This is a reprint of the paper
Productos de Hadamard de series de polinomios ortogonales clásicos
by Miguel A. Dumett
published in **Lecturas Matemáticas**
16 (1995) pp. 37–61

PRODUCTOS DE HADAMARD DE SERIES DE POLINOMIOS ORTOGONALES CLÁSICOS

Miguel A. Dumett

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Abstract. We study different properties of Orthogonal Polinomial Series : convergence sets, derivatives and operations among them, one of wich is the Hadamard product. For this product we determine the form of the singularities from the singularities of the component series and in the case of entire functions we relate their order and type with the orders and types of the component series.

Key words and phrases. Hadamard products, orthogonal polynomial series, convergence sets, singularities, order and type of entire functions.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 32A05. Secondary 42C05, 33C45, 33D45, 32A15.

Resumen. Se estudian diversas propiedades de las Series de Polinomios Ortogonales: conjuntos de convergencia, derivadas y operaciones entre ellas, una de las cuales es el producto de Hadamard. Para este producto se determina la forma de las singularidades a partir de las singularidades de las series componentes y en el caso de las funciones enteras se relacionan su orden y tipo con los órdenes y tipos de las series componentes.

Introducción

Este trabajo fue motivado por la lectura *The Hadamard product of Legendre Series* [8], en el cual se da el conjunto de convergencia de una serie de polinomios de Legendre y se estudia la relación que existe entre las singularidades, órdenes y tipos de los productos de Hadamard de dichas series. Aquí generalizamos a una familia de polinomios ortogonales clásicos, los resultados del artículo anterior referentes a conjuntos de convergencia, singularidades, orden y tipo de productos de Hadamard.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Comenzaremos por establecer el conjunto de convergencia de una serie de polinomios ortogonales. También describiremos el conjunto de convergencia de las series obtenidas mediante las operaciones básicas (suma, producto y cociente) y el de la derivada de una serie.

Un segundo problema será construir el producto de Hadamard de dos series de polinomios ortogonales y determinar su conjunto de convergencia. Además, se determinarán las singularidades de este producto y su relación con las singularidades de las series componentes.

Finalmente, estudiaremos aquellas series de polinomios ortogonales que son funciones analíticas enteras, y determinaremos la relación que existe entre el orden y el tipo de un producto de Hadamard de dichas series y el orden y tipo de las series componentes.

Una serie de polinomios ortogonales es una funcion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$, de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z), \qquad z \in U \tag{1}$$

donde $\{Q_n(z)\}_{n\geq -1}$ es una familia de polinomios ortogonales con respecto a una medida positiva absolutamente continua $w(x)\ dx$ en un intervalo cerrado $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$. La ortogonalidad de $\{Q_n(z)\}_{n\geq -1}$ significa que, para todo $n \geq 0$

$$\int_a^b w(x) Q_n(x) Q_m(x)\ dx = g_n \delta_{mn}, \quad g_n > 0\,, \tag{2}$$

donde δ_{mn} se anula si $m \neq n$ y es igual a 1 si $m = n$. Usualmente $\{Q_n(z)\}_{n\geq -1}$ se define por medio de una ley de recurrencia que relaciona Q_{n+1} con Q_n y Q_{n-1}, $n \geq 0$, y las condiciones iniciales $Q_{-1} = 0$ y $Q_0 = 1$.

1. Conjuntos de convergencia

Considerese el problema de valores propios

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y + \lambda y = 0$$

donde $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ son polinomios (sin ninguna consideración acerca de sus grados). Es posible demostrar que si se desea que para cada entero $n \geq 0$ exista un valor propio $\lambda = \lambda_n$ una de cuyas funciones propias sea un polinomio de grado n, entonces $a_0(x)$ será una constante, $a_1(x)$ será un polinomio de grado uno y $a_2(x)$ tendrá grado dos. Es posible demostrar además que todos los sistemas de polinomios ortogonales positivamente-definidos (en el sentido de (2)) que verifican la anterior condición se reducen por un cambio lineal de la variable independiente a un sistema de Jacobi, Laguerre o Hermite (ver Chihara [4]). Otras caracterizaciones de estos sistemas (denominados clásicos) pueden encontrarse en Chihara [4]. Determinaremos los conjuntos de convergencia de las series de polinomios de estos sistemas usando el criterio del cociente.

Para una serie (1), deberemos examinar entonces los valores z tales que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)}\right|<1. \tag{3}$$

En general supondremos la existencia del límite

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L \tag{4}$$

y examinaremos independientemente la de

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)}=M \tag{5}$$

o de un cociente parecido (para el caso de Hermite). Como es claro, M en (4) es en general una función de z, y estaremos interesados en aquellos valores de esta variable para los cuales la serie converge. Es decir, aquellos valores de z para los cuales

$$L\,|M|<1 \quad \text{o, equivalentemente,} \quad |M|<\frac{1}{L}.$$

Denominaremos lemniscatas a tales conjuntos de convergencia (ver Hille [5]). Veremos que estas lemniscatas tienen formas conocidas que no son, en general, discos.

Comenzaremos por la familia de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}$, la cual tiene muchos subsistemas como casos particulares : Legendre $\alpha=0$, $\beta=0$; Gegenbauer $\alpha=\beta$; etc. Otros, como las familias de Chebychev de primera y segunda clase, y los ultraesféricos, se definen también a partir de la familia de Jacobi.

La relación de recurrencia de tres términos para esta familia es (Lebedev [2], Rainville [3], Whittaker & Watson [1]) :

$$\begin{aligned}
&2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)\,P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(z)=\\
&\qquad(\alpha+\beta+2n+1)[\alpha^2-\beta^2+z(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n)]\,P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\\
&\qquad-2(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z)\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ahora, del comportamiento asintótico de los polinomios $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}$ (Chihara [4]) se deduce que el límite en (5) existe y que $M\neq 0$ para $z\in\mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Dividiendo (6) por $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ y haciendo $n\to\infty$ se obtiene que

$$M=2z-\frac{1}{M}\,, \tag{7}$$

o, equivalentemente, que $M^2-2z\,M+1=0$, de donde $M=z+\sqrt{z^2-1}$. Denotamos con $\sqrt{z^2-1}$ la raíz cuadrada de z^2-1 que se comporta como z cuando $z\to\infty$, la cual es analítica en $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Entonces $|M|>1$ para $z\notin[-1,1]$ y $M<-1$ si y sólo si $z<-1$.

Dado que $M\neq 0$, podemos hacer $M=e^N$, con

$$N = \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) = \operatorname{arccosh} z \qquad |z| > 1. \tag{8}$$

Si en (8) hacemos $z = \cos w$ entonces

$$N = \operatorname{Log}(\cos w + i \operatorname{sen} w) = i\, w\,.$$

Para obtener la frontera de la lemniscata se resuelve

$$|e^{i\,w}| = \frac{1}{L},$$

así que $w = s + i\, \log L, \quad s \in \mathbb{R}$, y w está sobre la recta horizontal $y = \log L$. Para encontrar los z que son llevados por arccos sobre la recta $s + i\, \log L$, observamos que

$$\begin{aligned} \cos(s + i\, \log L) &= \frac{e^{i\,s} e^{-\,\log L} + e^{-\,i\,s} e^{\log L}}{2} \\ &= \cos s\, \cosh(-\,\log L) + i \operatorname{sen} s\, \operatorname{senh}(-\,\log L) = z\,. \end{aligned}$$

Así, z está sobre la elipse centrada en el origen y con focos en ± 1 , pues si

$$a = \cosh(-\,\log L) = \frac{1}{2}(L + \frac{1}{L})$$

y

$$b = |\operatorname{senh}(-\,\log L)| = \frac{1}{2}|L - \frac{1}{L}|$$

entonces

$$\frac{(\cos s\, \cosh(\log L))^2}{\cosh^2(\log L)} + \frac{(\operatorname{sen} s\, \operatorname{senh}(\log L))^2}{\operatorname{senh}^2(\log L)} = 1.$$

Nótese que cuando $L = 1$, la elipse degenera en el segmento $[-1, 1] \times \{0\}$, y (1) no es analítica en parte alguna de $\mathbb{C}$. Por ello es necesario suponer que $L \neq 1$.

Se puede demostrar que el disco unidad está contenido en la elipse de convergencia si

$$L > 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{ó} \quad 0 < L < 3 - 2\sqrt{2}\,.$$

Como los polinomios de Legendre y de Gegenbauer son casos particulares de los de Jacobi, éstos tendrán el mismo conjunto de convergencia.

A su vez, como los polinomios de Chebychev de primera clase $\{T_n\}$ y los de segunda clase $\{U_n\}$ se rigen por la misma relación de recurrencia

$$P_{n+1}(z) = 2z\, P_n(z) - P_{n-1}(z)$$

y las condiciones iniciales respectivas

$$T_o(z) = 0, \quad T_1(z) = z; \qquad U_o(z) = 0, \quad U_1(z) = 2z\,,$$

(7) vale para ambas. Esto resulta de sustituir P_n por T_n o U_n en (3), dividir por T_n o U_n y hacer $n \to \infty$ (teniendo en cuenta que M existe y es distinto de cero para $|z| > 1$). Por lo tanto, sus conjuntos de convergencia son los mismos que en el caso de Jacobi. Lo mismo es cierto para los polinomios ultraesféricos $\{C_n^\nu(z)\}$ y para los de Gegenbauer $\{P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)\}$, que son esencialmente los mismos, pues

$$C_n^\nu(z) = \frac{(2\nu)_n \, P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(z)}{(\nu+1/2)_n}$$

y

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(z) = \frac{(1+\alpha)_n \, C_n^{\alpha+1/2}(z)}{(1+2\alpha)_n}$$

donde $(c)_o = 1$ y $(c)_n = c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)$ para $n \geq 1$. De hecho para los polinomios ultraesféricos se tiene también que

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}^\nu(z)}{C_n^\nu(z)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\nu+1/2)_n \, (2\nu)_{n+1}}{(\nu+1/2)_{n+1} \, (2\nu)_n} \quad \frac{P_{n+1}^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(z)}{P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(z)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\nu+n}{\nu+1/2+n} \left(z+\sqrt{z^2+1}\right) \\ &= z+\sqrt{z^2+1}, \quad |z|>1. \end{aligned}$$

Otra familia de polinomios clásicos es la denominada de Sonine-Laguerre o, simplemente, de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}$ (el caso $\alpha = 0$ es el que se conoce realmente como el de Laguerre). Esta familia verifica la relación de recurrencia

$$(n+1)\, L_n^{(\alpha)}(z) = (2n+1+\alpha-z)\, L_n^{(\alpha)}(z) - (n+\alpha)\, L_{n-1}^{(\alpha)}(z)\,.$$

Si se calcula (5) para esta familia y luego se hace $n \to \infty$, se obtiene

$$M = 2 - \frac{1}{M},$$

de donde $M = 1$. Por lo tanto, si $L < 1$, el conjunto de convergencia es todo el plano complejo, y si $L \geq 1$, es vacío.

El último de los casos clásicos es el de la familia de Hermite $\{H_n(z)\}$, la cual verifica la relación de recurrencia

$$H_{n+1}(z) = 2z\, H_n(z) - 2n\, H_{n-1}(z)\,. \tag{9}$$

Al dividir (9) por $H_n(z)$ se llega a que

$$\frac{H_{n+1}(z)}{H_n(z)} = 2z - 2n\,\frac{H_{n-1}(z)}{H_n(z)} \tag{10}$$

y al hacer $n \to \infty$ se obtendría una contradicción si se desea que M sea finito.

Es por esta razón por lo que para los polinomios de Hermite es mejor considerar series de la forma

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\; H_n(z),$$

lo cual equivale a considerar desarrollos con respecto al sistema $Q_n(z) \;=\; \frac{1}{n!} H_n(z)$, $n \geq 0$. En este caso

$$\frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)} \;=\; \frac{H_{n+1}(z)}{(n+1)\,H_n(z)} = \frac{2z}{n+1} - \frac{2n\,H_{n-1}(z)}{(n+1)\,H_n(z)}$$

donde, al hacer $n \to \infty$, se obtiene que

$$M = 0\,.$$

Por lo tanto, el conjunto de convergencia para este caso es todo el plano complejo, cualquiera sea el valor de L (supuesto finito).

Dado que la convergencia de (1) es uniforme y absoluta en compactos de la lemniscata de convergencia en cada uno de los casos anteriormente estudiados, la función límite de la serie es continua en dicho conjunto de convergencia.

Necesitaremos el siguiente lema (Neto [7]) para demostrar un teorema análogo al Teorema de Abel de las series de potencias.

Lema. *Sean $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ y $(\beta_n)_{n\geq 0}$ sucesiones numéricas con $\beta_n \geq 0$ y $(\beta_n)_{n\geq 0}$ no decrecientes. Si existe $M > 0$ tal que*

$$|\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n| \leq M, \quad n \geq 0$$

entonces

$$|\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n| \leq (2\beta_n - \beta_0)\,M, \qquad n \geq 0\,.$$

Teorema. *(*Teorema de Abel para las series de polinomios ortogonales*). Sea*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z)$$

una serie de polinomios ortogonales y supóngase que su conjunto de convergencia A es estrellado con respecto a 0 (i.e., si $z_0 \in A, [0, z_0] \subset A$). Entonces, si $z_0 \in \partial A$ y $\sum_{n=o}^{\infty} a_n Q_n(z_o)$ converge,

$$\lim_{r\to 1} S(rz_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z_0)\,.$$

Demostración. Supóngase que

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} q_{n,k} z^k \,.$$

Como $\sum_{n=o}^{\infty} a_n Q_n(z_o)$ converge, las sumas parciales de esta serie forman una sucesión de Cauchy. Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $k_o \geq 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k Q_k(z_0) \right| < \epsilon/2, \quad m > n \geq k_o \,.$$

Por otra parte, si z_o está en la lemniscata de convergencia,

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} q_{n,k} z_0^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n q_{n,k} \right) z_0^k$$

y por lo tanto,

$$c_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n q_{n,k} \longrightarrow 0, \quad k \to \infty \,.$$

Sean $\epsilon > 0$ y $k_o \geq 0$ como arriba. Se tiene que

$$|a - S(rz_0)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n (Q_n(z_0) - Q_n(rz_0)) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} q_{n,k} z_0^k (1 - r^k) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n q_{n,k} z_0^k (1 - r^k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} z_0^k (1 - r^k) c_k \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{k_0} z_0^k (1 - r^k) c_k \right| + \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} z_0^k (1 - r^k) c_k \right|$$

y la suma en el primer término del miembro de la derecha es un polinomio $\varphi(r)$ con $\varphi(1) = 0$ (así que existe $\delta > 0$ tal que si $1 - \delta < r < 1$ entonces $|\varphi(r)| < \epsilon/2$). Reemplazando $\alpha_j = z_0^{k+j} c_{k+j}$, $\beta_j = 1 - r^{k+j}$ en el lema anterior, podemos concluir que

$$\left| \sum_{j=k}^{n+k} c_j z_0^j (1 - r^j) \right| \leq \left(2(1 - r^{k+n}) - (1 - r^k) \right) M(k,n) \leq M(k,n) \,,$$

donde

$$M(k,n) = \max \left\{ \left| \sum_{j=k}^{k+l} c_j z_0^j \right| ; l = 0, 1, \cdots, n \right\} \,,$$

de lo cual se deduce que el valor absoluto de la suma a partir del término k_0+1 es también menor que $\epsilon/2$. Entonces $|a - S(rz_o)| \leq \epsilon$ si $1-\delta < r < 1$. $\square$

2. La derivada de una serie de polinomios ortogonales

Dado que las sumas parciales de una serie de polinomios ortogonales son funciones analíticas, y dada la convergencia uniforme de éstas en compactos de la lemniscata, el límite es analítico en dichos conjuntos y además

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n'(z)\,.$$

Al igual que antes supondremos la existencia del límite

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L\,,$$

y mostraremos la existencia de

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_{n+1}'(z)}{Q_n'(z)} = M_1\,,$$

para encontrar los conjuntos de convergencia de las series de derivadas. Procederemos como en el caso de las series de polinomios ortogonales. En efecto, se observa que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_{n+1}'(z)}{Q_n'(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{Q_{n+1}'(z)}{(n+1)\,Q_{n+1}(z)}\,\frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)}\,\frac{n\,Q_n(z)}{Q_n'(z)}\,\frac{n+1}{n}$$

lo cual indica que si se establece la existencia de

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n'(z)}{n\,Q_n(z)} = N \neq 0\,, \tag{11}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_{n+1}'(z)}{Q_n'(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)} \neq 0\,.$$

Así, el conjunto de convergencia de la serie de derivadas coincidirá con el conjunto de convergencia de la serie original. Nuestro trabajo se centrará entonces en mostrar la existencia de (11) en los casos que nos interesan, y para ello utilizaremos algunas relaciones de recurrencia entre las derivadas y los miembros de la familia correspondiente de polinomios ortogonales. Dichas relaciones aparecen en Lebedev [2], Rainville [3], Whittaker & Watson [1].

Empezaremos nuevamente por la familia de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}$, debido a que ésta incluye a muchas otras como casos particulares. Así

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+2n)(z^2-1)\,\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{dz} &= n\,[\beta-\alpha+(\alpha+\beta+2n)z]\,P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\\ &\quad - 2(\alpha+n)(\beta+n)\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z)\,.\end{aligned}$$

Dividiendo entonces por $nP_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ y haciendo $n \to \infty$, se obtiene

$$N = \frac{1}{z^2-1}\left(z - \frac{1}{M}\right).$$

Por lo tanto M_1 existe en este caso.

Debido a que las familias de Chebychev de primera y segunda clase $\{T_n\}$ y $\{U_n\}$ están relacionadas con la de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}$ por medio de

$$T_n(z) = \frac{n!}{(\frac{1}{2})_n} P_n^{(-1/2,-1/2)}(z)$$

$$U_n(z) = \frac{(n+1)!}{(\frac{3}{2})_n} P_n^{(1/2,1/2)}(z)\,,$$

entonces las derivadas de T_n y U_n verificarán las mismas relaciones que las de Jacobi y para dichas familias se obtendrá que M_1 existe. Lo mismo es cierto para los polinomios ultraesféricos, lo cual se puede observar también en forma directa a partir de la relación de recurrencia

$$(z^2-1)\,\frac{dC_n^\nu(z)}{dz} = nz\,C_n^\nu(z) - (2\nu - 1 + n)\,C_{n-1}^\nu(z)\,.$$

Dividiendo por $nC_n^\nu(z)$ y haciendo $n \to \infty$, se llega, como es de esperar, a que

$$N = \frac{1}{z^2-1}\left(z - \frac{1}{M}\right).$$

Para la familia de Sonine-Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}$ tenemos que (Rainville [3])

$$z\frac{dL_n^{(\alpha)}(z)}{dz} = n\,L_n^{(\alpha)}(z) - (\alpha+n)\,L_{n-1}^{(\alpha)}(z)\,.$$

Dividiendo por $nL_n^{(\alpha)}(z)$ y haciendo $n \to \infty$ se encuentra que

$$N = \frac{1}{z} - \frac{1}{M}$$

y por lo tanto M_1 existe.

Para la familia de Hermite $\{H_n(z)\}$ usaremos que (Rainville [3])

$$\frac{dH_n(z)}{dz} = 2n\,H_{n-1}(z)\,.$$

Dividiendo por $nH_n(z)$ y haciendo que $n \to \infty$ se obtiene que

$$N = \frac{2}{M}.$$

3. Operaciones con series de polinomios ortogonales

Dadas dos series de polinomios ortogonales

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z) \quad \text{y} \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Q_n(z)$$

la suma (y diferencia) de S y T están dadas por

$$S \pm T = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)\, Q_n(z)\,.$$

Debido a que las lemniscatas de convergencia en los casos clásicos son conjuntos que dependen de un parámetro $M > 0$, $S \pm T$ tendrá una lemniscata de convergencia cuyo parámetro garantice que al menos la menor de las lemniscatas de S o de T está dentro del conjunto de convergencia de $S \pm T$.

En el caso de la familia de Jacobi (que incluye la de los ultraesféricos y las familias de Chebychev de primera y segunda clase) no es cierto que a mayor L corresponde un mayor conjunto de convergencia. Tampoco es cierto lo recíproco.

Es posible definir el producto por

$$S \cdot T = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i Q_i(z) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j Q_j(z) \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j Q_i(z) Q_j(z)\,.$$

Debido a que hay un polinomio de cada grado en cualquier familia $\{Q_n(z)\}$ de polinomios ortogonales, se tiene que

$$Q_i(z)\, Q_j(z) = \sum_{k=0}^{i+j} c_{i,j,k} Q_k(z) \tag{12}$$

así que

$$S \cdot T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j \geq n} a_i b_j c_{i,j,n} \right) Q_n(z) \tag{13}$$

en su conjunto de convergencia.

Como en cada compacto de dicho conjunto la convergencia es absoluta, entonces

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j Q_i(z)\, Q_j(z) \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_i\, Q_i(z)|\, |b_j\, Q_j(z)|$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i\, Q_i(z)| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j\, Q_j(z)| \right)$$

así que el conjunto de convergencia del producto $S \cdot T$ es por lo menos el menor de los conjuntos de convergencia de S y T.

Dada S, nos interesa definir la serie inversa T, es decir $T = \dfrac{1}{S}$. Si estamos interesados en que la serie inversa converja por lo menos en un punto a del conjunto de convergencia de S, será necesario garantizar que $S(a) \neq 0$, y existirá una vecindad alrededor de a en la cual la serie S es no nula. Por lo tanto la serie inversa será continua y acotada en dicha vecindad.

Dada

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z)$$

encontrar

$$T = \frac{1}{S} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Q_n(z)$$

es lo mismo que resolver

$$S \cdot T = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j \geq n} a_i b_j c_{i,j,n} \right) Q_n(z)$$

con los $c_{i,j,n}$ dados como en (12). Se debe entonces a resolver $Ab = e_1$, donde $b = [b_i]$ es un vector de infinitas coordenadas, $e_1 = (1, 0, 0, \cdots)^T$ y $A = [\alpha_{mn}]$ es una matriz cuadrada infinita con

$$\alpha_{mn} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i d_{i,m,n}$$

y

$$d_{i,m,n} = \begin{cases} c_{i,m,n}, & \text{cuando } i + j \geq k \\ 0, & \text{cuando } i + j < k \,. \end{cases}$$

Debido a que

$$S \cdot T = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j Q_i(z) Q_j(z)$$

converge absolutamente en una vecindad de a y dado que tanto S como T también convergen absolutamente en dicha vecindad, se tiene que

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j Q_i(z) Q_j(z) \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_i||b_j||Q_i(z) Q_j(z)|$$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) \left(\sum_{i,j \geq 0} |Q_i(z)\, Q_j(z)| \right)$$

en donde los dos primeros términos están acotados. Suponiendo entonces que

$$\sum_{i,j\geq 0} |Q_i(z)||Q_j(z)|$$

esté acotada en la vecindad antes mencionada, se concluye que

$$\sum_{i,j\geq 0} |c_{i,j,n}|, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

y por lo tanto

$$\sum_{i,j\geq 0} |d_{i,j,n}|, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

convergen (suponiendo la validez de (4), lo que hemos establecido para las familias de polinomios ortogonales clásicos).

De esa manera, debido a que A en el sistema anterior puede ser expresada como $A = \vec{a} \cdot \vec{f}_{m,n}$, donde $\cdot$ indica el producto interno usual y $f_{m,n} = (d_{0,m,n}, d_{1,m,n}, \cdots)^T$. Entonces

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\vec{a} \cdot \vec{f}_{m,n}|^2 \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} |d_{i,m,n}|^2 \right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} |d_{i,m,n}|^2 \right)$$

en donde cada término del producto converge, así que $\sum\limits_{m=0}^{\infty} |\vec{a} \cdot \vec{f}_{m,n}|^2$ converge. Análogamente es posible probar que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\vec{a} \cdot \vec{f}_{m,n}|^2$ converge.

Debido a la convergencia de estas dos últimas series, se concluye que A es una matriz acotada (vista como forma bilineal en l^2, ver Wall [9], cap. XII).

Suponiendo la existencia de una matriz acotada B, inversa a derecha de A, es decir, tal que $AB = I$, es posible garantizar la existencia de por lo menos una solución del sistema anterior. Si además de la existencia de dicha B existe una matriz acotada C, inversa a izquierda de A, es decir, tal que $CA = I$, dicho sistema poseerá a lo sumo una solución. De esta manera, existirá solución única (ver Wall [9], cap. XII).

Considerando lo anterior, la serie T tendrá un conjunto de convergencia que será una vecindad de a, y la igualdad $T = \frac{1}{S}$ valdrá en la intersección de ésta con los conjuntos de convergencia de S y T.

Para encontrar el cociente de S y T se puede recurrir a $\dfrac{T}{S} = T \cdot \left(\dfrac{1}{S}\right)$. Haciendo las consideraciones anteriores para la existencia del inverso, se puede demostrar que el conjunto de convergencia de $\dfrac{T}{S}$ será la intersección de los conjuntos de convergencia de T, S y $\dfrac{1}{S}$.

Un producto más simple de calcular que el producto usual es el denominado producto de Hadamard. Dadas dos series de potencias

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

con radios de convergencia R_1 y R_2 respectivamente, se define el producto de Hadamard de φ y ψ por

$$(\varphi * \psi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \,. \tag{14}$$

Fácilmente se verifica que

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n b_n|^{1/n} \leq (\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n})(\limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n}) = \frac{1}{R_1 R_2}\,.$$

Por lo tanto, el radio de convergencia de (13) es $R \geq R_1 R_2$, y la serie (14) representará una función analítica en $|z| \leq R$.

Ahora extenderemos dichas definiciones a las series de polinomios ortogonales. Dadas dos series de polinomios ortogonales

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z) \qquad \text{y} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Q_n(z) \tag{15}$$

se define el producto de Hadamard como

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n Q_n(z). \tag{16}$$

4. Singularidades de productos de Hadamard de series de polinomios ortogonales

Existe un resultado importante acerca de las singularidades del producto de Hadamard para series de potencias, según el cual

Teorema. *Si $\varphi(z)$ tiene radio de convergencia R_1 con singularidades de ξ_1, ξ_2, ξ_3, $\cdots$ sobre éste y $\psi(z)$ con radio R_2, con singularidades en $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \cdots$, y si $\varphi * \psi$ tiene singularidades sobre $|z| = R_1 R_2$, éstas están entre los productos $\xi_m \eta_n$.*

La demostración de este teorema depende de la representación de $\phi(z)$ en la forma

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \phi(w) \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{dw}{w},$$

donde γ es un contorno que incluye el origen y en el cual $|w| < R_1$ y $\left|\frac{z}{w}\right| < R_2$ (Titchmarsch [6]).

En general, no es verdad que todas las singularidades de un producto de Hadamard estén entre los productos de las singularidades de las series componentes, ni que estos productos sean singularidades del producto de Hadamard. Por ejemplo, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \qquad \text{y} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \qquad b_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 3^k \\ 2^{-n}, & \text{si } n = 4^k \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces el producto de Hadamard $h(z) = f(z) * g(z)$ está dado por

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{4^k}$$

(Hille [5], pág $80 - 84$). Observamos ahora que las series g y h son lacunares de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}, \quad a_k \neq 0$$

donde $\lim_{k\to\infty} \dfrac{k}{n_k} = 0$.

Como es bien sabido, toda serie de potencia tiene al menos una singularidad en la frontera de su círculo de convergencia. Si todo punto de esta frontera es una singularidad de la serie, se dice que dicha frontera es la frontera natural de la serie. En ese caso no es posible prolongar analíticamente la función representada por la serie en dicho círculo.

Un resultado muy conocido establece que toda serie lacunar tiene la frontera de su círculo de convergencia como su frontera natural. Ahora, dado que $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$, f tiene como únicas singularidades a ± 1. Por otro lado, $g(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z^{3^k} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (z/2)^{4^k}$ y por el resultado antes mencionado, g tiene a $\partial B(0,1)$ como su frontera natural. Por otra parte, $h(z) = f(z) * g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (z/2)^{4^k}$, y al aplicar el teorema citado se concluye que h tiene a $\partial B(0,2)$ como su frontera natural. Entonces h no tiene ninguna singularidad de la forma $z_f z_g$ (producto de singularidades de f y g), las cuales están necesariamente en $\partial B(0,1)$ y no en $\partial B(0,2)$. Por otra parte h tiene otras singularidades.

Ahora procedemos a determinar los conjuntos de convergencia del producto de Hadamard de series de polinomios ortogonales clásicos.

Consideramos inicialmente la familia de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}$. Dado que los conjuntos de convergencia de (15) son elipses con parámetros L_1, L_2, el conjunto de convergencia de (16) será al menos una elipse con parámetro $L_1 L_2$, pues

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}$$
$$\leq \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}\right) \left(\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}\right)$$
$$= L_1 L_2 \big(z + \sqrt{z^2 - 1}\big).$$

Para la familia de Chebychev de primera y segunda clase y para la de los ultraesféricos se obtiene el mismo resultado que para la familia de Jacobi, pues las elipses de convergencia son las mismas.

Para el caso de la familia de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}$, dado que las lemniscatas de convergencia de f y g son todo el plano (si $L_1, L_2 < 1$), un argumento similar al anterior da que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(z)}{L_n^{(\alpha)}(z)} \leq L_1 L_2$$

así que el conjunto de convergencia de (15) es todo el plano.

Puede suceder que una de f ó g no converja en ningún punto del plano, pero que el producto de Hadamard (16) tenga como conjunto de convergencia todo el plano (basta considerar $L_1 > 1$ y $L_1 L_2 < 1$).

Para la familia de Hermite $\{H_n(z)\}$ debemos considerar las series

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} H_n(z), \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} H_n(z) \tag{17}$$

y

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \frac{b_n}{n!} H_n(z)\,.$$

Un argumento análogo al anterior muestra que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)\,a_n} \frac{b_{n+1}}{(n+1)\,b_n} \frac{H_{n+1}(z)}{H_n(z)} = 0$$

y el conjunto de convergencia del producto de Hadamard será todo el plano complejo.

En cuanto a las singularidades, debido a que en los casos clásicos se conocen funciones generatrices de estos sistemas, podemos considerar los casos especiales a_n y b_n de estas series.

Nuevamente consideraremos primero la familia de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}$. Una función generatriz de esta familia es

$$f_t(z) = 2^{\alpha+\beta} \rho^{-1} (1 + t + \rho)^{-\beta} (1 - t + \rho)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$$

con $\rho = (1 - 2tz + t^2)^{1/2}$. En este caso

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} \right| = |t| \neq 1, \qquad t \neq 0$$

y por lo tanto, el conjunto de convergencia es una elipse con parámetro $|t|$.
Es fácil verificar de (17) que las singularidades de $f_t(z)$ son

$$z = \frac{1+t^2}{2t} = \frac{1}{2}\big(t + \frac{1}{t}\big) = \xi$$

(lo que era de esperarse por las características del conjunto de convergencia). Ha de notarse que $z = 1$ y $z = -1$ quedan excluidas, pues se impuso la condición $|t| \neq 1$ para evitar la elipse degenerada.

Supongamos ahora que

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{t_i}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t_i^n \, P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$$

y que

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{s_j}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_j^n \, P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$$

así que las singularidades de f son $\xi_i = \frac{1}{2}(t_i + \frac{1}{t_i})$, y las de g, $\eta_j = \frac{1}{2}(s_j + \frac{1}{s_j})$.
Si suponemos que hay convergencia absoluta en un dominio dado para cada una de estas series, y como para cada i y j las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_i^n \, P_n^{(\alpha,\beta)}(z) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} s_j^n P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$$

son absolutamente convergentes en una elipse, es posible cambiar el orden de las series sin alterar el valor de éstas. Por lo tanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} t_i^n \, P_n^{(\alpha,\beta)}(z) \,\text{y}\, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} s_j^n \, P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\,.$$

Si consideramos $F(z) = f(z) * g(z)$ suponiendo $|t_i| < 1, \quad i = 1, 2, \cdots$ y $|s_j| < 1, \quad j = 1, 2, \cdots$, se tendrá que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i^n \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^n \right) P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (t_i s_j)^n \right) P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\,. \tag{18}$$

(En las igualdades anteriores, bastaría suponer que las restricciones son para casi todo t_i y s_j). Si suponemos además que los t_i y los s_j están ordenados decrecientemente de acuerdo con su norma, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(t_i s_j)^{n+1}\right|}{\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(t_i s_j)^{n}\right|} \leq |t_1 s_1| < 1\,. \tag{19}$$

Entonces $F(z)$ tiene una elipse de convergencia, y por lo tanto, es posible invertir el orden de las series, así que

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(t_i s_j)^n\, P_n^{(\alpha,\beta)}(z) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1+t_i s_j+R)^{-\alpha}(1-t_i s_j+R)^{-\beta} \end{aligned} \tag{20}$$

con $R = (1-2zt_i s_j + (t_i s_j)^2)^{1/2}$. Entonces las singularidades del producto de Hadamard F son las $t_i s_j,\ i,j \in \mathbb{Z}^+$.

No es posible trabajar con $|t_i| > 1, \quad i = 1,2,\cdots$ ó con $|s_j| > 1, \quad j = 1,2,\cdots$ pues en (18) podría haber problemas de convergencia. De hecho, un problema adicional surge al intentar trabajar con $|t_i| > 1, \quad i = 1,2,\cdots\ |s_j| > 1, \quad j = 1,2,\cdots$ en (20), pues debido a la presencia de los factores

$$(1-u+R)^{-\alpha}(1+u+R)^{-\beta}, \qquad R = (1-2uz+u^2)^{1/2}$$

no es posible factorizar u^2 para obtener $\frac{1}{u}$.

Para la familia de ultraesféricos $\{C_n^{\nu}(z)\}$, se observa, tomando como función generatriz a

$$f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\, C_n^{\nu}(z) = (1-2tz+t^2)^{-\nu}$$

y considerando $|t_i| < 1$ para casi todo i, que

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{t_i}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i^n\right) C_n^{\nu}(z)$$

y análogamente $g(z)$ con s_j en lugar de t_i. Si $F(z) = f(z) * g(z)$, entonces, suponiendo los t_i y los s_j ordenados de manera decreciente de acuerdo con su norma, y si $|t_1|, |s_1| < 1$, (19) permite concluir que las singularidades de $F(z)$ son $t_i s_j$. Más aún, si $|t_1|, |s_1| > 1$, debido a que

$$(1-2tz+t^2)^{-\nu} = t^{-2\nu}\left(1 - \frac{2z}{t} + \frac{1}{t^2}\right)^{-\nu}$$

y a que en ese caso $|\frac{1}{t}| < 1$, es posible utilizar el argumento anterior para concluir que las singularidades de $F(z)$ también son los números $t_i s_j$.

Resultados análogos son válidos para los polinomios de Chebychev de primera y segunda clase $\{T_n\}$ y $\{U_n\}$.

Para las familias de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}$ (cuando $L < 1$) y Hermite $\{H_n(z)\}$ se tienen las funciones generatrices respectivas

$$\frac{e^{\frac{-zt}{1-t}}}{(1-t)^{1+\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\, L_n^{(\alpha)}(z), \quad |t| < 1$$

y

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, H_n(z)$$

las cuales no tienen singularidades, lo que está de acuerdo con el hecho de que sus respectivos conjuntos de convergencia son todo el plano complejo.

Aplicando el *Gap Theorem* de Hadamard (Hille [4]) es fácil demostrar que los conjuntos de convergencia para la familia de Jacobi (con $|t_i|, |s_j| < 1$) son la frontera natural del conjunto de convergencia de $F(z) = f(z) * g(z)$, donde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z) \qquad \text{y} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Q_n(z)$$

con $a_n = 0$ para $n \neq n_k$, donde los n_k satisfacen $n_{k+1} > (1+\theta)\, n_k, \quad k = 1, 2, \cdots,$ siendo θ un número real fijo, y donde

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|$$

existe.

5. Tipo y orden del producto de Hadamard de funciones enteras

Supongamos que f y g son funciones enteras representadas en todo el plano complejo por series de la forma (15), donde $Q_n(z)$ es una familia de polinomios ortogonales.

De los casos considerados, los de Jacobi y ultraesféricos tienen un conjunto de convergencia acotado, mientras que es todo $\mathbb{C}$ para el caso de los de Hermite y Laguerre (si $L < 1$).

Debido a que en cada familia de polinomios ortogonales se presentan situaciones diferentes, imponemos la condición

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L = 0$$

para garantizar que la función resultante sea entera.

Dada una función entera

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

se definen el orden, $\rho(h)$, por

$$\rho(h) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r,h)}{\log r}$$

y, si $0 < \rho(h) < \infty$, el tipo, $\tau(h)$, por

$$\tau(h) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r,h)}{r^{\rho(h)}}$$

donde

$$M(r,h) = \max_{0\le\theta\le 2\pi} |h(re^{i\theta})| \,.$$

Se dice que h es de tipo mínimo, normal o máximo, si $\tau(h) = 0$, $0 < \tau(h) < \infty$ ó $\tau(h) = \infty$, respectivamente.

Dos resultados importantes que expresan el orden y el tipo en términos de los coeficientes de la serie son

$$\rho(h) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \, \log n}{\log |c_n|^{-1}}$$

y

$$\tau(h) = \frac{1}{e\rho(h)} \limsup_{n\to\infty} n\, |c_n|^{\rho(h)/n}$$

(ver HILLE [5]). Luego si f, g son funciones enteras con ordenes ρ_1, ρ_2 y tipos τ_1, τ_2 respectivamente, entonces

$$\rho_1 = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \, \log n}{\log |a_n|^{-1}}$$

$$\rho_2 = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \, \log n}{\log |b_n|^{-1}}$$

$$(e\rho_1\tau_1)^{1/\rho_1} = \limsup_{n\to\infty} n^{1/\rho_1} |a_n|^{1/n} \tag{21}$$

$$(e\rho_2\tau_2)^{1/\rho_2} = \limsup_{n\to\infty} n^{1/\rho_2} |b_n|^{1/n} \,. \tag{22}$$

Para n suficientemente grande, $\log |a_n|^{-1}$ y $\log |b_n|^{-1}$ son positivos. Entonces,

$$\frac{1}{\rho_1} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log |a_n|^{-1}}{n \, \log n}$$

y

$$\frac{1}{\rho_2} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log |b_n|^{-1}}{n \, \log n} \,.$$

Como

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_n b_n} \right| \le \left(\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) \left(\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \right) = 0$$

entonces $F(z) = f(z) * g(z)$ es entera, y si el orden y el tipo de F se denotan con ρ y τ respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} &= \liminf_{n\to\infty} \frac{\log |a_n b_n|^{-1}}{n \log n} \\
&\geq \left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\log |a_n|^{-1}}{n \log n}\right) + \left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\log |b_n|^{-1}}{n \log n}\right) \\
&= \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2},
\end{aligned}$$

así que

$$\rho \leq \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \tag{23}$$

Además, es fácil verificar que si en (21) ó (22) es posible reemplazar lim sup por lim, entonces (22) es en realidad una igualdad y en tal caso

$$\begin{aligned}
(e\rho\tau)^{1/\rho} &= \limsup_{n\to\infty} n^{1/\rho} |a_n b_n|^{1/n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} (n^{1/\rho_1} |a_n|^{1/n})(n^{1/\rho_2} |b_n|^{1/n}) \\
&\leq (e\rho_1\tau_1)^{1/\rho_1} (e\rho_2\tau_2)^{1/\rho_2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\rho\tau)^{1/\rho} \leq (\rho_1\tau_1)^{1/\rho_1} (\rho_2\tau_2)^{1/\rho_2}. \tag{24}$$

Análogamente, (24) será una igualdad, si en (21) ó (22) es posible reemplazar lim sup por lim.

Agradecimientos. Al Dr. Jairo Charris por las sugerencias brindadas en el presente trabajo.

Referencias

[1] E. Whittaker & G. Watson, *A Course of Modern Analysis*, University Press, Cambridge, 1927.
[2] N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, New York, N.Y., 1972.
[3] E. Rainville, *Special Functions*, Macmillan, New York, N.Y., 1960.
[4] T. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, N.Y., 1978.
[5] E. Hille, *Analytic Function Theory, Vol II*, Ginn and Company, Boston, Mass., 1962.
[6] E. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, University Press, Oxford, 1932.
[7] A. Neto, *Variável Complexa*, (pre-impreso), Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1992.
[8] Mo Yeh, *The Hadamard Product of Legendre Series*, (Congreso de Variable Compleja realizado en China en 1987, dirigido por Chi-Tai Chuang), Utopia Press, Singapore, 1987.

[9] H. Wall, *Analytic Theory of Continued Fractions*, Van Nostrand, New York, N.Y., 1948.

(Recibido en septiembre de 1993, revisado en noviembre de 1994)

Miguel A. Dumett
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, COLOMBIA
e-mail: mdumett@hemeroteca.icfes.gov.co