Lecturas Matemáticas
Volumen **21** *(2000), páginas -*

Compacidad Compensada aplicada a un sistema 2×2 no estrictamente hiperbólico

Edilma Isabel Amaya
Universidad Distrital F.J.C., Bogotá, Colombia
Leonardo Rendón
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Resumen. En este artículo divulgativo se encuentra una solución débil de un sistema 2×2 no estrictamente hiperbólico usando el método de compacidad compensada. El trabajo pretende familiarizar al lector con los elementos básicos del método de la compacidad compensada a través de un ejemplo concreto.

Key Words and Phrases: Riemann Invariants , Entropy Flux, Dirac Measures

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 35L65. Secondary 35L45.

Abstract. In this expository paper we present a weak solution for a 2×2 not strictly hiperbolic system. The method of compensated compactness is used.

1. Introducción

El propósito de este trabajo es encontrar una solución débil del sistema

$$\begin{cases} z_t - (\overline{z}^{\gamma})_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ z(x,0) = z_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

$z = u + iv \equiv (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq \gamma < 2$, $z_0 \in L^2 \cap L^\infty$, z_0 tomando valores en algún cono cerrado de $\mathbb{R}^2$ con vértice en el origen y ángulo $\dfrac{\pi}{\gamma+1}$. Esto es, en el conjunto

$$C = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : k\frac{\pi}{\gamma+1} \leq \arg z \leq (k+1)\frac{\pi}{\gamma+1} \right\},$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$.

La solución z de (1) se obtiene como el límite débil de una sucesión $\{z^\epsilon\}$, donde cada z^ϵ es una solución clásica global de la regularización parabólica

$$\begin{cases} z_t - (\overline{z}^\gamma)_x = \epsilon z_{xx}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ z(x,0) = z_0^\epsilon(x), \end{cases} \tag{2}$$

donde

$$\begin{aligned}
& z_0 \in L^2 \cap L^\infty \ , \quad z_0^\epsilon = z_0 + \epsilon Q \ , \\
& Q = \exp\left(i(k+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{\gamma+1} \right) \ , \\
& z = u + iv \equiv (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ , \\
& 1 \leq \gamma < 2 \ , \quad \epsilon > 0 \quad \text{y} \quad z^\epsilon \in C \ , \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2_+ \\
& \mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R} \times (0, \infty) \ .
\end{aligned}$$

La teoría que se aplica para conseguir la solución débil de (1) se conoce hoy en la literatura matemática con el nombre de *compacidad compensada.* Esta teoría fué introducida por TARTAR para resolver sistemas de leyes de conservación en el año 1979 y aplicada luego a los sistemas hiperbólicos por R. J. DI PERNA en 1983. Su motivación se encuentra en entender cómo las oscilaciones de los coeficientes de las ecuaciones diferenciales parciales generan oscilaciones en sus soluciones y se resalta la importancia de que ciertas funciones no lineales, cuya forma depende del sistema de ecuaciones en estudio, se comportan bien con relación a las oscilaciones de las soluciones. Es decir, si se tiene una sucesión de soluciones oscilantes que converge débilmente para una cierta función, las compuestas de aquellas funciones no lineales con los miembros de la sucesión convergen débilmente para la compuesta con el límite débil.

La teoría de compacidad compensada la aplicamos al sistema (1), considerando sistemas aproximados de la forma dada en (2), los cuales tienen una solución clásica global z^ϵ. De esta manera conseguimos una sucesión $\{z^\epsilon\}$ de soluciones de (2), que resulta uniformemente acotada en $L^2(\mathbb{R} \times [0,T], \mathbb{R}^2)$, Ási existe una subsucesión $\{z_k^\epsilon\}$ que converge débilmente hacia algún z en L^2 .

Considerando $f(z) = -\overline{z}^\gamma$ se muestra entonces que $f(z_k^\epsilon) \rightharpoonup f(z)$, lo cual permite concluir que z es solución débil de (1).

2. Preliminares

En esta sección damos algunos resultados que serán de utilidad en los próximos capítulos.

Definición 2.1. Sea X un espacio normado sobre un cuerpo de escalares K. Se dice que X es un *espacio normado reflexivo* si la función

$$J : X \to X''$$

definida por $J(x) = J_x$ donde

$$J_x : X' \to K$$

está dado por

$$J_x(x') = x'(x),$$

es sobreyectiva.

Definición 2.2. Un espacio de probabilidad es un *espacio de medida totalmente finita* $(X, \mathbf{X}, \mu)$ para el cual $\mu(X) = 1$. La medida μ sobre el espacio de probabilidad se llama una *medida de probabilidad.*

Definición 2.3. Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto, $(X, \mathbf{X}, \mu)$ un espacio de medida y $E \subset X$. Se dice que E es *el soporte de la medida* μ si se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) E es cerrado en X.
(b) $\mu(E \cap U) > 0$ si $E \cap U \neq \emptyset$ y U es abierto en X.

(c) $\mu(X \cap E^c) = 0$.

Teorema 2.4 (Teorema del divergente rotacional). *Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave, ϵ una sucesión de números reales convergente a cero y $\{v^\epsilon\}$, $\{w^\epsilon\}$ dos sucesiones acotadas en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tales que:*

(a) $\{\text{div } v^\epsilon\}$ *es precompacto en* $W^{-1,2}(\Omega)$.
(b) $\{\text{rot } w^\epsilon\}$ *es precompacto en* $W^{-1,2}(\Omega\,; M^{n\times n})$, *donde* $M^{n\times n}$ *es el espacio de las matrices de tamaño* $n \times n$, *y*

$$(\text{rot } w)_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} w^i - \frac{\partial}{\partial x_i} w^j$$

con $1 \leq i, j \leq n$ *y* $w = (w^1, w^2, ..., w^n)$, *función con valores en* $\mathbb{R}^n$.

Supóngase además que $v^\epsilon \rightharpoonup v$ *y* $w^\epsilon \rightharpoonup w$ *en* $L^2(\Omega\,; \mathbb{R}^n)$. *Entonces*

$$v^\epsilon w^\epsilon \rightharpoonup vw$$

en el sentido de las distribuciones.

Para su demostración véase [6], o también [7, pág 21].

Teorema 2.5. *Sea Ω como en el teorema anterior. Sea $\{z^\epsilon\}$ una sucesión uniformemente acotada en $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$, para algún $p > 1$. Entonces existen una subsucesión $\{z^{\epsilon_k}\}$ y una familia de medidas de probabilidad $\{v_x\}_{x\in\Omega}$ sobre $\mathbb{R}^m$ tales que si $f \in C(\mathbb{R}^m)$ y satisface $f(z) = o(|z|^p)$, cuando $|z| \to \infty$, entonces*

$$f(z^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \langle v_x, f(\lambda)\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda) dv_x(\lambda),$$

en el sentido de las distribuciones.

Demostración. Véanse [7, pág. 18] o [12, pág. 964]. ☑

Teorema 2.6. *Sea E un espacio normado reflexivo. Entonces toda sucesión acotada en E posee una subsucesión débilmente convergente en E.*

Demostración. Véase [2, pág. 135]. ☑

Definición 2.7. Un sistema de la forma $z_t + F(z)_x = 0$ es *hiperbólico* cuando los autovalores asociados a la matriz de las derivadas parciales de F son todos reales no necesariamente diferentes.

Los autovalores del sistema (1) asociados a la matriz de las derivadas parciales de F son

$$\lambda_1 = -\gamma r^{\gamma-1}\ , \quad \lambda_2 = \gamma r^{\gamma-1}.$$

Por el hecho de que para $z = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$, se dice que el sistema (1) es no estrictamente hiperbólico.

3. Obtención de una solución débil del sistema (1)

3.1. **Invariantes de Riemann.** Sea

$$z_t + F(z)_x = 0, \qquad t > 0,\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

un sistema 2×2 hiperbólico de leyes de conservación.

Definición 3.1. Un par de funciones (α, β) se dicen *invariantes de Riemann* para el sistema (3) si satisfacen las relaciones

$$\nabla\alpha(z)dF(z) = \lambda_1(z)\nabla\alpha(z),\ \ \nabla\beta(z)dF(z) = \lambda_2(z)\nabla\beta(z),\ \ \forall z \in \operatorname{dom}(F)$$

Se demuestra en [7, pág. 89], que

$$\alpha = -r^{\gamma+1}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\theta, \quad \beta = r^{\gamma+1}\cos^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\theta$$

son un par de invariantes de Riemann para el sistema (1) y cumplen las relaciones

$$\lambda_1 = -\gamma(\beta-\alpha)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = -\lambda_2.$$

3.2. **Regularización Parabólica.** La regularización parabólica para el sistema (1) consiste de los sistemas parabólicos,

$$\begin{cases} z_t - (\overline{z}^{\gamma})_x = \epsilon z_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \quad z(x,0) = z_0^{\epsilon}(x), \end{cases} \tag{4}$$

donde

$$
\begin{aligned}
& z_0 \in L^2 \cap L^\infty \;, z_0^\epsilon = z_0 + \epsilon Q \;, \\
& Q = \exp\left(i \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\gamma + 1} \right) \;, \\
& z = u + iv \equiv (u, v) \in \mathbb{R}^2 \;, \quad 1 \leq \gamma < 2, \mathrm{y} \epsilon > 0 \;.
\end{aligned}
$$

Con el fin de encontrar una solución clásica global para (4) se considera el sistema

$$
\begin{cases} z_t + F(z)_x = \epsilon z_{xx} \\ z(x,0) = z_0^\epsilon(x) \end{cases} \tag{5}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
& z_0 \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R} \;, \; \mathbb{R}^2) \;, z_0(x) \in C \;, \forall x \in \mathbb{R} \;, \\
& z_0^\epsilon = z_0 + \epsilon Q \;, \\
& Q = \exp\left(i(k + \tfrac{1}{2}) \tfrac{\pi}{\gamma+1} \right) \;, \quad k \in \mathbb{Z} \;,
\end{aligned}
$$

y F es un campo cerrado de $\mathbb{R}^2$ de clase C^∞ que satisface las siguientes propiedades:

(a) $F(z) = -\overline{z}^\gamma$, $\forall z$, en la región dada por (véase la figura 1)

$$S = \{ z \in C : \beta(z) \geq \beta(\epsilon Q) \}.$$

(b) $F'(z) = o(|z|)$, $\quad F''(z) = 0(1)$, $\quad F'''(z) = 0(1)$ cuando $|z| \to \infty$.

Teorema 3.2. *Sea*

$$T_0 = \text{mín}\left[\frac{\pi\epsilon}{17 a_1(r)^2}, \; \frac{\epsilon}{16\pi a_1(r)^2}, \; \frac{1}{a_2(r)}, \; \frac{1}{a_3(r)} \right]$$

donde

$$a_i(r) = \sup_{\|z\|_{\mathbb{R}^2} \leq r} \| \, F^{(i)}(z) \, \|, \quad i = 1, 2, 3$$

para algún $r \geq 2 \parallel z_0 \parallel_{L^\infty}$. *Entonces existe una función*

$$z \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T_0))$$

solución clásica del sistema (5)

Además

$$\| z(t) - \epsilon Q \|_{L^p} \leq 2 \| z_0 \|_{L^p} \qquad p=2, \ \infty$$

$$\| z(t)_x \|_{L^2} \leq 2(\pi \epsilon t)^{-1/2} \| z_0 \|_{L^2}$$

para $0 < t \leq T_0$

Demostración. La demostración se puede consultar en [9, lema 2.2]. □
✓

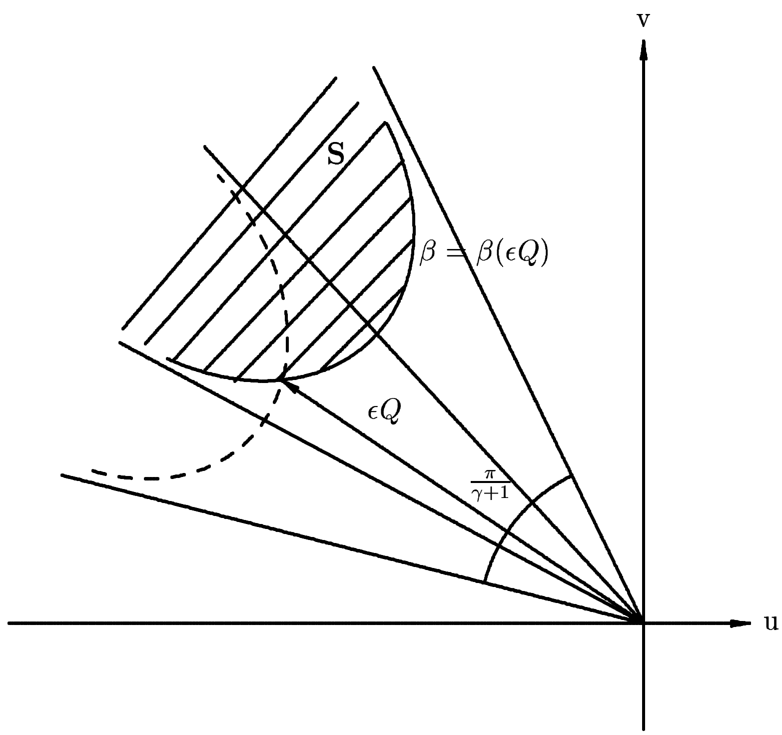

Figura 1

Como S es una región invariante para el sistema (2) y

$$F(z) = -\overline{z}^{\gamma} \qquad \forall z \in S,$$

la solución hallada para el sistema (4), es también solución para el sistema (2).

Definición 3.3. Una función $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 es una *entropía del sistema* (3) si existe una función

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

de clase C^1 tal que

$$\nabla\eta(z)F'(z) = \nabla q(z),$$

para todo $z \in \mathrm{dom}(F)$. q se llama el *flujo de la entropía* η y el par (η, q), *par de entropía.*

Si el sistema (3) es simétrico en un abierto simplemente conexo A de $\mathbb{R}^2$ (es decir con $F'(z)$ simétrica para todo $z \in A$, o equivalentemente, F un campo cerrado en A),tenemos que

$$\eta(z) = |z - p|^2, \qquad \forall p \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

es una entropía estrictamente convexa, cuyo flujo está dado por

$$q(z) = 2(z - p).F(z) - G \tag{7}$$

donde G satisface $\nabla G = 2F$, en A .

Teorema 3.4. *Sea $z^\epsilon : \mathbb{R} \times [0, T) \to \mathbb{R}^2$ una solución clásica de*

$$\begin{cases} z_t + F(z)_x = \epsilon z_{xx} \\ z(x, 0) = z_0 \end{cases} \tag{8}$$

donde $z_0 - p \in L^2 \cap L^\infty$ para algún $p \in \mathbb{R}^2$. Supóngase que

$$z(t) \in W^{2,2}(\mathbb{R}) \ , \quad \forall t \in (0, T) \ ,$$

y que el sistema $z_t + F(z)_x = 0$ posee una entropía η^* convexa tal que

$$\delta^{-1}|z^\epsilon - p|^2 \leq \eta^*(z^\epsilon) \leq \delta|z^\epsilon - p|^2,$$

para algún $\delta > 0$. Entonces

$$\| z^\epsilon(t) - p \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta \| z_0 - p \|_{L^2} \ , \tag{9}$$

$\forall t \in [0, T)$, $\forall \epsilon > 0$. *Si además η^* es estrictamente convexa, se tiene*

$$(\epsilon)^{1/2} \| z_x^\epsilon \|_{L^2(\mathbb{R} \times [0,T))} \leq d \| z_0 - p \|_{L^2} \ , \tag{10}$$

$\forall \epsilon > 0$, donde d es una constante que no depende de ϵ.

Demostración. Sea (η, q) un par de entropía del sistema

$$z_t + F(z)_x = 0.$$

Multiplicando la ecuación $z_t + F(z)_x = \epsilon z_{xx}$ por $\nabla\eta(z^\epsilon)$ se obtiene:

$$\nabla\eta(z^\epsilon)z_t + \nabla\eta(z^\epsilon)F(z)_x = \nabla\eta(z^\epsilon)\epsilon z_{xx}.$$

Así se llega a la expresión

$$\eta(z^\epsilon)_t + q(z^\epsilon)_x = \epsilon\nabla\eta(z^\epsilon)z_{xx},$$

esto es

$$\eta(z^\epsilon)_t + q(z^\epsilon)_x = \epsilon\nabla\eta(z^\epsilon)z^\epsilon_{xx}.$$

Como

$$\begin{aligned}\epsilon\eta(z^\epsilon)_{xx} - \epsilon\nabla\eta(z^\epsilon)z^\epsilon_{xx} &= \epsilon\Big[\eta''(z^\epsilon)(z^\epsilon_x, z^\epsilon_x) + \eta'(z^\epsilon)z^\epsilon_{xx}\Big] - \epsilon\nabla\eta(z^\epsilon)z^\epsilon_{xx}\\ &= \epsilon\eta''(z^\epsilon)(z^\epsilon_x, z^\epsilon_x),\end{aligned}$$

entonces

$$\epsilon\nabla\eta(z^\epsilon)z^\epsilon_{xx} = \epsilon\eta(z^\epsilon)_{xx} - \epsilon\eta''(z^\epsilon)(z^\epsilon_x, z^\epsilon_x).$$

Por lo tanto,

$$\eta(z^\epsilon)_t + q(z^\epsilon)_x = \epsilon\eta(z^\epsilon)_{xx} - \epsilon\eta''(z^\epsilon)\cdot(z^\epsilon_x, z^\epsilon_x).$$

Integrando a ambos lados de esta igualdad sobre el rectángulo

$$R = \big[-A, A\big] \times \big[t_0, t\big], \qquad A > 0,\ \ 0 < t_0 < t < T,$$

se tiene

$$\begin{aligned}&\int_{-A}^{A}\Big[\eta(z^\epsilon(x,t)) - \eta(z^\epsilon(x,t_0))\Big]dx + \int_{t_0}^{t}\int_{-A}^{A} q(z^\epsilon)_x dx d\tau = \\ &\qquad\int_{t_0}^{t}\int_{-A}^{A}\epsilon\eta(z^\epsilon)_{xx}dxd\tau - \epsilon\int_{-A}^{A}\int_{t_0}^{t}\eta''(z^\epsilon)(z^\epsilon_x, z^\epsilon_x)d\tau dx.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A}\Big[\eta(z^{\epsilon}(x,t))-\eta(z^{\epsilon}(x,t_0))\Big]dx&\\+\int_{t_0}^{t}\Big[q(z^{\epsilon}(A,\tau))-q(z^{\epsilon}(-A,\tau))\Big]dt&\\=\epsilon\int_{t_0}^{t}[\eta(z^{\epsilon})_x(A,\tau)-\eta(z^{\epsilon})_x(-A,\tau)]d\tau&\\-\epsilon\int_{-A}^{A}\int_{t_0}^{t}\eta''(z^{\epsilon})(z_x^{\epsilon},z_x^{\epsilon})d\tau dx.&\qquad(11)\end{aligned}$$

Debido a la inmersión $W^{2,2}(\mathbb{R})\to C_*^1(\mathbb{R})$, donde $C_*^1(\mathbb{R})$ es el espacio de las funciones de clase C^1 de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ que se anulan en el infinito, se tiene que $z^{\epsilon}(\underline{+}\infty,\tau)-p=z_x^{\epsilon}(\underline{+}\infty,\tau)=0$. (Lema de Sobolev, véase [10, pág. 340]).

Si se hace que $A\to\infty$ según (11) se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t))dx+\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\eta''(z^{\epsilon})(z_x^{\epsilon},z_x^{\epsilon})d\tau dx=\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t_0))dx,\qquad(12)$$

de esta forma si en (12) se hace $\eta=\eta^*$,donde η^* esta dada como en (6), se deduce que

$$\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_o}^{t}\eta''(z^{\epsilon})(z_x^{\epsilon},z_x^{\epsilon})d\tau dx\geq 0.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t))dx\leq\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t_0))dx.\qquad(13)$$

Por (13) y aplicando la hipótesis del teorema, se tiene:

$$\begin{aligned}\delta^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|z^{\epsilon}(x,t)-p|^2dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t))dx\\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t_0))dx \qquad (14)\\ &\leq \delta\int_{-\infty}^{\infty}|z^{\epsilon}(x,t_0)-p|^2dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si en (14) se hace $t_0\downarrow 0$ de inmediato se obtiene (9). Si η es estrictamente convexa, de (12) y aplicando el lema de Lax-Milgram (véase [11, pág. 115]) se deduce:

$$\begin{aligned}\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{t}|z_x^{\epsilon}|^2d\tau\,dx &\leq \epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\eta''(z^{\epsilon})(z_x^{\epsilon},z_x^{\epsilon})d\tau dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t_0))dx-\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t))dx.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{t}|z_x^{\epsilon}|^2 &\leq |\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t_0))dx-\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t))dx|\\ &\leq |\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t_0))dx|+|\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t))dx|.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\left[\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{t}|z_x^{\epsilon}|^2\right]^{1/2} &\leq |\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t_0))dx|^{1/2}+|\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z^{\epsilon}(x,t))dx|^{1/2}\\ &= |\int_{-\infty}^{\infty}|z^{\epsilon}(x,t_0)-p|^2dx|^{1/2}+|\int_{-\infty}^{\infty}|z^{\epsilon}(x,t)-p|^2dx|^{1/2}\\ &\leq \| z_0-p\|_{L^2}+\delta\| z_0-p\|_{L^2}\end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$(\epsilon)^{1/2}\| z_x^{\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,T])}\leq (1+\delta)\| z_0-p\|_{L^2}\leq d\| z_0-p\|_{L^2}$$

donde $d=(1+\delta)$, lo cual coincide con (10). ☑

Puesto que la matriz de las derivadas del sistema (1) es simétrica, de lo anterior se sigue que el par de entropía (η, q) dado por (6) y (7) es un par de entropía estrictamente convexo para el sistema (1).

Teorema 3.5. *Sean* $C = \{z \in \mathbb{R}^2 : k\frac{\pi}{\gamma+1} \leq \arg z \leq (k+1)\frac{\pi}{\gamma+1}\}$ *donde* k *es un entero positívo dado,* $Q = \exp(i(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\gamma+1})$, $z_0 \in L^2 \cap L^\infty$ *y* $z_0^\epsilon = z_0 + \epsilon Q$*. Entonces el problema (2) tiene una solución clásica global* z^ϵ *tal que* $z^\epsilon(x,t) \in C \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2_+$*, y además se satisfacen las siguientes desigualdades*

$$\| z^\epsilon(t) - \epsilon Q \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \| z_0 \|_{L^2} \ , \quad \forall t > 0 \ , \quad \forall \epsilon > 0 \tag{15}$$

y

$$\frac{(\epsilon)^{1/2}}{2} \| z_x^\epsilon \|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} \leq \| z_0 \|_{L^2} \ , \quad \forall \epsilon > 0. \tag{16}$$

Demostración. Por el teorema (3.1) existe $z^\epsilon \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T_0])$ solución clásica de (2) con

$$T_0 = T_0(r) = \text{mín}\left[\frac{\pi\epsilon}{17a_1(r)^2}, \ \frac{\epsilon}{16\pi a_1(r)^2}, \ \frac{1}{a_2(r)}, \ \frac{1}{a_3(r)}\right],$$

para algún $r \geq 2 \| z_0 \|_\infty$ y

$$a_i(r) = \sup_{\|z\|_{R^2} \leq r} \| F^{(i)}(z) \|, \qquad 1 = 1,2,3.$$

A partir de este momento, la prueba del teorema se reduce a mostrar que la solución z^ϵ se puede extender a todo $t > 0$. Para este propósito, usamos un proceso de inducción. En efecto, sean $T_k = (k+1)T_0, \quad k = 0, 1, ...,$ y $r \geq 2 \| z_0 \|_{L^\infty}$ suficientemente grande; el objetivo de la prueba es mostrar que la solución z^ϵ está definida en $[0, T_k]$ y satisface:

$$(a_k) \qquad \| z^\epsilon(t) - \epsilon Q \|_{L^\infty} \leq r, \quad 0 \leq t \leq T_k \tag{17}$$

$$(b_k) \qquad \| z^\epsilon(T_k) - \epsilon Q \|_{W^{1,2}(\mathbb{R})} \leq d \| z_0 \|_{L^2}, \quad 0 \leq t \leq T_k, \tag{18}$$

donde $d = \text{máx}\{2, 4(\pi\epsilon T_0)^{-1/2}\}$. Por el teorema (3.1) se tiene:

$$\| z^\epsilon(t) - \epsilon Q \|_{L^\infty} \leq 2 \| z_0 \|_{L^\infty}, \qquad \text{para } 0 < t \leq T_0,$$

del hecho que $r \geq 2 \parallel z_0 \parallel_{L^\infty}$ se deduce que

$$\parallel z^\epsilon(t) - \epsilon Q \parallel_{L^\infty} \leq r, \qquad \text{para } 0 < t \leq T_0,$$

lo cual prueba (a_0). Además

$$\begin{aligned}
\parallel z^\epsilon(T_0) - \epsilon Q \parallel_{W^{1,2}} &= \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \parallel D^\alpha z^\epsilon(T_0) \parallel_{L^2}^2 \right]^{1/2} \\
&= \left[\parallel z_x^\epsilon(T_0) \parallel_{L^2}^2 + \parallel z^\epsilon(T_0) \parallel_{L^2}^2 \right]^{1/2} \\
&\leq \left[[2(\pi\epsilon T_0)^{-1/2} \parallel z_0 \parallel_{L^2}]^2 + \parallel z_0 \parallel_{L^2}^2 \right]^{1/2} \qquad (19) \\
&\quad \text{por los teoremas (3.1) y (3.2)} \\
&\leq 2(\pi\epsilon T_0)^{-1/2} \parallel z_0 \parallel_{L^2} + \parallel z_0 \parallel_{L^2} \\
&\leq \frac{d}{2} \parallel z_0 \parallel_{L^2} + \frac{d}{2} \parallel z_0 \parallel_{L^2} \\
&= d \parallel z_0 \parallel_{L^2} .
\end{aligned}$$

De esta forma (b_0) también es válido. Supóngase que z^ϵ está definida en $[0, T_k]$ y que se cumplen las condiciones (a_k) y (b_k), con el fin de probar que z^ϵ se puede extender también a $[0, T_{k+1}]$ y que se satisfacen (a_{k+1}) y (b_{k+1}). Si m=1, n=1 y p=2, es claro que $1/p - m/n < 0$ y según el teorema 5.4 de [1] $W^{1,2}(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ es una inmersión, de este hecho y de la hipótesis (b_k), se tiene:

$$\begin{aligned}
2 \parallel z^\epsilon(T_k) - \epsilon Q \parallel_{L^\infty} &\leq 2 \parallel z^\epsilon(T_k) - \epsilon Q \parallel_{W^{1,2}} \\
&\leq 2d \parallel z_0 \parallel_{L^2} .
\end{aligned} \qquad (20)$$

Por consiguiente, según el teorema (3.1) z^ϵ está definida en $[0, T_{k+1}]$ si

$$\tfrac{r}{2d} \geq \parallel z_0 \parallel_{L^2} \qquad (21)$$

para algún $r \geq 2 \parallel z_0 \parallel_\infty$. Para que esto ocurra, es suficiente que $\lim_{r\to\infty} \frac{r}{d} = \infty$, lo cual es cierto ya que $T_0 = T_0(r) = \frac{1}{o(r)^2}$ cuando $r \to \infty$. Luego se puede fijar $r \geq 2 \parallel z_0 \parallel_\infty$ tal que $\frac{r}{2d} \geq \parallel z_0 \parallel_{L^2}$. Por el teorema

(3.1), aplicado para $t \in [T_k, T_{k+1}]$, se tiene

$$\begin{aligned} \| z^\epsilon(t) - \epsilon Q \|_{L^\infty} &\leq 2 \| z(T_k) \|_{L^\infty} \\ &= 2 \| z^\epsilon(T_k) - \epsilon Q \|_{L^\infty} \\ &\leq 2d \| z_0 \|_{L^2} \quad (\text{por } (20)) \\ &\leq r \ (\text{por } (21)). \end{aligned} \tag{22}$$

De esta forma se concluye la validez de (a_{k+1}). Por otra parte,

$$\begin{aligned} \| z^\epsilon(T_{k+1})_x \|_{L^2} &\leq 2(\pi\epsilon T_{k+1})^{-1/2} \| z_0 \|_{L^2} \\ &\leq \frac{d}{2} \| z_0 \|_{L^2} \quad (\text{por definición de d.}) \end{aligned} \tag{23}$$

y

$$\begin{aligned} \| z^\epsilon(T_{k+1}) - \epsilon Q \|_{L^2} &\leq \| z_0^\epsilon - \epsilon Q \|_{L^2} \quad (\text{por } (9)) \\ &= \| z_0 \|_{L^2} . \end{aligned} \tag{24}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \| z^\epsilon(T_{k+1}) - \epsilon Q \|_{W^{1,2}} &= \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \| D^\alpha(z^\epsilon(T_{k+1}) - \epsilon Q) \|_{L^2}^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\| z^\epsilon(T_{k+1})_x \|_{L^2}^2 + \| z^\epsilon(T_{k+1}) - \epsilon Q \|_{L^2}^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \| z^\epsilon(T_{k+1})_x \|_{L^2} + \| z^\epsilon(T_{k+1}) - \epsilon Q \|_{L^2} \\ &\leq \frac{d}{2} \| z_0 \|_{L^2} + \| z_0 \|_{L^2} \\ &\leq d \| z_0 \|_{L^2}, \end{aligned} \tag{25}$$

con lo cual se prueba (b_{k+1}). De esta manera, se deduce que la solución z^ϵ puede ser extendida a todo $t > 0$. Además $z^\epsilon(x,t) \in C \quad , \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2_+$, porque C es una región invariante para el sistema (2). Las desigualdades (15) y (16) se deducen inmediatamente de (9) y (10) con $\delta = 1$. En efecto, (9) y (10) para este caso son :

$$\| z^\epsilon(t) - \epsilon Q \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \| z_0^\epsilon - \epsilon Q \|_{L^2(\mathbb{R})} = \| z_0 \|_{L^2},$$

$$(\epsilon)^{1/2} \parallel z_x^\epsilon \parallel_{L^2(\mathbb{R}\times[0,T])} \leq 2 \parallel z_0^\epsilon - \epsilon Q \parallel_{L^2} = 2 \parallel z_0 \parallel_{L^2} \quad . \qquad ☑$$

3.3. **Entropías para el sistema (1).** Una de las dificultades para la aplicación de la compacidad compensada en el estudio de sistemas de leyes de conservación hace referencia al hecho de poder establecer un conjunto de pares de entropía flujo para el sistema en estudio. En el caso de sistemas 2×2 el procedimiento usual es mirar la ecuación general de las entropías en un sistema coordenado α, β, donde (α, β) representan un par de invariantes de Riemann para el sistema en mención.

En consonancia con lo anterior dado un par de invariantes de Riemann (α, β) el siguiente teorema involucra a la ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\frac{\partial\lambda_2}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial\beta} - \frac{\partial\lambda_1}{\partial\beta}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\right] = 0, \tag{26}$$

siendo λ_1 y λ_2 los autovalores asociados al sistema tratado. Cuando el sistema es no estrictámente hiperbólico, esto es cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ en algún punto, la ecuación (26) es singular en dicho punto, en este caso se requiere conocer la forma de la singularidad, para lo cual es necesario expresar los autovalores λ_1 y λ_2 en términos de los invariantes de Riemann α, β .

En la mayoría de los casos conocidos en los cuales se aplica la compacidad compensada en la solución de un problema de Cauchy para un problema no estrictámente hiperbólico, las expresiones de λ_1 y λ_2 como funciones de los invariantes de Riemann α, β, permiten que la ecuación (26) se transforme en la ecuación de Euler–Poisson–Darboux. Tal es el caso del sistema (1).

Teorema 3.6. *Sea (α, β) un par de invariantes de Riemann para el sistema 2×2 de leyes de conservación*

$$z_t + F(z)_x = 0$$

con $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$, $z = (z_1, z_2)$, $F = (F_1, F_2)$ función en $C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$, y M una función cuyas coordenadas son α y β. Si ϕ es solución de la *ecuación*

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\frac{\partial\lambda_2}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial\beta}-\frac{\partial\lambda_1}{\partial\beta}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\right]=0,$$

donde $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *son los autovalores de* dF*, entonces* $\eta = \phi \circ M$ *es una entropía para* $z_t + F(z)_x = 0$ *cuyo flujo es* $q = \psi \circ M$*, siendo* ψ *un potencial para el campo cerrado*

$$\left(\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial\alpha},\lambda_2\frac{\partial\phi}{\partial\beta}\right). \tag{27}$$

Demostración. La ecuación (26) es equivalente a la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\lambda_2\frac{\partial\phi}{\partial\beta}\right). \tag{28}$$

Como el campo (27) es cerrado, existe una función ψ tal que

$$\left(\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial\alpha},\lambda_2\frac{\partial\phi}{\partial\beta}\right)=\nabla\psi. \tag{29}$$

Multiplicando (29) por

$$dM=\begin{bmatrix}\nabla\alpha\\ \nabla\beta\end{bmatrix}$$

se deducen las siguientes igualdades:

$$\left(\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial\alpha},\lambda_2\frac{\partial\phi}{\partial\beta}\right)\begin{bmatrix}\nabla\alpha\\ \nabla\beta\end{bmatrix}=\nabla\psi\begin{bmatrix}\nabla\alpha\\ \nabla\beta\end{bmatrix}$$

$$\nabla\phi\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla\alpha\\ \nabla\beta\end{bmatrix}=\nabla\psi\begin{bmatrix}\nabla\alpha\\ \nabla\beta\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla\phi\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}dM=\nabla\psi dM=\nabla q. \tag{30}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
dMdF &= \begin{bmatrix}\nabla\alpha(z)\\ \nabla\beta(z)\end{bmatrix} dF(z)\\
&= \nabla\alpha(z)dF(z) + \nabla\beta(z)dF(z)\\
&= \lambda_1(z)\nabla\alpha(z) + \lambda_2(z)\nabla\beta(z)\\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\nabla\alpha(z)\\ \nabla\beta(z)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} dM.
\end{aligned} \tag{31}$$

Así de (30) y (31) se deduce:

$$\nabla\phi dMdF = \nabla q. \tag{32}$$

Por consiguiente,

$$\nabla\eta dF = \nabla q,$$

lo cual prueba la afirmación hecha en el teorema. ☑

La ecuación (26) para el caso del sistema (1) es:

$$\phi_{\alpha\beta} - \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)}\frac{1}{\beta-\alpha}(\phi_\beta - \phi_\alpha) = 0. \tag{33}$$

Esta ecuación sugiere estudiar la ecuación

$$\phi_{\alpha\beta} - \frac{k}{\beta-\alpha}(\phi_\beta - \phi_\alpha) = 0 \tag{34}$$

con $k \in \mathbb{R}$, conocida con el nombre de ecuación de Euler–Poisson (o Euler–Poisson–Darboux). El problema de Goursat para (34) consiste en resolver (34) sujeta a las siguientes condiciones

$$\begin{cases} \phi(\alpha,\beta^*) = \theta_1(\alpha),\\ \phi(\alpha^*,\beta) = \theta_2(\beta)\end{cases} \tag{35}$$

donde $\alpha^* \leq 0 \leq \beta^*$ son constantes y $\theta_1, \theta_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones suaves dadas que cumplen $\theta_1(\alpha^*) = \theta_2(\beta^*)$.

La solución del problema (34), (35) (véase [16, pág 24]) es:

$$\begin{aligned}\phi(\alpha,\beta) = \theta_1(\alpha^*)G(\alpha^*,\beta^*,\alpha,\beta)\\ + \int_{\alpha^*}^{\alpha} G(t,\beta^*,\alpha,\beta)\big[\theta_1'(t) - k.(\beta^* - t)^{-1}\theta_1(t)\big]\,dt\\ + \int_{\beta^*}^{\beta} G(\alpha^*,\tau,\alpha,\beta)\big[\theta_2'(\tau) + k.(\tau - \alpha^*)^{-1}\theta_2(\tau)\big]\,d\tau \qquad (36)\end{aligned}$$

donde

$$G(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3}\right)^k F(1-k,k,1,\sigma), \qquad (37)$$

con

$$\sigma = \sigma(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3)}, \qquad (38)$$

y F una función hipergeométrica. Es decir, $F(a,b,c;\sigma)$ $(c \notin \mathbb{Z})$ es una solución de la ecuación hipergeométrica

$$\sigma(\sigma - 1)F''(\sigma) - \big[c - (a+b+1)\sigma\big]F'(\sigma) - abF = 0 \qquad (39)$$

con las condiciones iniciales

$$F(0) = 1\ , \quad F'(0) = \frac{ab}{c},$$

la cual a su vez está dada por la serie hipergeométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n,$$

donde

$$a_0 = 1,\ a_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}$$

si $n \geq 1$, dicha serie converge absolutamente y uniformemente si $|\sigma| < 1$.

En particular, $H(\sigma) = F(1-k,k,1,\sigma)$ es una solución de la ecuación hipergeométrica

$$\sigma(\sigma - 1)H'' + (2\sigma - 1)H' + k(1-k)H = 0$$

y satisface las condiciones iniciales

$$H(0) = 1 \ , \quad H'(0) = k(1-k) \ .$$

Se adoptan cuatro tipos de entropías soluciones especiales de (34), a saber:

Entropías este: son aquellas en que $\alpha^* < 0$, $\beta^* = 0$, $\theta_2 \equiv 0$, $\theta_1(\alpha) = 0$ para $\alpha \leq \alpha^*$ y $\theta_1(\alpha) = 0$ si $-\delta \leq \alpha \leq 0$ para algún $\delta \in (0, -\alpha^*)$ dado.
Entropías oeste: son aquellas que $\alpha^* < 0$, $\theta_2 \equiv 0$, $\theta_1(\alpha^*) = 0$ si $\alpha \geq \alpha^*$.
Entropías sur: Son aquellas en que $\beta^* > 0$, $\alpha^* \leq 0$, $\theta_1 \equiv 0$, $\theta_2(\beta) = 0$ si $\beta \geq \beta^*$ y $\theta_2(\beta) = 0$ si $0 \leq \beta \leq \delta$ para algún $\delta \in (0, \beta^*)$.
Entropías norte: son aquellas en que $\beta^* > 0$, $\theta_1 \equiv 0$, $\theta_2(\beta) = 0$ si $\beta \leq \beta^*$.

Específicamente, estas entropías están dadas por las siguientes relaciones:

Entropías este:

$$\phi(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)^{-k} \int_{\alpha^*}^{\alpha} H(\sigma)\theta'(t)dt, \tag{40}$$

donde

$$\theta(t) = (\beta^* - t)^k \theta_1(t)$$

y

$$\sigma = \frac{(\alpha - t)(\beta - \beta^*)}{(\beta^* - t)(\beta - \alpha)}.$$

Entropías sur:

$$\phi(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)^{-k} \int_{\beta^*}^{\beta} H(\sigma)\theta'(\tau)d\tau, \tag{41}$$

donde $\theta(\tau) = (\tau - \alpha^*)^k \theta_2(\tau)$ y $\sigma = \dfrac{(\alpha - \alpha^*)(\beta - \tau)}{(\tau - \alpha^*)(\beta - \alpha)}$.

Las entropías oeste y norte están también dadas por (40) y (41), respectivamente.

Sea T un operador definido por medio de la siguiente igualdad:

$$T(\cdot) = \int_{\alpha^*}^{-\delta} (.)\theta'(t)dt.$$

En términos de este operador, la expresión (40) se transforma en

$$\phi(\alpha,\beta) = (\beta-\alpha)^{-k}T(H(\sigma)). \tag{42}$$

Proposición 3.7. *Sea $\eta(u,v) = \phi(\alpha,\beta)$ una entropía para el sistema (1) en las variables (u,v). Dado $n \in \mathbb{N}$ y $0 < \epsilon < \frac{\alpha^*}{\alpha^*-1}$ si T es el operador definido antes y*

$$T((-t)^{-i}) = 0 \tag{43}$$

para $i = 0, 1, ...n-1$ para algún $n \geq 3$ fijo. Entonces η, $\nabla\eta$, $d^2\eta$ son funciones acotadas.

Demostración. La demostración se encuentra en [5, pág. 41]. ☑

Haciendo $\beta^* = 0$ e integrando (40) por partes se obtiene:

$$\phi(\alpha,\beta) = I(\alpha,\beta)\theta_1(\alpha) + \int_{\alpha^*}^{\alpha} J(t,\alpha,\beta)\theta_1(t)dt, \tag{44}$$

donde $I(\alpha,\beta) = \big(\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}\big)^k$ y $J(t,\alpha,\beta) = \dfrac{-\alpha\beta(-t)^{k-2}}{(\beta-\alpha)^{k+1}}H'(\sigma)$.

De otro lado por (29) y (44) se obtiene:

$$\psi(\alpha,\beta) = K(\alpha,\beta)\theta_1(\alpha) + \int_{\alpha^*}^{\alpha} L(t,\alpha,\beta)\theta_1(t)dt, \tag{45}$$

donde

$$\begin{aligned} L(t,\alpha,\beta) = \lambda_1(t,\beta)J(t,t,\beta) - \frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}(t,\beta)I(t,\beta) \\ + \int_t^{\alpha} \lambda_1(s,\beta)\frac{\partial J}{\partial\alpha}(t,s,\beta)ds \end{aligned} \tag{46}$$

$$K(\alpha,\beta) = \lambda_1(\alpha,\beta)I(\alpha,\beta). \tag{47}$$

3.4. **Obtención de una familia de medidas de probabilidad.** Aplicando el teorema (3.3), para cada $\epsilon > 0$ se consigue una solución z^{ϵ} de la regularización parábolica del sistema (1), y así se forma una sucesión $\{z^{\epsilon}\}$ de soluciones del problema (2), la cual resulta uniformemente acotada en $L^2(\mathbb{R}\times[0,T];\mathbb{R}^2)$ para todo $T > 0$. En este sentido, en virtud de los teoremas (2.2) y (2.3) se garantiza la existencia de una subsucesión $\{z^{\epsilon_k}\}$ y una familia de medidas de probabilidad $\{v_{x,t}\}_{(x,t)\in\mathbb{R}^2_+}$ sobre $\mathbb{R}^2$ tales que para $f(z) = -\overline{z}^{\gamma}$, $1 \leq \gamma < 2$,

$$f(z^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \langle v_{x,t}, f(\lambda)\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda) dv_{x,t}(\lambda), \tag{48}$$

en el sentido de las distribuciones y

$$z^{\epsilon_k} \rightharpoonup z \tag{49}$$

en $L^2(\mathbb{R}\times[0,T];\mathbb{R}^2)$.

3.5. **Reducción de las medidas $v_{x,t}$.** Se muestra a continuación que cada una de las medidas $v_{x,t}$ es una medida de Dirac, esto con el fin de concluir mediante las relaciones (48) y (49) que

$$f(z^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \langle v_{x,t}, f(\lambda)\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda) dv_{x,t}(\lambda) = f(P_{v_{x,t}}) \tag{50}$$

y

$$\pi_i(z^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \langle v_{x,t}, \pi_i(\lambda)\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i dv_{x,t}(\lambda) = \pi_i(P_{v_{x,t}}) \quad i = 1, 2, \tag{51}$$

donde $P_{v_{x,t}}$ es el punto donde se concentra la medida, y π_i denota la proyección i de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}, i = 1, 2$. Así se concluye que $z^{\epsilon_k} \rightharpoonup P_{v_{x,t}}$, y por la unicidad del límite:

$$f(z^{\epsilon_k}) \rightharpoonup f(P_{v_{x,t}}) = f(z(x,t)) \tag{52}$$

esto es,

$$\overline{z^{\epsilon_k}{}^{\gamma}} \rightharpoonup \overline{z^{\gamma}} \tag{53}$$

con lo cual se tiene que z es una solución débil del problema (1).

A partir de este punto, se presentan los pasos para probar que cada una de las medidas $v_{x,t}$ es una medida de Dirac.

Teorema 3.8. *Sean G un abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$, (η, q) un par de entropía para el sistema (1), z^ϵ una solución clásica de la regularización parabólica de (1) que satisface el teorema (3.2) si $\{\eta(z^\epsilon)\}$ y $\{q(z^\epsilon)\}$ son acotadas en $L^r(G)$ para algún $r > 2$ y $\{\nabla\eta(z^\epsilon)\}$ y $\{d^2\eta(z^\epsilon)\}$ son acotadas en $L^\infty(G)$ entonces $g^\epsilon = \eta(z^\epsilon)_t + q(z^\epsilon)_x$ es precompacto en $W^{-1,2}(G)$.*

Demostración. Véase [5, pág. 48]. ☑

Corolario 3.9. *La relación de conmutatividad*

$$\langle v, \phi\overline{\psi} - \overline{\phi}\psi\rangle = \langle v, \phi\rangle\langle v, \overline{\psi}\rangle - \langle v, \overline{\phi}\rangle\langle v, \psi\rangle, \tag{54}$$

con $v = v_{x,t}$ es válida para las entropías dadas en el numeral (3.3).

Demostración. Sean $x^\epsilon = (\phi(z^\epsilon), \psi(z^\epsilon))$ e $y^\epsilon = (\overline{\psi}(z^\epsilon), -\overline{\phi}(z^\epsilon))$; por el teorema anterior se sigue que $\{\mathrm{div} x^\epsilon\}$ es precompacto en $W^{-1,2}(G)$ y $\{\mathrm{rot} y^\epsilon\}$ es precompacto en $W^{-1,2}(G, M^{2\times 2})$, y por el teorema (2.1)

$$x^\epsilon.y^\epsilon \rightharpoonup x.y$$

con $x^\epsilon \rightharpoonup x$ e $y^\epsilon \rightharpoonup y$. Aplicando el teorema (2.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} x^\epsilon.y^\epsilon &= (\phi(z^\epsilon), \psi(z^\epsilon)).(\overline{\psi}(z^\epsilon), -\overline{\phi}(z^\epsilon)) \\ &= (\phi\overline{\psi} - \overline{\phi}\psi)(z^\epsilon) \rightharpoonup \langle v, \phi\rangle\langle v, \overline{\psi}\rangle - \langle v, \overline{\phi}\rangle\langle v, \psi\rangle \end{aligned}$$

y

$$x^\epsilon.y^\epsilon \rightharpoonup \langle v, \phi\overline{\psi} - \overline{\phi}\psi\rangle.$$

De esta forma por la unicidad del límite se concluye:

$$\langle v, \phi\overline{\psi} - \overline{\phi}\psi\rangle = \langle v, \phi\rangle\langle v, \overline{\psi}\rangle - \langle v, \overline{\phi}\rangle\langle v, \psi\rangle. \quad ☑$$

Sea $R = [\alpha^-, \alpha^+] \times [\beta^-, \beta^+]$ el menor rectángulo que contiene el soporte de v, a priori se puede tener $\alpha^- = -\infty$ o $\beta^+ = +\infty$.

Proposición 3.10. $\forall\alpha^* \in (\alpha^-, 0)$ $\exists\phi$ *de tipo oeste y límite α^* acotada tal que $\langle v, \phi\rangle \neq 0$.*

Demostración. Por (40) si se escoge θ_1 no trivial y monótona en (α^*, α), tal que θ' tiene soporte compacto en (α^*, α) se obtiene que ϕ no es nula, es acotada y de signo constante, luego $\langle v, \phi\rangle \neq 0$, y $\langle v, \phi\rangle \neq \pm\infty$. ☑

Proposición 3.11. *Sea R dado como antes. Entonces existe* $\alpha_0 \in [\alpha^-, \alpha^+]$ *que satisface:*

(a) *Para todo par de entropía flujo de tipo este (η, q) y límite $\alpha^* \geq \alpha_0$, se tiene*

$$\langle v, q\rangle = \langle v, \eta\rangle = 0$$

(b) *Para cualesquiera dos pares de entropía flujo (η, q), (η_0, q_0) de tipo este y oeste respectivamente con límites $\alpha^*, \bar{\alpha}$ y tales que $\alpha^- \leq \alpha^*, \bar{\alpha} < \alpha_0$ se tiene:*

$$\langle v, q\rangle = c\langle v, \eta\rangle$$

y

$$\langle v, q_0\rangle = c\langle v, \eta_0\rangle,$$

para una misma constante c.

Demostración. Se supone sin pérdida de generalidad que $(\alpha^+, \beta^-) = (0, 0)$ ya que si $(\alpha^+, \beta^-) \neq (0, 0)$ las entropías de tipo este y sur son también suaves en R. Por la proposición (3,2) es posible obtener una entropía flujo oeste (η_0, q_0) con límite arbitrariamente próximo a α^- tal que $\langle v, \eta_0\rangle > 0$. Por lo tanto, la relación de conmutatividad implica:

$$\langle v, \eta\rangle\langle v, q_0\rangle - \langle v, \eta_0\rangle\langle v, q\rangle = 0,$$

$\forall$ (η, q) de tipo este y de límite en (α^-, α^+), es decir

$$\langle v, q\rangle = \langle v, \eta\rangle \frac{\langle v, q_0\rangle}{\langle v, \eta_0\rangle} = c_1(\eta_0)\langle v, \eta\rangle \tag{55}$$

donde $c_1(\eta_0) = \frac{\langle v, q_0\rangle}{\langle v, \eta_0\rangle}$.

Sea α_0 el ínfimo de los $\alpha^* \in (\alpha^-, \alpha^+)$ para los cuales

$$\langle v, \eta\rangle = 0 \tag{56}$$

para toda entropía de tipo este y límite α^*. Entonces (56) se satisface para toda entropía de tipo este y límite $\alpha^* > \alpha_0$, y por (56) se obtiene:

$$\langle v, q\rangle = 0 \tag{57}$$

para todo flujo de tipo este y límite $\alpha^* > \alpha_0$. Por aproximación, (56) y (57) se tienen para todos los pares de entropía flujo de tipo este y límite

$\alpha^* \geq \alpha_0$. Además si $\alpha^* < \alpha_0$, entonces existe una entropía este de límite α^* η, tal que $\langle v, \eta \rangle > 0$. Luego aplicando la relación de conmutatividad se deduce:

$$\langle v, q_0 \rangle = c \langle v, \eta_0 \rangle,$$

con la misma constante que en (55). ☑

Dada una medida μ sobre el plano α, β, se denota por $\pi_1 \mu$ la proyección de μ sobre el eje α.

Teorema 3.12. *Sea $\alpha^- < \alpha^+$. Entonces para todo $t \in (\alpha^-, \alpha^+)$ se tiene:*

$$D\pi_1 \widetilde{v}(t) = 0$$

donde $\widetilde{v} = I^2 \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} v$, I es dado como en (44) y D representa la derivación en relación a la medida de Lebesgue en la recta.

Demostración. Sea α_0 como en la proposición anterior y $t \neq \alpha_0$. Se considera $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeño tal que $t - \epsilon$, $t + \epsilon < \alpha_0$ o $t - \epsilon, t + \epsilon > \alpha_0$. En virtud de las igualdades (44) y (45), dadas (η, q) de tipo este y límite $\alpha_1^* = t - \epsilon$ y $(\widetilde{\eta}, \widetilde{q})$ de tipo oeste y límite $\bar{\alpha}_1 = t + \epsilon$, tales que

$$\eta(\alpha_1, \bar{\beta}_2) = \alpha_1 - \alpha^*, \qquad \text{para } \alpha_1 > \alpha_1^*$$

y

$$\widetilde{\eta}(\alpha_1, \bar{\beta}_2) = \alpha_1 - \bar{\alpha}_1, \qquad \text{para } \alpha_1 < \bar{\alpha}_1$$

donde $\bar{\beta}_2 \in [\beta^-, \beta^+]$, se tienen las siguientes expansiones para $\beta_2 \in [\beta^-, \beta^+]$:

$$\begin{aligned}
\eta(\alpha_1, \beta_2) &= I(\alpha_1, \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_1^*)^+ + \frac{1}{2} J(t, \alpha_1, \beta_2)[(\alpha_1 - \alpha_1^*)^+]^2 + O([(\alpha_1 - \alpha_1^*)^+]^3), \\
q(\alpha_1, \beta_2) &= K(\alpha_1, \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_1^*)^+ + \frac{1}{2} L(t, \alpha_1, \beta_2)[(\alpha_1 - \alpha_1^*)^+]^2 + O([(\alpha_1 - \alpha_1^*)^+]^3), \\
\widetilde{\eta}(\alpha_1, \beta_2) &= -I(\alpha_1, \beta_2)(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)^+ + \frac{1}{2} J(t, \alpha_1, \beta_2)[(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)^+]^2 + O([(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)^+]^3) \\
\widetilde{q}(\alpha_1, \beta_2) &= -K(\alpha_1, \beta_2)(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)^+ + \frac{1}{2} L(t, \alpha_1, \beta_2)[(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)^+]^2 + O([(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)^+]^3).
\end{aligned} \tag{58}$$

De las definiciones de I, J, K, L, se sigue:

$$I, I_\alpha, J, J_t, J_\alpha, J_{\alpha\alpha} = O(1), \tag{59}$$

$$K; K_\alpha, L, L_t, L_\alpha, L_{\alpha\alpha} = (\beta-\alpha)^k O(1), \tag{60}$$

$$\lambda_1 I_\alpha + \lambda_1 J(\alpha,\alpha,\beta) = K_\alpha + L(\alpha,\alpha,\beta). \tag{61}$$

Por consiguiente, como el soporte de $\eta\tilde{q} - \tilde{\eta}q$ está contenido en la franja tal que $\alpha_1^* \le \alpha_1 \le \bar{\alpha_1}$, dentro de ésta, por (58) - (61),podemos concluir que

$$(\eta\tilde{q} - \tilde{\eta}q)(\alpha_1,\beta_2) = \frac{-1}{2}(\bar{\alpha_1} - \alpha_1^*)(\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*)I^2(\alpha_1,\beta_2)\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha_1}(\alpha_1,\beta_2) +$$
$$O(\epsilon^2)(\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*) + O(\epsilon^2)(\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*)(\beta_2 - \alpha_1)^k.$$

Aplicando v y utilizando el hecho que, $\langle v, \eta\tilde{q} - \tilde{\eta}q\rangle = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}
0 &\le \langle v, (\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*)I^2(\alpha_1,\beta_2)\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha_1}(\alpha_1,\beta_2)\rangle \\
&= \langle v, O(\epsilon)(\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*)\rangle + \langle v, O(\epsilon)(\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*)(\beta_2 - \alpha_1)^k\rangle \\
&= O(\epsilon)\{\langle v, (\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*)\rangle + \langle v, (\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*)(\beta_2 - \alpha_1)^k\rangle\}.
\end{aligned}$$

Considerando la función $f(\alpha) = 1 - \dfrac{(\alpha - t)^2}{\epsilon^2}$ se cumple la igualdad

$$\epsilon^2 f(\alpha_1) = (\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*)$$

. Luego dividiendo por ϵ^3 se obtiene:

$$\frac{1}{\epsilon}\langle v, f(\alpha_1)I^2(\alpha_1,\beta_2)\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha_1}(\alpha_1,\beta_2)\rangle = \frac{1}{\epsilon^3}O(\epsilon)\{\langle v, (\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*)\rangle +$$
$$\langle v, (\bar{\alpha_1} - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1^*)(\beta_2 - \alpha_1)^k\}.$$

De otra parte,

$$f\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right)\chi_{[t-\epsilon/2, t+\epsilon/2]} \le f(\alpha_1)$$

para $t-\frac{\epsilon}{2}\leq\alpha_1\leq t+\frac{\epsilon}{2}$, donde χ_A denota la función característica en A.

De esta forma se llega a:

$$\frac{3}{4}\frac{1}{\epsilon}\langle v,\chi_{[t-\epsilon/2,t+\epsilon/2]}(I^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha_1})(\alpha_1,\beta_2)\rangle\leq\frac{1}{\epsilon^3}O(\epsilon)\{\langle v,(\bar{\alpha_1}-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_1^*)\rangle \\ +\langle v,(\bar{\alpha_1}-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_1^*)(\beta_2-\alpha_1)^k\}.$$

Como

$$(\bar{\alpha_1}-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_1^*)\leq(\bar{\alpha_1}-\alpha_1^*)^2=4\epsilon^2,$$

se sigue

$$\frac{1}{\epsilon}\langle v,\chi_{[t-\epsilon/2,t+\epsilon/2]}(I^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha_1})(\alpha_1,\beta_2)\rangle\leq\frac{4}{3}\frac{1}{\epsilon^3}O(\epsilon)\big\{4\epsilon^2\langle v,\chi_{[t-\epsilon/2,t+\epsilon/2]}\rangle+ \\ 4\epsilon^2\langle v,(\beta_2-\alpha_1)^k\chi_{[t-\epsilon/2,t+\epsilon/2]}\big\},$$

esto es

$$\begin{aligned}0&\leq\frac{1}{\epsilon}\langle v,\chi_{[t-\epsilon/2,t+\epsilon/2]}\left(I^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha_1}\right)(\alpha_1,\beta_2)\rangle\\&\leq c\{\langle v,\chi_{[t-\epsilon/2,t+\epsilon/2]}\rangle\langle v,(\beta_2-\alpha_1)^k\chi_{[t-\epsilon/2,t+\epsilon/2]}\},\end{aligned}\tag{62}$$

para alguna constante $c>0$.

Tomando el límite superior cuando $\epsilon\to 0$, en (62) se obtiene:

$$0\leq\bar{D}\pi_1\widetilde{v}(t)\leq c\{\pi_1 v(t)+\pi_1 v^*(t)\}<+\infty$$

con $v^*=(\beta-\alpha)^k v$.

Por tanto, si $\bar{D}\pi_1\widetilde{v}(t)>0$, entonces se satisface que $\pi_1 v(t)>0$ o $\pi_1 v^*(t)>0$ y en cualquier caso t es un punto singular de $\pi_1\widetilde{v}$, así $\bar{D}\pi_1\widetilde{v}(t)=+\infty$; lo cual es una contradicción. En consecuencia,

$$\bar{D}\pi_1\widetilde{v}(t)=0\ .$$

Para completar la prueba del teorema falta ver que $\alpha_0=\alpha^-$.

Razonando por el absurdo, se tiene que si $\alpha^-<\alpha_0$, entonces por la proposición (3,3) tomando dos pares de entropía flujo $(\eta,q);(\widetilde{\eta},\widetilde{q})$ de tipo oeste y límites $\alpha^- + \epsilon$, $\alpha^- + 2\epsilon$, donde $0 \leq \epsilon < \dfrac{\alpha_0 - \alpha^-}{2}$, se satisface la relación

$$\langle v, \eta \widetilde{q} - \widetilde{\eta} q \rangle = 0.$$

Teniendo en cuenta los datos anteriores dados para estas dos entropías, se puede repetir el mismo procedimiento para obtener, $\bar{D}\pi_1 \widetilde{v}(\alpha^-) = 0$. Por lo tanto,

$$D\pi_1 \widetilde{v}(t) = 0,$$

es válida para todo $t \in (-\infty, \alpha_0)$, lo cual implica que $\pi_1 \widetilde{v}(-\infty, \alpha_0) = 0$. Así $\pi_1 v(-\infty, \alpha_0) = 0$, que es una contradicción. En consecuencia, $\alpha_0 = \alpha^-$. ☑

Se tiene un resultado similar al del teorema (3,6) para $\pi_2 \widetilde{\widetilde{v}}$, con $\widetilde{\widetilde{v}} = I^2 \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial \beta} v$.

Corolario 3.13. $\operatorname{supp}(v) \subset \{(\alpha^-, \beta^-), (\alpha^+, \beta^-), (\alpha^-, \beta^+)(\alpha^+, \beta^+)\}$.

Demostración. Por el teorema (3.6) y por propiedades de derivación de medidas en relación a la medida de Lebesgue en la recta, se sigue que $\pi_1 \widetilde{v}\{(\alpha^-, \alpha^+)\} = 0$, es decir, $\widetilde{v}\{(\alpha^-, \alpha^+) \times [\beta^-, \beta^+]\} = 0$. Como $I^2 \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} > 0$, entonces se se sigue que: $v\{(\alpha^-, \alpha^+) \times [\beta^-, \beta^+]\} = 0$, así se obtiene que: $\operatorname{supp}(v) \subset \{\alpha^-, \alpha^+\} \times [\beta^-, \beta^+]$. Análogamente se deduce que el $\operatorname{supp}(v) \subset [\alpha^-, \alpha^+] \times \{\beta^-, \beta^+\}$ lo cual prueba la afirmación hecha en el enunciado del corolario. ☑

Proposición 3.14. *Sea* $A_1 = (\alpha^-, \beta^-)$, $A_2 = (\alpha^-, \beta^+)$, $A_3 = (\alpha^+, \beta^-)$, $A_4 = (\alpha^+, \beta^+)$, *y súpongase que*

$$v = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i \delta_{A_i}, \quad \varepsilon_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i = 1$$

Entonces una de las siguientes alternativas es válida

(a.) $\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} \equiv 0$ *sobre* $A_1 A_3$ *y* $A_2 A_4$.

(b.) $\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial \beta} \equiv 0$ *sobre* A_1A_2 *y* A_3A_4.

Demostración. La relación (54) se puede escribir en la forma:

$$\sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j \{(\eta(A_i) - \eta(A_j))(\widetilde{q}(A_i) - \widetilde{q}(A_j)) - (\widetilde{\eta}(A_i) - \widetilde{\eta}(A_j))(q(A_i) - q(A_j))\} = 0. \quad (63)$$

En efecto, sea $v_i = (\eta(A_i), q(A_i))$, $\bar{v}_i = (\widetilde{\eta}(A_i), \widetilde{q}(A_i))$, $W(v_i, v_j) = \det(v_i, v_j)$. La relación de conmutatividad (54) y la hipótesis muestran que

$$\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i W(v_i, \bar{v}_i) = \sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j W(v_i, \bar{v}_j). \quad (64)$$

Por hipótesis, $\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i = 1$. Multiplicando a ambos lados de (64) por esta expresión se obtiene:

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i W(v_i, \bar{v}_i)\right) = \sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j W(v_i, \bar{v}_j),$$

esto es,

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i W(v_i, \bar{v}_i)\right) - \sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j W(v_i, \bar{v}_j) = 0.$$

Reescribiendo esta última ecuación se llega a:

$$\sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j \big(W(v_i, \bar{v}_i) + W(v_j, \bar{v}_j) - W(v_i, \bar{v}_j) - W(v_j, \bar{v}_i)\big) = 0.$$

Por propiedades de los determinantes se deduce:

$$\sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j W(v_i - v_j, \bar{v}_i - \bar{v}_j) = 0,$$

ecuación que coincide con (63).

Sea θ una transformación definida sobre el espacio vectorial de pares de entropía flujo con valores en $\mathbb{R}^8$ dada por:

$$\theta(\eta, q) = (\eta(A_1), ..., \eta(A_4), q(A_1), ..., q(A_4)).$$

Sea X la imagen de θ. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^8$ con $x \in \mathbb{R}^4$, $y \in \mathbb{R}^4$ y f es la forma bilineal definida sobre $\mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8$ por

$$f\big((x,y),(\bar{x},\bar{y})\big) = \sum_{i,j=1}^{4} \varepsilon_i \varepsilon_j \{(x_i - x_j)(\bar{y}_i - \bar{y}_j) - (\bar{x}_i - \bar{x}_j)(y_i - y_j)\}$$

resulta que f es antisimétrica y la dimensión del núcleo de f es 2. Al respecto, sean

$$T : \mathbb{R}^8 \to (\mathbb{R}^2)^{16}$$

con

$$T(x,y) = \{(x_i - x_j, y_i - y_j)\}_{i,j=1}^{4}$$

y

$$A : (\mathbb{R}^2)^{16} \to (\mathbb{R}^2)^{16}$$

un isomorfismo dado por:

$$A\{(a_{ij}, b_{ij})\}_{i,j} = \{\varepsilon_i \varepsilon_j (-b_{ij}, a_{ij})\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
f((x,y),(\bar{x},\bar{y})) &= \sum_{i,j=1}^{4} \varepsilon_i \varepsilon_j \{(x_i - x_j)(\bar{y}_i - \bar{y}_j) - (\bar{x}_i - \bar{x}_j)(y_i - y_j)\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{4} \{\varepsilon_i \varepsilon_j (x_i - x_j)(\bar{y}_i - \bar{y}_j) + \varepsilon_i \varepsilon_j (-(y_i - y_j))(\bar{x}_i - \bar{x}_j)\} \\
&= \langle \{\varepsilon_i \varepsilon_j [-(y_i - y_j), (x_i - x_j)]\}_{1,j=1}^{4}, \{(\bar{x}_i - \bar{x}_j), (\bar{y}_i - \bar{y}_j)\}_{1,j=1}^{4} \rangle \\
&= \langle A\{(x_i - x_j), (y_i - y_j)\}_{i,j=1}^{4}, T(\bar{x}, \bar{y}) \rangle = \langle AT(x,y), T(\bar{x}, \bar{y}) \rangle, \quad (65)
\end{aligned}$$

donde $\langle , \rangle$ es el producto escalar canónico de $(\mathbb{R}^2)^{16} \cong \mathbb{R}^{32}$. Según (65) se concluye

$$N(f) = N(T^* AT).$$

Si z es tal que $T^* AT(z) = 0$, entonces $\langle AT(z), T(w) \rangle = 0$, $\forall w \in \mathbb{R}^8$.

Como A es uno a uno sobre la imagen de T, se tiene que $AT(z) = \mu \in \operatorname{Imag} T$. Luego $\langle \mu, T(w) \rangle = 0$, $\forall w \in \mathbb{R}^8$, es decir, $\langle \mu, \iota \rangle = 0$, $\forall \iota \in \operatorname{Imag} T$. Por consiguiente, $\mu = 0$, de lo cual se obtiene $AT(z) = 0$. Por el hecho de que A es inyectiva, se sigue que $T(z) = 0$,esto es, $z \in N(T)$. Este razonamiento permite concluir lo siguiente:

$$f((x,y),(\bar{x},\bar{y})) = 0 \ \ \forall \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^8 \text{ si y sólo si } (\bar{x},\bar{y}) \in \text{ núcleo de } T.$$

Por tanto, $N(T) = N(f)$. Entonces

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^8 | T(x,y) = \{(0,0)\}_{1,j=1}^4\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^8 | \{(x_i - x_j),(y_i - y_j)\}_{i,j=1}^4 = \{(0,0)\}_{1,j=1}^4\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4) | x_1 = x_2 = x_3 = x_4; \ \ y_1 = y_2 = y_3 = y_4\} \\ &= \{(x_1,x_1,x_1,x_1,y_1,y_1,y_1,y_1) | x_1, y_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,1,1,1,0,0,0,0) + y_1(0,0,0,0,1,1,1,1) \ \ | x_1, y_1 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \tag{66}$$

Así $\operatorname{Dim} N(f) = 2$, o lo que es equivalente, rango de $f = 6$.

Nótese por otra parte que si $(x,y),(\bar{x},\bar{y}) \ \in X$, existen, (η,q), $(\tilde{\eta},\tilde{q})$ dos pares de entropía flujo tales que

$$\theta(\eta,q) = (\eta(A_1),...,\eta(A_4),q(A_1),...,q(A_4)) = (x,y),$$

$$\theta(\tilde{\eta},\tilde{q}) = (\tilde{\eta}(A_1),...,\tilde{\eta}(A_4),q(A_1),...,\tilde{q}(A_4)) = (\bar{x},\bar{y}).$$

Así

$$\begin{aligned} f\big((x,y),(\bar{x},\bar{y})\big) &= \sum_{i,j=1}^{4} \varepsilon_i \varepsilon_j \{(x_i - x_j)(\bar{y}_i - \bar{y}_j) - (\bar{x}_i - \bar{x}_j)(y_i - y_j)\} \\ &= \sum_{i,j=1}^{4} \varepsilon_i \varepsilon_j \{(\eta(A_i) - \eta(A_j))(\bar{q}(A_i) - \bar{q}(A_j)) \\ &\qquad - (\bar{\eta}(A_i) - \bar{\eta}(A_j))(q(A_i) - q(A_j))\} = 0 \text{ (por (63))}. \end{aligned}$$

De lo cual se concluye $f(X \times X) = 0$. Sea

$$B = T^* A T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$$

por (65), $N(B) = N(f)$. Por el teorema de la dimensión en los espacios vectoriales de dimensión finita,

$$\dim N(B) + \dim B(\mathbb{R}^8) = 8.$$

Considerando B restringida a X se sigue que

$$\dim N(B_X) + \dim B(X) = \dim X.$$

Así $\dim B(X) = \dim X - \dim N(B_X) \geq \dim X - 2$.

Por consiguiente, dado que $BX \subset X^{\perp}$ tenemos

$$\dim BX \leq 8 - \dim X.$$

Luego

$$\dim X - 2 \leq 8 - \dim X,$$

es decir, $\dim X \leq 5$

Ahora dado $l \in \{1,2,3,4\}$, si se consideran las formas lineales

$$(\eta, q) \to \eta(A_i)$$

$$(\eta, q) \to q(A_i)$$

con $i \neq l$. Como $\dim X \leq 5$, se tiene que estas formas lineales son linealmente dependientes en X^*. Existen constantes no nulas $a_{i,l}, b_{i,l}$ $i \neq l$, tales que

$$\sum_{i \neq l} (a_{i,l} q(A_i) + b_{i,l} \eta(A_i)) = 0 \qquad 1 \leq l \leq 4 \quad \forall (\eta, q). \tag{67}$$

Si se considera un par de entropía flujo de tipo este con límite α^-, entonces

$$\eta(A_1) = q(A_1) = \eta(A_2) = q(A_2) = 0.$$

Para $l = 4$ de (67) se obtiene:

$$a_{34} q(A_3) + b_{34} \eta(A_3) = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} b_{34}\eta(A_3) &= -a_{34}q(A_3) \\ &= -a_{34}\int_{A_1}^{A_3} \frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha \\ &= -a_{34}\int_{A_1}^{A_3} \lambda_1 \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Haciendo, $u = \lambda_1 \; dv = \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} d\alpha$ se llega a:

$$b_{34}\eta(A_3) + a_{34}\lambda_1(A_3)\eta(A_3) - a_{34}\lambda_1(A_1)\eta(A_1) = a_{34}\int_{A_1}^{A_3} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}\eta d\alpha.$$

Luego

$$[b_{34} + a_{34}\lambda_1(A_3)]\eta(A_3) = a_{34}\int_{A_1}^{A_3} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}\eta d\alpha.$$

Como la restricción de η a A_1A_3 es arbitraria, del hecho de que $\eta(A_1) = 0$, se sigue que:

$$\begin{aligned} & a_{34}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} = 0 \qquad \text{en } A_1A_3 \\ & b_{34} + a_{34}\lambda_1(A_3) = 0. \end{aligned} \tag{68}$$

Análogamente usando un par entropía norte y límite β^- se obtiene:

$$\begin{aligned} & a_{24}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \beta} = 0 \qquad \text{en } A_1A_2 \\ & b_{24} + a_{24}\lambda_2(A_2) = 0 \end{aligned} \tag{69}$$

supóngase que $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} \neq 0$ sobre A_1A_3 y $\frac{\partial \lambda_2}{\partial \beta} \neq 0$ sobre A_1A_2, así por (68) y (69) se tiene:

$$a_{34} = a_{24} = 0 \;, \quad b_{24} = b_{34} = 0$$

y de (67), se deduce:

$$a_{14}q(A_1) + b_{14}\eta(A_1) = 0,$$

para todo par entropía flujo, entonces para η y q constantes se satisface

$$a_{14} = b_{14} = 0$$

lo que contradice el hecho de que por lo menos uno de los $b_{il} \neq 0$. Por consiguiente $\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha} = 0$ sobre A_1A_3 o $\dfrac{\partial\lambda_2}{\partial\beta} = 0$ sobre A_1A_2. ☑

El corolario (2) y la proposición (3,4) permiten concluir que la medida v está concentrada en a lo sumo 3 vértices del rectángulo R.

Se demuestra en [13] que la relación (63) es equivalente a la siguiente, lo cual es de gran utilidad para deducir que la medida v es puntual.

$$\sum_{i=1}^{4}(\varepsilon_i - \varepsilon_i^2)(\eta(A_i)\widetilde{q}(A_i) - \widetilde{\eta}(A_i)q(A_i)) \\ = \sum_{i,j=1} \varepsilon_i\varepsilon_j(\eta(A_i)\widetilde{q}(A_i) - \widetilde{\eta}(A_i)q(A_i)). \quad (70)$$

Si $v(A_i) = 0$ para $i \neq 3$ entonces $\operatorname{supp} v \subset \{A_j, A_p, A_3\}$, con $j, p = 1, 2, 4$, $j \neq p$. Para fijar ideas, se puede suponer que

$$\operatorname{supp} v \subset \{A_1, A_2, A_3\}\ .$$

Si $(\eta, q)(\widetilde{\eta}, \widetilde{q})$, son dos pares de entropía flujo este con límite α^- y datos sobre la recta $\beta = \beta^-$ tales que $\eta(A_3)\widetilde{q}(A_3) - \widetilde{\eta}(A_3)q(A_3) \neq 0$, utilizando la relación (70) se tiene:

$$(\varepsilon_3 - \varepsilon_3^2)(\eta(A_3)\widetilde{q}(A_3) - \widetilde{\eta}(A_3)q(A_3)) = 0,$$

de donde $\varepsilon_3 = 0$ o $\varepsilon_3 = 1$. Si $\varepsilon_3 = 1$, v está concentrada únicamente en A_3, y por tanto, v es una medida de Dirac. Si $\varepsilon_3 = 0$, v está concentrada en A_1 y A_2. En este último caso, considerando dos pares de entropía flujo de tipo norte $(\eta, q), (\widetilde{\eta}, \widetilde{q})$ con límite β^- y datos sobre la recta $\alpha = \alpha^-$ tales que

$$\eta(A_2)\widetilde{q}(A_2) - \widetilde{\eta}(A_2)q(A_2) \neq 0,$$

nuevamente por (70) se sigue:

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2)(\eta(A_2)\widetilde{q}(A_2) - \widetilde{\eta}(A_2)q(A_2)) = 0,$$

de lo cual se concluye que: $\varepsilon_2 = 0$ o $\varepsilon_2 = 1$. En cualquier situación se llega a que v es una medida de Dirac.

De otra parte, si $v(A_3) = 0$ y $A_3 = (0, 0)$ para probar que v es una medida de Dirac se razona de la siguiente forma: Sea (η_0, q_0) un par de entropía flujo de tipo oeste y límite $\bar{\alpha} \in (\alpha^-, \alpha^+)$ y datos en $\beta = 0$ de tal modo que $\eta_0(A_1) = q_0(A_1) = 0$. Esto implica que

$$\int_{\alpha^-}^{\bar{\alpha}} \theta_1(t) \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}(t, 0) dt = 0 \qquad \theta_1(\alpha^-) = 0,$$

siendo θ_1 el dato sobre $\beta = 0$.

De la misma forma, escogiendo un par entropía flujo de tipo norte (η_N, q_N) de límite $\bar{\beta} \in (\beta^-, \beta^+)$ y datos en $\alpha = 0$ tal que $\eta_N(A_4) = q_N(A_4) = 0$, es decir

$$\int_{\bar{\beta}}^{\beta^+} \theta_2(t) \frac{\partial \lambda_2}{\partial \beta}(t, 0) dt = 0, \qquad \theta_2(\beta^+) = 0,$$

donde θ_2 es el dato sobre $\alpha = 0$.

Si además se impone que

$$\eta_0(A_2) = q_N(A_2) = 1, \qquad\qquad \eta_N(A_2) = 0,$$

esto implica:

$$\int_{\alpha^-}^{\bar{\alpha}} J(t, A_2) \theta_1(t) dt = 1,$$
$$\int_{\bar{\beta}}^{\beta^+} L(t, A_2) \theta_2(t) dt = 1,$$
$$\int_{\bar{\beta}}^{\beta^+} J(t, A_2) \theta_2(t) dt = 0.$$

Como las funciones

$$\{J(., A_2), \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}(., 0)\} \ ,$$
$$\{J(., A_2), L(., A_2), \frac{\partial \lambda_2}{\partial \beta}(0, .)\}$$

son linealmente independientes, entonces se pueden escoger el par de entropías (η_0, q_0), (η_N, q_N) con las condiciones anteriores. De esta forma, según (70) se obtiene:

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2)(\eta_0(A_2)q_N(A_2) - \eta_N(A_2)q_0(A_2)) = 0.$$

Así $\varepsilon_2 = 0$ o $\varepsilon_2 = 1$. Si $\varepsilon_2 = 1$, v está concentrada en A_2, y si $\varepsilon_2 = 0$, entonces $\operatorname{supp} v \subset \{A_1, A_4\}$; en este caso, se muestra que v está concentrada en un único punto A_1 o A_4. En efecto, sean (η, q), $(\widetilde{\eta}, \widetilde{q})$ dos pares de entropía flujo de tipo oeste con límite $\bar{\alpha} > \alpha^-$ y datos en la recta $\beta = 0$ con las condiciones:

$$\int_{\alpha^-}^{\bar{\alpha}} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} \theta_1(t)dt = 0, \qquad \theta_1(\alpha^-) = 1,$$

$$\int_{\alpha^-}^{\bar{\alpha}} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} \widetilde{\theta}_1(t)dt = 0, \qquad \widetilde{\theta}_1(\alpha^-) = 0,$$

siendo θ_1 el dato para η y $\widetilde{\theta}_1$ el dato para $\widetilde{\eta}$. Con estos hechos se tiene entonces

$$\eta(A_1)\widetilde{q}(A_1) - \widetilde{\eta}(A_1)q(A_1) = 1.$$

Por (70) se sigue: $\varepsilon_1 = 0$ o $\varepsilon_1 = 1$. En ambos casos se concluye que v es una medida de Dirac.

Como consecuencia final se tiene el siguiente teorema, el cual fue demostrado en [5]:

Teorema 3.15. *Sea $\gamma \in [1, 2)$ y $z_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $z_0 \in L^2 \cap L^\infty$ y*

$$k\frac{\pi}{\gamma + 1} \leq \arg(z_0(x)) \leq (k+1)\frac{\pi}{\gamma + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces la familia $\{z^\epsilon\}_{\epsilon \geq 0}$ de soluciones del problema (2) contiene una sucesión que converge débilmente para una solución débil del sistema (1). ☑

Referencias

[1] Adams, Robert A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] ABUABARA, TEÓFILO & LESMES, JAIME. *Elementos de Análisis Funcional.* Universidade do Estado de São Pablo (Brasil), Universidad de los Andes (Colombia). 1985.

[3] AMAYA, EDILMA ISABEL. *Un Sistema* 2×2 *no estrictamente hiperbólico.* Tesis de Maestría, Universidad Nacional, Bogotá, 1999.

[4] DIPERNA, R. J. *Convergence of approximate solutions of conservation laws.* Arch. Rat. Mech. Anal. **82** (1983), 27-70.

[5] DOS SANTOS, MARCELO M. *Sistemas* 2×2 *no estrictámente hiperbólicos : O problema de Cauchy.* Tesis, Impa. Rio de Janeiro, 1991.

[6] EVANS, L. C. *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations.* CBMS Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1990.

[7] FRID, HERMANO. *Compacidade Compensada aplicada as leis de conservaão* . 19 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1993.

[8] FRID, HERMANO & DOS SANTOS, MARCELO M. *The Cauchy Problem for the Systems* $\partial_t z - \partial_x(\overline{z}^\gamma) = 0$. Journal of Differential Equations III (1994), 340-359.

[9] HOFF, D. & SMOLLER, J. *Global existence for systems of parabolic conservation laws in several space variables*, J. Diff. Eq. 68 (1987), 210-220.

[10] IÓRIO JÚNIOR, RAFAEL & DE MAGALHÁES IÓRIO, VALÉRIA. *Equaãoes Diferenciais Parciais:Uma Introduão*, Impa, Rio de Janeiro, 1988.

[11] KESAVAN, S. *Functional Analysis and Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[12] SCHONBEK, MARIA ELENA. *Convergence of Solutions to Nonlinear Dispersive Equations.* Comm. in Partial Differential Equations, **7**(8) (19829, 959-1000.

[13] SERRE, D. *La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques nonlineaires de deux équations à une dimension d'espace.* J. Math. Pures App., **65** (1986), 423-468.

[14] SMOLLER, JOEL. *Shock Waves and reaction-diffusion equations.* Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[15] TARTAR, L. *Compensated Compactness and aplications to partial differential equations.* Research notes in mathematics, nonlinear analysis and mechanics. Heriot-Watt Simposium, Vol 4, ed. R. J. Knops, New York, Pitmann Press, 1979.

[16] VEKUA, I. N. *New Methods for solving elliptic equations.* North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1968.