Lecturas Matemáticas
Volumen **20** *(1999), páginas 35-37*

Un teorema de la geometría del círculo

W. Reyes

Universidad de Bío-Bío
Chillán, Chile

Abstract. Our purpose in this note is to state and prove a theorem in circle geometry.

*Key words and phrases.*Circle geometry, projective geometry

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 51K05.

Resumen. Nuestro propósito es establecer un teorema en la geometría del círculo.

En el presente trabajo nos proponemos ofrecer una breve demostración de un teorema relativo a ciertos círculos ligados a un triángulo. Para más detalles sobre éste y otros temas, el lector podrá consultar las referencias.

Teorema. *Sea O el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC y sean E, F y G, respectivamente, las intersecciones de las tangentes en C y A, en A y B, en B y C. Para un punto X de la simetral OE, distinto de E y de O, sean $Y = XA \cap OF$, $Z = YB \cap OG$, $X' = ZC \cap OE$, $Y' = X'A \cap OF$, $Z' = Y'B \cap OG$. Bajo las anteriores condiciones la homografía*

$$X \to Y \to Z \to X'$$

es una involución sobre la recta ampliada OE.

Demostración. (Véase la figura 1) Es claro que O y E son los puntos fijos, únicos pues la homografía no es la identidad. De la invariancia de la razón anarmónica por proyección se desprende:

$$(OE, XX') =_A (OF, YY') =_B (OG : ZZ') =_C (OE, X'X) \ .$$

De aquí se tiene además: $(OE, XX')^2 = 1$, pues $(OE, XX') = (OE, X'X)^{-1}$. Por consiguiente, $(OE, XX') = -1$, ya que si $X \neq X'$, $(OE, XX') \neq 1$. Así, X y X' son conjugados armónicos con respecto a O y a E. Si $X'' = (X')'$, $X = X''$, puesto que:

$$\begin{aligned} -1 &= (OE, XX') = (OE, XX')' = (OE, X'X'') \\ &= (OE, X'', X')^{-1} = (OE, X''X') \ . \end{aligned}$$

Figura 1

Lo que termina la demostración. ☑

Nota 1. A partir de la figura se demuestra con entera facilidad la siguiente identidad entre ángulos:

$$XAE = YAF = YBF = ZBC = ZCG = X'CE = X'AE \ .$$

Esta identidad muestra que AE y OA son las bisectrices interna y externa del ángulo XAX', por lo tantp, ahora en virtud del Teorema de Apolonio, X y X' dividen armónicamente al segmento OE.

Nota 2. Denotando también con X al círculo de centro X que pasa por los puntos C y A, análogamente para los círculos Y, Z, X', Y', Z', tenemos que estos círculos safisfacen las relaciones:

$$X \cap X' = \{C.A\} \ , \quad Y \cap Y' = \{A, B\} \ , \quad Z \cap Z' = \{B, C\},$$

$$X \cap Y = X' \cap Y' = A \ , \quad Y \cap Z = Y' \cap Z' = C \ , \quad Z \cap X' = C \ .$$

Según el Teorema, si existe un séptimo círculo, X'', de suerte que $Z' \cap X'' = C$, entonces X'' coincide con X.

Nota 3. Merece quizá la pena recordar una proposición análoga de la geometría elemental que en parte ha sugerido las consideraciones anteriores. Si X es un punto coplanario con el triángulo ABC, si Y es el simétrico de X con respecto al vértice A, si Z es el simétrico de Y con respecto a B, si X' es el simétrico de Z con respecto a C, entonces $X \to Y \to Z \to X'$ es una involución, por ser una simetría con respecto al punto $A - B + C$.

Referencias

1. K. Post, *A Frechman's Proof in Circle Geometry*, Nieuw Archief voor Wiskunde (1997).
2. W. Reyes, *On a Theorem in Circle Geometry*, Nieuw Archief voor Wiskunde (1996).
3. D. Zagier, *A note on Reyes' Theorem about Triangles*, Nieuw Archief voor Wiskunde (1996).

Recibido en febrero, 1999

Departamento de Matemáticas,
Universidad de Bío - Bío,
Chillán, Chile