: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(x,y\right) & \longmapsto & d_*\left(x,y\right) = \left|\|x\| - \|y\|\right| + \theta\left(x,y\right). \end{array} \tag{5}$$

Verifiquemos que la métrica d_* está correctamente definida.

M1 : (a) Si $x = y$ de (5) se sigue inmediatamente que $d_*\left(x,y\right) = 0$.

(b) Si $d_*\left(x,y\right) = 0$, entonces $\left|\|x\| - \|y\|\right| + \theta\left(x,y\right) = 0$, pero como cada término de la suma es no negativo, si su suma da 0 es porque cada uno de ellos es 0, y por lo tanto $\|x\| = \|y\|$, por

[1] Esta métrica fue tomada de [3].

un lado, y por otro $y = \alpha x$ para algún $\alpha > 0$, así que en cualquier caso $x = y$.

M2 : Demostremos que

$$d_* (x, y) \leq d_* (x, z) + d_* (y, z) . \tag{6}$$

En efecto, observemos primero que si $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ con el producto escalar estándar, se tiene la desigualdad[2]

$$\theta (x, y) \leq \theta (x, z) + \theta (y, z) . \tag{7}$$

Aplicando (7) en (5) tenemos

$$\begin{aligned} d_* (x, y) &= |\|x\| - \|y\|| + \theta (x, y) \\ &\leq |\|x\| - \|z\|| + \theta (x, z) + |\|y\| - \|z\|| + \theta (y, z) \\ &= d_* (x, z) + d_* (y, z) . \end{aligned}$$

Por tanto, se satisface la desigualdad (6).

Por consiguiente, de *M1* y *M2* tenemos que $\left(\mathbb{R}^2, d_*\right)$ es un espacio métrico correctamente definido.

4.2. Ejemplos. Como consecuencia del Teorema 10 y de los ejemplos del parágrafo , en $(\mathbb{R}^n, d_p)$ todas las bolas son convexas. Pero tomando otras métricas podemos construir bolas no convexas. Un ejemplo sencillo en $\mathbb{R}^1$ se dio en [1]: sea d la métrica definida de la manera siguiente:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x = y; \\ 1, & \text{si} \quad x \neq y \ , \quad x \neq 2y \ \wedge \ y \neq 2x; \\ 2, & \text{si} \quad x \neq 0, \ (x = 2y \ \vee \ y = 2x) \ . \end{cases}$$

Si se considera la bola $B(4; 2)$, se verifica fácilmente que 6 y 10 son elementos de la bola, pero el número 8, que pertenece al intervalo $[6, 10]$, no está dentro de la misma.

La visualización del ejemplo anterior es fácil, pero no suficientemente "convincente" por sí misma. A continuación daremos un ejemplo en el plano que permite una visualización "impactante". Consideremos

[2] En [4] se hace una demostración de esta desigualdad para el caso general, es decir, cuando x, y, z son elementos de un espacio lineal real cualquiera.

en el espacio $\left(\mathbb{R}^2, d_*\right)$ definido anteriormente (que, como se comprueba fácilmente, **no** es un espacio metricolineal concordante) la bola con centro en $(\pi, 0) = c$ y de radio π:

$$B_{d_*}(c; \pi) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_*(c, x) < \pi\right\}. \tag{8}$$

Abreviando $\theta(c, x)$ simplemente como θ, desmenucemos la condición de (8) según (5), recordando que, según la definición 13, $\theta \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} d_*(c, x) < \pi \quad & \Leftrightarrow \quad |\|c\| - \|x\|| + \theta(c, x) < \pi \\ & \Leftrightarrow \quad |\pi - \|x\|| + \theta < \pi \\ & \Leftrightarrow \quad |\pi - \|x\|| < \pi - \theta \\ & \Leftrightarrow \quad -\pi + \theta < \pi - \|x\| < \pi - \theta \\ & \Leftrightarrow \quad -2\pi + \theta < -\|x\| < -\theta \\ & \Leftrightarrow \quad \theta < \|x\| < 2\pi - \theta. \end{aligned}$$

Como se sabe, la norma generada por el producto interno ordinario en $\mathbb{R}^n$, que es el que estamos utilizando aquí, coincide con la norma $\|\cdot\|_p$ generada por la métrica regular d_p cuando $p = 2$, así que $\|x\|$ será la distancia euclidiana entre $\odot$ y x, o sea, empleando la terminología de las coordenadas polares, el **radio** del punto x, que podemos escribir simplemente como r: $\|x\| \equiv r$.

En estas circunstancias tendremos que los puntos que constituyen la bola (8) son aquellos cuyo radio es mayor que el valor θ del ángulo que hacen con el punto c, pero menor que $2\pi - \theta$:

$$\theta < r < 2\pi - \theta. \tag{9}$$

Construyamos ahora sobre el plano cartesiano el modelo de la bola (8) empleando las desigualdades polares (9). Teniendo en cuenta que $\theta \in [0, \pi]$, la primera desigualdad de (9) nos da la zona del semiplano superior que se encuentra "por fuera" de la espiral $r = \theta$, junto con su correspondiente reflejo en el semiplano inferior (Figura 1).

Análogamente, la segunda desigualdad de (9) nos da la zona del semiplano superior que está "por dentro" de la espiral $r = 2\pi - \theta$, junto con su reflejo en el semiplano inferior (Figura 2).

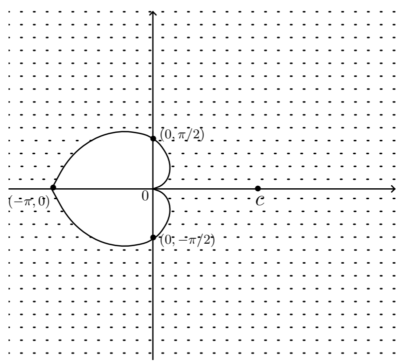

FIGURA 1: Los puntos $[r, \theta]$ de la zona sombreada satisfacen la condición $r > \theta$.

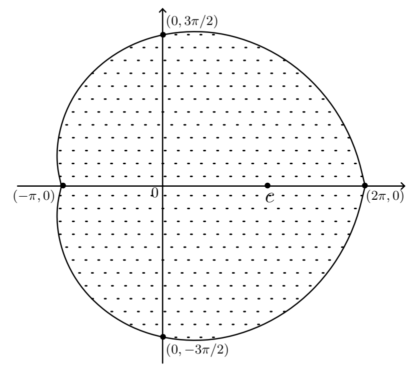

FIGURA 2: Los puntos $[r, \theta]$ de la zona sombreada satisfacen la condición $r < 2\pi - \theta$.

La intersección de los dos modelos de las figuras 1 y 2 nos da el modelo de la bola $B_{d_*}(c; \pi)$, como se muestra en la Figura 3.

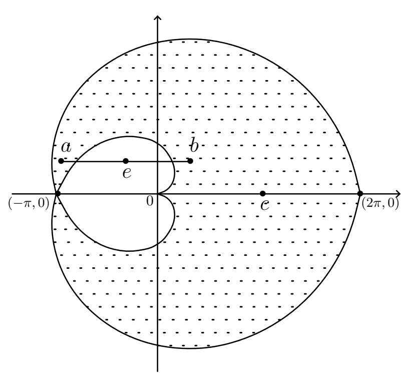

FIGURA 3: Modelo cartesiano (zona sombreada) de la bola $B_{d_*}(c; \pi)$.

Ahora bien, es evidente que los puntos $a = (-3, 1)$ y $b = (1, 1)$ pertenecen a la bola. En efecto:

$$\begin{aligned} d_*(c, a) &= |\|c\| - \|a\|| + \theta(c, a) \\ &= \left|\pi - \sqrt{(-3)^2 + 1^2}\right| + \theta((\pi, 0), (-3, 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\pi - \sqrt{10}\right| + \cos^{-1}\left[\frac{\langle(\pi,0),(-3,1)\rangle}{\|(\pi,0)\|\,\|(-3,1)\|}\right] \\
&= \sqrt{10} - \pi + \cos^{-1}\left[\frac{-3\pi}{\pi\sqrt{10}}\right] \\
&= \sqrt{10} - \pi + \cos^{-1}\left[\frac{-3}{\sqrt{10}}\right] \approx 2,84 < \pi; \\
d_*(c,b) &= \left|\|c\| - \|b\|\right| + \theta(c,b) \\
&= \left|\pi - \sqrt{1^2+1^2}\right| + \theta((\pi,0),(1,1)) \\
&= \left|\pi - \sqrt{2}\right| + \cos^{-1}\left[\frac{\langle(\pi,0),(1,1)\rangle}{\|(\pi,0)\|\,\|(1,1)\|}\right] \\
&= \pi - \sqrt{2} + \cos^{-1}\left[\frac{\pi}{\pi\sqrt{2}}\right] \\
&= \pi - \sqrt{2} + \cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\
&= \pi - \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - \sqrt{2} \approx 2,51 < \pi.
\end{aligned}$$

Por otra parte, el punto $e = (-1,1)$, pertenece al segmento $\overline{a,b}$ del espacio lineal $\mathbb{R}^2$, según la definición 5. En efecto, tomando allí $t = 1/2$ tenemos

$$\frac{1}{2}(-3,1) + \frac{1}{2}(1,1) = (-1,1).$$

Pero ese punto no pertenece a la bola, pues:

$$\begin{aligned}
d_*(c,e) &= \left|\|c\| - \|e\|\right| + \theta(c,e) \\
&= \left|\pi - \sqrt{2}\right| + \theta((\pi,0),(-1,1)) \\
&= \left|\pi - \sqrt{2}\right| + \cos^{-1}\left[\frac{\langle(\pi,0),(-1,1)\rangle}{\|(\pi,0)\|\,\|(1,1)\|}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi - \sqrt{2} + \cos^{-1}\left[\frac{-\pi}{\pi\sqrt{2}}\right] \\
&= \pi - \sqrt{2} + \cos^{-1}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\
&= \pi - \sqrt{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} - \sqrt{2} \approx 4,08 > \pi.
\end{aligned}$$

Tenemos pues que $a \in B_{d_*}(c;\pi)$, $b \in B_{d_*}(c;\pi)$, pero

$$\overleftrightarrow{a,b} \not\subset B_{d_*}(c;\pi),$$

de tal suerte que la bola $B_{d_*}(c;\pi)$ del espacio metricolineal $\left(\mathbb{R}^2, d_*\right)$ **no es convexa**, como justamente se aprecia en el modelo cartesiano de la Figura 3.

Referencias

[1] María Eugenia Padilla. *Espacios métricos.* Monografía de grado, UIS, 1993.

[2] A. N. Kolmogórov & S. V. Fomín. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* Moscú, Mir, 1972.

[3] Michael F. Barnsley. *Fractals Everywhere.* Academic Press, Cambridge, MA, 1989.

[4] Bernardo Mayorga & Gilberto Arenas. *La desigualdad triangular para ángulos en espacios lineales.* (Artículo en preparación.)

(Recibido en mayo de 2003)

Bernardo Mayorga
e-mail: mayorga@@uis.edu.co
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

Gilberto Arenas
e-mail: gilaredi@@univalle.edu.co
Universidad del Valle
Cali, Colombia