

This is a reprint of the paper  
*Sobre la involución  
y el encaje de métricas*  
by JOSÉ R. ARTEAGA  
published in **Lecturas Matemáticas**  
**16** (1995), pp. 13–35

---

## SOBRE LA INVOLUCIÓN Y EL ENCAJE DE MÉTRICAS\*

JOSÉ R. ARTEAGA

Universidad de Los Andes, Bogotá

**ABSTRACT.** Three basic things are considered in this paper. The first is to show that an intrinsic property of trees can be used to define the Vilinkin polyspherical coordinates. The second is to state, by means of these conditions, the embedding problem of Riemann spaces as a Pfaffian system of linear differential equations with algebraic conditions on the coefficients. As the third, we present the Kuziev embedding from the above point of view of the Kerr gravitational field in  $\mathbb{R}^9$ .

*Key Words and Phrases.* Trees, graphs, polyspherical coordinates, Riemann metrics and spaces, immersions and embeddings, Kerr and Schwarzschild metrics, Pfaffian systems.

*1991 Mathematics Subject Classification.* Primary 53C42, 53C21. Secondary 53C80.

**RESUMEN.** En este artículo se consideran básicamente tres cosas. La primera, es presentar una propiedad intrínseca de los árboles que puede utilizarse para definir las coordenadas poliesféricas de Vilinkin. La segunda es plantear, utilizando este tipo de coordenadas, el problema del encaje de espacios de Riemann como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de Pfaff con condiciones algebraicas sobre los coeficientes. Por último se presenta, según este punto de vista, el encaje logrado por Kuziev del campo gravitacional de Kerr en  $\mathbb{R}^9$ .

---

\* Trabajo realizado dentro del proyecto “Estudios Teóricos en Geometría Riemanniana, Espacios Conformes y Aproximación de Espacios”, patrocinado conjuntamente por COLCIENCIAS y la Universidad de los Andes mediante contrato N0. CO-1204-05-044-90

1. ARBOLES EN  $\mathbb{R}^n$ 

En  $\mathbb{R}^n$ , el espacio euclidiano  $n$ -dimensional, consideremos un árbol con  $n$  vértices. Describiremos su grafo con las ramas creciendo de arriba hacia abajo. Diremos que el vértice de la raíz es de nivel cero, que los vértices inmediatamente unidos a la raíz son de nivel uno, que los vértices inmediatamente unidos a los de nivel uno son de nivel dos, y así sucesivamente. Los vértices de nivel  $k$  serán entonces los vértices que están unidos por encima a los vértices de nivel  $(k - 1)$ .

Denotaremos con  $x_{0i_1i_2\dots i_k}$  a un vértice en el nivel  $k$ . La numeración de los vértices se hará de la siguiente manera: cada vértice llevará información de todos los vértices de niveles anteriores a los cuales está unido y del orden dentro de su propio nivel. El orden en cada nivel se establecerá para cada rama de izquierda a derecha. Que un vértice es el  $x_{0i_1i_2\dots i_k}$  significará entonces que pertenece al nivel  $k$ -ésimo, que está unido con la raíz a través de los vértices  $x_{0i_1}$  del primer nivel,  $x_{0i_1i_2}$  del segundo nivel, y así sucesivamente, con  $x_{0i_1i_2\dots i_{k-1}}$  del  $(k - 1)$ -ésimo nivel. Por ejemplo,  $x_{02351}$  es un vértice del cuarto nivel, pues después del cero hay cuatro números. El vértice  $x_{02351}$  se encontrará entonces unido con  $x_{0235}$  del tercer nivel, éste, a su vez, con  $x_{023}$  del segundo nivel, el cual está unido con  $x_{02}$  del primer nivel y, este último, con la raíz  $x_0$ . Por lo tanto, para ir por el árbol desde el vértice  $x_{02351}$  hasta la raíz  $x_0$  hay que pasar por los vértices  $x_{0235}$  del tercer nivel,  $x_{023}$  del segundo nivel y  $x_{02}$  del primer nivel.

Si un vértice  $x_{0i_1\dots i_k}$  del nivel  $k$ -ésimo está unido con un vértice del nivel  $(k - 1)$ ,  $x_{0i_1\dots i_{k-1}}$ , diremos que  $x_{0i_1\dots i_{k-1}}$  es el *padre* de  $x_{0i_1\dots i_k}$  y que  $x_{0i_1\dots i_k}$  es *hijo* de  $x_{0i_1\dots i_{k-1}}$ . Si dos vértices tienen el mismo padre, diremos que son *hermanos*. Si  $x_{0i_1\dots i_{s-1}i_s}$  y  $x_{0i_1\dots i_{s-1}i'_s}$  son hermanos e  $i_s > i'_s$ , diremos que el primer vértice es un vértice *hermano mayor* del segundo. Al padre, al *abuelo* (*padre del padre*), al *bisabuelo*, etc., de un vértice, los llamaremos *antecesores* de éste. A su vez, se dirá que un vértice es descendiente de su padre, de su abuelo, etc.

Consideremos el siguiente árbol de 7 vértices en  $\mathbb{R}^7$ :

$$x_0, x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{011}, x_{012}, x_{021}. \quad (1)$$

Este árbol está descrito nombrando los vértices de arriba a abajo y de izquierda a derecha. Establezcamos cierto orden para describirlo como una lista que llamaremos *lista ordenada*.

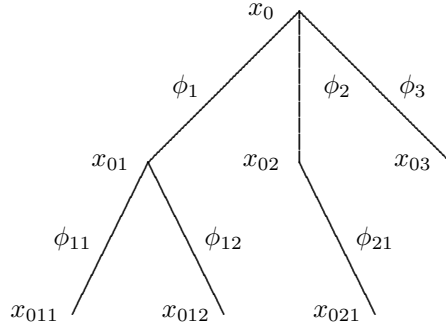
2. ESCRITURA DE UN ÁRBOL COMO UNA LISTA  
ORDENADA Y COORDENADAS POLIESFÉRICAS

Describiremos un árbol mediante una lista ordenada de izquierda a derecha, escribiendo primero los vértices y luego los antecesores; es decir, en un árbol de  $k$  niveles, escribiremos primero los vértices del nivel  $k$ , luego los del nivel  $(k - 1)$ , y así sucesivamente. En cada nivel escribiremos primero los "hijos menores" de un mismo padre. Por ejemplo, el árbol (1) se escribirá

$$x_{011}, x_{012}, x_{021}, x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_0 \quad (2)$$

así que los vértices  $x_{011}, x_{012}$  tienen como antecesores a su padre  $x_{01}$  y a la raíz  $x_0$ . Nótese que se escriben primero todos los del segundo nivel luego todos los del

primer nivel y por último la raíz (*Figura 1*).



*Figura 1*

En  $\mathbb{R}^n$  podemos considerar que las coordenadas cartesianas de un punto están siempre asociadas al orden de un árbol prefijado. Por ejemplo, en el espacio  $\mathbb{R}^7$  podemos asociar las coordenadas cartesianas al orden del árbol (2), de tal manera que  $x^1$  corresponde a  $x_{011}$ ,  $x^2$  a  $x_{012}$ , etc. Escribiremos, por abuso de notación,  $x^1 = x_{011}$ ,  $x^2 = x_{012}$ , etc., de tal manera que a la raíz  $x_0$  le corresponde la última coordenada:  $x^7 = x_0$ .

A cada arista (segmento de recta que une dos vértices del árbol) le haremos ahora corresponder un ángulo  $\varphi$ , sujeto a los dominios que especificaremos posteriormente, de la siguiente manera: a la arista que une  $x_{0i_1i_2\dots i_s}$  con  $x_{0i_1i_2\dots i_si_{s+1}}$ , le hacemos corresponder el ángulo  $\varphi_{i_1i_2\dots i_{s+1}}$ , que es el ángulo entre los vectores  $(0, x_{0i_1\dots i_s})$  y  $(0, x_{0i_1\dots i_{s+1}})$  en el plano generado por el origen y los vértices  $(x_{0i_1\dots i_s})$  y  $(x_{0i_1\dots i_{s+1}})$ . Así en el ejemplo (2),  $x_0$  está unido con  $x_{02}$  mediante la arista cuyo ángulo es  $\varphi_2$ ; el vértice  $x_{02}$  está unido mediante la arista de ángulo  $\varphi_{21}$  al vértice  $x_{021}$ , etc. Es claro que estos ángulos quedan bien determinados por el vértice de mayor nivel de los dos que une. El ángulo que acabamos de introducir es el denominado *ángulo de rotación*. La transformación de rotación correspondiente la definiremos como sigue: si  $x_{0i_1i_2\dots i_m}$  es un vértice no extremal de un árbol ordenado, haremos corresponder a este vértice la rotación  $g(\varphi)$  en el ángulo  $\varphi = \varphi_{i_1i_2\dots i_m}$  del plano definido por el origen de coordenadas y los vértices  $(x_{0i_1i_2\dots i_{m-1}})$  y  $(x_{0i_1i_2\dots i_m})$ ; es decir,

$$g(\varphi) \begin{cases} x'_i = x_i \cos \varphi - x_j \sin \varphi \\ x'_j = x_i \sin \varphi + x_j \cos \varphi, \end{cases}$$

donde  $x_i = x_{0i_1i_2\dots i_{m-1}}$  y  $x_j = x_{0i_1i_2\dots i_m}$  están en un sistema ortonormal de coordenadas del plano ordenado de acuerdo con el árbol. Supongamos que en  $\mathbb{R}^n$  se ha escogido un sistema ortonormal de coordenadas  $(x^i)$ . En este sistema el elemento lineal tiene la forma

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2. \quad (3)$$

Supongamos que a tal sistema se le ha dado el orden de un árbol y consideremos las transformaciones de rotación de éste. Sea  $X_0$  un punto de la esfera unitaria  $S^{n-1}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, cualquier otro punto  $X$  sobre la esfera  $S^{n-1}$  se puede obtener

por medio de la composición de todas las transformaciones de rotación aplicadas, en su orden, a  $X_0$ . Es decir, que

$$X = \prod g(\varphi_{i_1 i_2 \dots i_m}) X_0,$$

donde  $\varphi_{i_1 \dots i_m}$  son los ángulos de rotación del árbol que ordena las coordenadas de  $x$  según la anterior descripción. Así para el ejemplo (2), todo  $X \in S^6$  puede escribirse en la forma

$$X = g(\varphi_{11})g(\varphi_{12})g(\varphi_{21})g(\varphi_1)g(\varphi_1)g(\varphi_2)g(\varphi_3)X_0.$$

Es claro que si consideramos los ángulos de rotación y otra variable, como el radio de una esfera centrada en el origen de coordenadas, por ejemplo, lo que obtenemos, en adición al sistema ortogonal cartesiano, es un nuevo sistema de coordenadas, formado por los  $n - 1$  ángulos de rotación y por el radio vector o distancia al origen del sistema. A este segundo sistema lo llamaremos un *sistema de coordenadas poliesférico*. La relación entre las coordenadas cartesianas  $x_{0i_1 i_2 \dots i_s}$  y los ángulos de rotación de las coordenadas poliesféricas viene dada por:

$$x_{0j_1 j_2 \dots j_s} = \prod_{P_{j_1 j_2 \dots j_s} \cup R_{j_1 j_2 \dots j_s}} \cos \varphi_{j_1 j_2 \dots j_m} \prod_{S_{j_1 j_2 \dots j_s} \cup x_{0j_1 j_2 \dots j_s}} \text{sen } \varphi_{j_1 j_2 \dots j_i}, \quad (4)$$

donde  $P_{j_1 \dots j_s}$  es el conjunto de los ángulos asociados a los vértices “hijos” de  $x_{0j_1 \dots j_s}$ ,  $R_{j_1 \dots j_s}$  es el de los ángulos asociados tanto a los vértices “hermanos mayores” de  $x_{0j_1 \dots j_s}$  como a los de los hermanos mayores de sus antecesores, y  $S_{j_1 \dots j_s}$  es el de los ángulos asociados a los antecesores que están sobre la misma rama que  $x_{0i_1 \dots i_s}$  hasta llegar a la raíz.

Si hacemos el cambio de notación  $x^i = x_{0i_1 \dots i_s}$ , según la forma de ordenamiento arriba mencionada, y utilizamos la fórmula (4), obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x^i)^2 = 1. \quad (5)$$

Lo anterior lo podemos interpretar geoméricamente de la siguiente manera: si tenemos un punto  $X$  sobre la esfera  $X \in S^{n-1}$ , entonces cada árbol de  $n$  vértices define un sistema de coordenadas poliesféricas  $(1, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$  de  $X$ , donde los ángulos  $\varphi_s = \varphi_{i_1 \dots i_s}$  son los ángulos de rotación del árbol.

**Ejemplo 1.** En  $\mathbb{R}^3$  podemos formar esencialmente solo dos árboles que son

$$z = x_0, \quad y = x_{01}, \quad x = x_{011} \quad (6)$$

y

$$z = x_0, \quad x = x_{01}, \quad y = x_{02}. \quad (7)$$

Para el caso (6), tenemos que un punto cualquiera sobre la esfera  $S^2$  con coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  tiene coordenadas poliesféricas  $(1, \varphi_1, \varphi_2)$  que están relacionadas con  $(x, y, z)$ , según (4), en la forma

$$(8) \quad \begin{aligned} z &= \cos \varphi_1 \\ y &= \cos \varphi_2 \text{sen } \varphi_1 \\ x &= \text{sen } \varphi_2 \text{sen } \varphi_1, \end{aligned}$$

donde  $\varphi_2 = \varphi_{11}$ , según las notaciones establecidas anteriormente. Estas coordenadas (8) son usualmente conocidas como las coordenadas esféricas de  $\mathbb{R}^3$ , así que las coordenadas poliesféricas son una generalización de las coordenadas esféricas. Para el segundo árbol (7), tenemos

$$(9) \quad \begin{aligned} z &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ y &= \operatorname{sen} \varphi_2 \\ x &= \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{aligned}$$

Estas ya no son coordenadas esféricas. Son otro tipo de coordenadas poliesféricas, que corresponden al árbol (7). Una diferencia entre estos dos tipos de coordenadas es que el primero preserva la orientación del espacio mientras que el segundo la invierte. Para verificar esto basta observar que pasa con la normal exterior sobre la esfera.

**Ejemplo 2.** En  $\mathbb{R}^7$ , las cartesianas  $(x^1, \dots, x^7)$  y las coordenadas poliesféricas según el árbol (2) están relacionadas por

$$\begin{aligned} x^7 &= x_0 = r \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ x^6 &= x_{03} = r \operatorname{sen} \varphi_3 \\ x^5 &= x_{02} = r \cos \varphi_3 \operatorname{sen} \varphi_2 \cos \varphi_{21} \\ x^4 &= x_{01} = r \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_{12} \cos \varphi_{11} \\ x^3 &= x_{021} = r \cos \varphi_3 \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_{21} \\ x^2 &= x_{012} = r \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_{12} \\ x^1 &= x_{011} = r \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_{12} \operatorname{sen} \varphi_{11}, \end{aligned}$$

No es difícil comprobar que  $\sum_{i=1}^7 (x^i)^2 = r^2$ .

### 3. DOMINIO DE LOS ÁNGULOS DE ROTACIÓN

Sea  $p_{i_1 \dots i_s}$  el número de “hermanos menores” de  $x_{0i_1 \dots i_s}$  y  $q_{i_1 \dots i_s}$ , el número de sus “hijos”. Las condiciones para establecer el dominio de los ángulos de rotación en un árbol son las siguientes:

- (1) Si  $p_{i_1 \dots i_s} = 0$  y  $q_{i_1 \dots i_s} = 0$ , entonces  $0 \leq \varphi_{i_1 \dots i_s} < 2\pi$ .
- (2) Si  $p_{i_1 \dots i_s} = 0$  y  $q_{i_1 \dots i_s} \neq 0$ , entonces  $0 \leq \varphi_{i_1 \dots i_s} < \pi$ .
- (3) Si  $p_{i_1 \dots i_s} \neq 0$  y  $q_{i_1 \dots i_s} = 0$ , entonces  $-\pi/2 \leq \varphi_{i_1 \dots i_s} < \pi/2$ .
- (4) Si  $p_{i_1 \dots i_s} \neq 0$  y  $q_{i_1 \dots i_s} \neq 0$ , entonces  $0 \leq \varphi_{i_1 \dots i_s} < \pi/2$ .

En el ejemplo 1 tenemos para las coordenadas del primer árbol (6) (esféricas), que

$$0 \leq \varphi_1 < \pi, \quad 0 \leq \varphi_2 < 2\pi$$

y para las coordenadas del segundo árbol (7), que

$$-\pi/2 \leq \varphi_1 < \pi/2, \quad 0 \leq \varphi_2 < 2\pi.$$

En el ejemplo 2, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi_1 < \pi; & 0 &\leq \varphi_2 < \pi; \\ -\pi/2 &\leq \varphi_3 < \pi/2; & 0 &\leq \varphi_{11} < 2\pi; \\ -\pi/2 &\leq \varphi_{12} < \pi/2; & -\pi/2 &\leq \varphi_{21} < \pi/2. \end{aligned}$$

En general, en  $\mathbb{R}^n$ , la suma de las longitudes de todos los dominios de los ángulos de rotación es igual a  $n\pi$ . Esto se debe a que esta suma es independiente de los ángulos de rotación que se tomen sobre la esfera  $S^{n-1}$ , y es fácil verificar que para las coordenadas esféricas, un caso particular de coordenadas poliesféricas, esta suma es igual a  $3\pi$ . El árbol asociado al cambio de coordenadas de cartesianas a esféricas en  $\mathbb{R}^n$  es siempre un árbol de una sola rama y  $(n-1)$  niveles.

#### 4. COORDENADAS POLI-PSEUDOESFÉRICAS EN ESPACIOS PSEUDOEUCLEIDEOS

Sea  ${}^k\mathbb{R}^n = E_{n-k,k}$  el espacio euclidiano de dimensión  $n$  dotado de una forma cuadrática con signatura  $(+, +, \dots, (n-k)\dots, +, +, -, -, \dots, (k)\dots, -, -)$ . Dado un árbol, se establece primero el orden de numeración, tal como en las secciones anteriores. Luego, a un sistema de coordenadas cartesianas  $x^i$  se da el orden de los vértices del árbol. Recuérdese aquí que a la raíz  $x_0$  le corresponde la coordenada  $x^n$  y al primer vértice a la izquierda de nivel máximo le corresponde  $x^1$  (Esta escogencia es arbitraria, puede tomarse otra).

Luego se da un signo (+) o (-) a la coordenada  $x^i$  según que en la forma cuadrática dada, al término cuadrático  $(x^i)^2$  le corresponda (+) o (-) en la fórmula para el cuadrado de la longitud de un vector.

Una vez establecido qué signo colocar a cada vértice del árbol se debe tener en cuenta la siguiente regla para aplicar el método de hallar la expresión de las coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas poliesféricas: si el ángulo  $\varphi_{i_1\dots i_s}$  corresponde a dos vértices del mismo signo  $x_{0i_1\dots i_{s-1}}$  y  $x_{0i_1\dots i_s}$ , entonces, en la fórmula (4) se colocan, como antes, cosenos y senos según el caso; pero, si el ángulo  $\varphi_{i_1\dots i_s}$  corresponde a dos vértices de signo contrario  $x_{0i_1\dots i_{s-1}}$  y  $x_{0i_1\dots i_s}$ , entonces, en la fórmula (4) se colocarán senos y cosenos hiperbólicos en lugar de senos y cosenos circulares.

La regla de la suma de los ángulos no será ahora válida.

**Ejemplo 3.** Sea  ${}^1\mathbb{R}^n$  el espacio pseudoeuclideo en el cual el producto interno es  $[x, y] = x^1y^1 + \dots + x^{n-1}y^{n-1} - x^ny^n$  (forma bilineal) y la distancia entre  $x$  y  $y$  esta dada por  $r^2(x, y) = [x - y, x - y]$ . Consideremos un árbol de una sola rama y  $(n-1)$  niveles y sea  $\Omega_n = \{x \mid [x, x] > 0, x^n > 0\}$ . Las coordenadas cartesianas y pseudoesféricas sobre  $\Omega_n$  están entonces relacionadas por

$$\begin{aligned} x^1 &= r \operatorname{senh} \varphi_{n-1} \operatorname{sen} \varphi_{n-2} \dots \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_1 \\ x^2 &= r \operatorname{senh} \varphi_{n-1} \operatorname{sen} \varphi_{n-2} \dots \operatorname{sen} \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ &\dots \\ x^{n-1} &= r \operatorname{senh} \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \\ x^n &= r \operatorname{cosh} \varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

donde  $r^2 = [x, x]$ ,  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi_1 < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi_k < \pi$ ,  $0 \leq \varphi_{n-1} < \infty$  para  $1 < k < n - 1$ .

### 5. EL ELEMENTO LINEAL EN COORDENADAS POLIESFÉRICAS

Utilizaremos la regla dada en la sección 2 para describir un árbol como una lista ordenada. De la misma manera, escribiremos como una lista ordenada los ángulos de rotación. Sea  $\varphi_{i_1 \dots i_s}$  el último ángulo en esta lista. El elemento lineal (3) del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  en coordenadas poliesféricas está dado por

$$ds^2 = d\varphi_{i_1 \dots i_s}^2 + \text{sen}^2 \varphi_{i_1 \dots i_s} (*) + \text{cos}^2 \varphi_{i_1 \dots i_s} (**)$$
 (8)

donde (\*) y (\*\*) se establecerán de la siguiente manera:

- (1) Si la coordenada  $x_{0i_1 \dots i_s}$  tiene hijos, hay que colocar toda la expresión (8) en el lugar de (\*) para la coordenada  $x_{0i_1 \dots i_{s+1}}$ , comenzando por el hijo mayor.
- (2) Si  $x_{0i_1 \dots i_s}$  tiene hermanos menores, (\*\*) se reemplaza por (8) para la coordenada del hermano inmediatamente anterior a  $x_{0i_1 \dots i_{s-1}}$ .
- (3) En caso de que  $x_{0i_1 \dots i_s}$  no tenga hermanos menores o hijos, se coloca *cero* en el lugar correspondiente a (\*) o a (\*\*).
- (4) Las operaciones (1) a (3) anteriores se repetirán tantas veces como sea necesario para llegar al primer ángulo en la lista.

Por ejemplo, para el espacio euclideo  $\mathbb{R}^7$  con coordenadas poliesféricas que responden al árbol (2), tenemos

$$ds^2 = d\varphi_3^2 + \text{cos}^2 \varphi_3 \{d\varphi_2^2 + \text{sen}^2 \varphi_2 d\varphi_{21}^2 + \text{cos}^2 \varphi_2 [d\varphi_1^2 + \text{sen}^2 \varphi_1 (d\varphi_{12}^2 + \text{cos}^2 \varphi_{12} d\varphi_{11}^2)]\}.$$

### 6. INMERSIÓN Y ENCAJE DE VARIEDADES

A no ser que se especifique lo contrario, consideraremos solo variedades  $C^\infty$  y aplicaciones  $C^\infty$  (suaves) entre ellas. Sean  $M$  y  $N$  variedades y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación suave. Con  $T(M)$  y  $T(N)$  designaremos los correspondientes fibrados tangentes. La aplicación  $f$  induce un homomorfismo  $df : T(M) \rightarrow T(N)$  entre los fibrados. Se dice que  $f$  es una *inmersión* si  $df$  es un monomorfismo, y un *encaje*, si además de ser una inmersión es una aplicación 1 - 1.

En general existen dos problemas:

**Problema de Clasificación.** *Dadas dos variedades  $M$  y  $N$ , clasificar las inmersiones y los (encajes), módulo las homotopías de  $M$  y  $N$ .*

**Problema de Existencia.** *Dadas dos variedades  $M$  y  $N$ , determinar si existe una inmersión (escribiremos  $M \subseteq N$ ) o un encaje de  $M$  en  $N$  (escribiremos  $M \subset N$ ).*

Las primeras respuestas generales a estos dos problemas fueron dadas por WHITNEY y WU:

**Teorema.** (Whitney) [W] Toda variedad  $M$  ( $\dim M = n$ ) puede ser inmersa en  $\mathbb{R}^{2n-1}$  ( $M \subseteq \mathbb{R}^{2n-1}$ ) y encajada en  $\mathbb{R}^{2n}$  ( $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ ).

**Teorema.** (Wu) [WT] Dos encajes cualesquiera de  $M^n$  en  $\mathbb{R}^{2n+1}$  son isotopos.

El problema de la inmersión y encaje de variedades puede considerarse como un problema global y su solución es topológica o geométrica. Las soluciones deben ser resultados que garanticen condiciones para que la inmersión o el encaje existan.

El problema de las involuciones (inmersiones) y encajes de  $(M, g) \hookrightarrow \mathbb{R}^m$  se estudia en general planteando sistemas de ecuaciones que dependen del atlas escogido. Por lo tanto, mientras que la involución de variedades generales es un problema esencialmente topológico, la involución de espacios de Riemann es un problema geométrico.

Cuando se habla de la esfera, se piensa de manera natural en su inmersión o encaje en algún espacio de dimensión mayor; por ejemplo, en el espacio tridimensional euclidiano. En cambio, el plano euclidiano se considera generalmente como un todo y no como una involución o encaje en otro espacio mayor. Los dos ejemplos anteriores corresponden esencialmente a una misma variedad  $M$  dotada de dos métricas diferentes:  $(M, g_1) = S^2$  y  $(M, g_2) = \mathbb{R}^2 = E^2$ . La esfera  $S^2$  puede realizarse o, más precisamente, encajarse en  $\mathbb{R}^3$  o en cualquier espacio euclideo de dimensión mayor, mientras que  $E^2$  lo hace en cualquiera de dimensión  $\geq 2$ .

## 7. ESPACIOS DE RIEMANN DE CLASE $k$

Llamaremos *espacio de Riemann de clase  $k$*  a cualquier espacio de Riemann  $(M^n, g)$  que pueda encajarse en el espacio euclideo  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Aquí surgen dos tipos de problemas:

- a) Determinar, para un  $k$  específico, qué condiciones debe satisfacer  $g$  para que  $(M^n, g)$  sea de clase  $k$ .
- b) Determinar a qué clase pertenece un espacio de Riemann  $(M^n, g)$  dado.

### 7.1 Espacios de Riemann de clase $k = 1$ .

Sea  $V_n$  un espacio de Riemann de dimensión  $n$  con forma cuadrática fundamental positivamente definida

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

donde las  $(x^i)$  son las coordenadas del espacio considerado y  $g_{\alpha\beta}$  las del tensor métrico.

Una condición necesaria y suficiente para que  $V_n$  sea de clase 1 es que exista un tensor simétrico de valencia 2,  $\Omega_{\alpha\beta}$ , asociado a la segunda forma fundamental, tal que

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} - \Omega_{\alpha\delta}\Omega_{\beta\gamma} \quad (\text{ecuación de Gauss}) \quad (9)$$

y que

$$\Omega_{\alpha\beta,\gamma} = \Omega_{\alpha\gamma,\beta} \quad (\text{ecuación de Codazzi}). \quad (10)$$

ROSENSON [R], apoyándose en trabajos de THOMAS [T] y WEISE [We], obtiene, a partir de (9) y (10), unos invariantes,  $p_s$ , llamados invariantes fundamentales de una hipersuperficie del espacio euclideo  $(E_{n+1}, G)$ , los cuales son promedios de



las componentes del tensor de curvatura de Riemann y del tensor métrico. En coordenadas ortonormales, si  $G_{ij} = \delta_{ij}$  y  $\Omega_{\alpha\delta} = 0$  para  $\alpha \neq \beta$ , estos invariantes se expresan en la forma

$$\begin{aligned} p_1 &= -\sum_{\gamma=1}^n \Omega_{\gamma\gamma} \\ p_2 &= \sum_{\gamma < \delta} \Omega_{\gamma\gamma} \Omega_{\delta\delta} \\ p_3 &= -\sum_{\gamma < \delta < \epsilon} \Omega_{\gamma\gamma} \Omega_{\delta\delta} \Omega_{\epsilon\epsilon} \\ &\vdots \\ p_n &= (-1)^n \Omega_{11} \cdots \Omega_{nn}. \end{aligned}$$

Observamos que en este caso los  $\Omega_{ii}$  calculados en cualquier punto  $p$  son números reales que expresan las curvaturas normales principales del espacio  $V_n$ .

ROSENSON demuestra además que cualquier otro invariante conjunto de la primera y segunda forma fundamentales se puede expresar en términos de los  $p_s$ .

Los invariantes  $p_s$  fueron obtenidos recursivamente al analizar (9), (10),

$$\begin{aligned} {}^{(k)}U_\alpha^\delta &= \Omega_\alpha^\lambda \left( {}^{(k-1)}U_\lambda^\delta - \frac{{}^{(k-1)}U_1}{k-1} \delta_\lambda^\delta \right) & k = \overline{2, n} \\ {}^{(1)}U_\alpha^\delta &= \Omega_\alpha^\delta; & {}^{(1)}U_1 &= -p_1. \end{aligned}$$

y permiten establecer diferentes condiciones para que  $(M^n, g)$  sea de clase 1. Por ejemplo,

si  $(M^4, g)$  satisface

$$R_\alpha^\gamma {}^{(4)}U_\gamma^\alpha - \frac{1}{2} R {}^{(4)}U_1 + R_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} \left( R_\lambda^\alpha - \frac{R}{2} \delta_\lambda^\alpha \right) \left( R_\mu^\beta - \frac{R}{2} \delta_\mu^\beta \right) > 0$$

y si  ${}^{(4)}U_\alpha^\delta \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} 4p_3^2 R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} &= \\ &\left( R_{\alpha\lambda\mu}^\gamma R^{\lambda\mu} - {}^{(4)}U_\alpha^\gamma - \frac{1}{2} R R_\alpha^\gamma \right) \left( R_{\beta\gamma\sigma}^\delta R^{\gamma\sigma} - {}^{(4)}U_\beta^\delta - \frac{1}{2} R R_\beta^\delta \right) - \\ &\left( R_{\alpha\lambda\mu}^\delta R^{\lambda\mu} - {}^{(4)}U_\alpha^\delta - \frac{1}{2} R R_\alpha^\delta \right) \left( R_{\beta\gamma\sigma}^\gamma R^{\gamma\sigma} - {}^{(4)}U_\beta^\gamma - \frac{1}{2} R R_\beta^\gamma \right), \end{aligned}$$

donde

$$p_3^2 = \frac{1}{6} R_\alpha^\gamma {}^{(4)}U_\gamma^\alpha - \frac{1}{12} R {}^{(4)}U_1 + \frac{1}{6} R_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} \left( R_\lambda^\alpha - \frac{R}{2} \delta_\lambda^\alpha \right) \left( R_\mu^\beta - \frac{R}{2} \delta_\mu^\beta \right).$$

Estas fórmulas expresan condiciones necesarias y suficientes para que  $(M^4, g)$  sea de clase 1. En otro resultado, ROSENSON expresa en forma explícita la segunda forma fundamental:

$$2p_3 \Omega_\alpha^\delta = \frac{1}{6} R_{\alpha\lambda\mu}^\delta R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} R R_\alpha^\delta.$$

Todos los invariantes encontrados por ROSENSON, así como las condiciones dadas por él para que un espacio de Riemann sea de clase 1, se basan en el supuesto de que la segunda forma fundamental es conocida.

Si el espacio de Riemann es conformemente plano, es decir, si  $g = f^{-2}\dot{g}$ , donde  $f \in C^3$  y  $\dot{g}$  es la métrica del espacio euclideo  $E^n$ , entonces las condiciones exigidas para que sea de clase 1 se simplifican. LANCASTER [L] encuentra cuál debe ser la estructura del tensor métrico  $g$  en este caso, conocido como el de las hipersuperficies conformemente planas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . LANCASTER reduce el problema de determinar la métrica, al análisis de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden. Obtiene resultados muy interesantes para el caso  $n = 3$ . Mencionaremos sólo algunos de ellos.

Bajo el supuesto de que la segunda forma fundamental es un tensor diagonal en el sistema euclideo de coordenadas escogido, es decir, en el cual el elemento lineal se expresa como

$$ds^2 = e^{2\sigma} \sum (dx^i)^2$$

con  $\sigma = \sigma(x^i)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  y  $\sigma \in C^\omega$ , y haciendo algunos cambios para simplificar la notación, las ecuaciones de Gauss se transforman en

$$\beta_{hh}\beta_{ii} = e^{-\sigma}(f_h'' + f_i'') - A, \quad h \neq i \quad (11)$$

donde

$$e^{-\sigma} = \sum_{m=1}^3 f_m, \quad (12)$$

$f_k = f_k(x^k)$ ,  $\beta_{ii} = e^{-2\sigma}\Omega_{ii}$  y  $A = \sum_1^3 f_m'^2$ . A su vez, la ecuación de Codazzi toma la forma

$$\partial_k\beta_{ii} = \partial_k\sigma(\beta_{kk} - \beta_{ii}), \quad i \neq k. \quad (13)$$

Resolviendo (13) y teniendo en cuenta (12), se obtiene que

$$\beta_{11} = Fe^{-\sigma}$$

donde  $F = F(x^1)$ , y si  $F(x^1) \equiv 0$  se obtiene una primera solución

$$e^{-\sigma} = \sum_1^3 ax^i{}^2 + b_ix^i + c_i,$$

en la cual  $4a(c_1 + c_2 + c_3) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$  y  $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 0$ .

En general, LANCASTER obtiene que si  $C_3$  es un espacio conformemente euclidiano de dimensión 3,  $C_3$  es de clase 1 con segunda forma fundamental diagonal si y sólo si la primera forma fundamental está dada por

i)

$$ds^2 = \frac{\sum_1^3 (dx^i)^2}{[f(x^1) + \sum (ax^i{}^2 + b_ix^i + c_i)]^2}$$

donde  $f \in C^\omega$ ,  $f \neq \frac{1}{4a}(b_2^2 + b_3^2) - (c_2 + c_3)$ , o por

ii)

$$ds^2 = \frac{\sum_1^3 (dx^i)^2}{[\sum c_i \cosh \omega_i x^i]^2}$$

donde  $c_1^2\omega_1^2 = c_2^2\omega_2^2 + c_3^2\omega_3^2$  y  $\frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_3}$ .

Cuando  $n \geq 4$ , establece una expresión para el tensor métrico de  $C_n$  de la forma

$$ds^2 = u^{-2} \sum_1^n (dx^i)^2,$$

donde  $u(x_1, \dots, x_n)$  es una función positiva arbitraria de clase  $C^3$ .

Suponiendo que la segunda forma fundamental en un sistema ortonormal de coordenadas tiene como matriz  $(\Omega_{ij}) = (b_{ij}) = b\delta_{ij} + b_i b_j$ , encuentra dos tipos distintos de soluciones para  $u$ :

$$u = \sum ax^{i^2} + b_i x^i + c_i + g(x^1, \dots, x^n),$$

donde

- i)  $g = \sqrt{(a_1 + b_1 x^1) \dots (a_n + b_n x^n)}$
- ii)  $g = G(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$ .

Encuentra también las expresiones

$$\begin{aligned} b^2 &= u^{-4} [2Bu - A] \\ A &= \sum_1^n (\partial_m u)^2 \\ bb_i^2 &= u^{-3} [\partial_{ii}^2 u - B] \end{aligned}$$

donde  $B$  es una función  $C^3$  arbitraria, que relaciona a  $u$  con la segunda forma fundamental.

## 7.2 Espacios de Riemann de clase 2.

Encontrar condiciones similares para espacios de Riemann de clase mayor que uno es mucho más difícil. Aunque se ha trabajado mucho, existen aún problemas sin resolver. Se han intentado diversos procedimientos para encajar un espacio en otro sin necesidad de resolver las ecuaciones de Gauss-Codazzi. Aquí daremos un ejemplo de encaje de una métrica conocida de antemano, evitando resolver las ecuaciones de Gauss-Codazzi. Aunque este ejemplo no sugiere ningún método, sirve para ilustrar la recursividad a la que se debe recurrir para manejar este tipo de problemas.

**Ejemplo 4.** La métrica de Pérez. Sea  $\mathbb{R}^6$  dotado de un sistema de coordenadas  $(z^\alpha)$  en el cual el tensor métrico tiene como matriz a

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + x^4 C(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ z^\sigma &= x^\sigma, \quad \text{para } (\sigma = 2, 3, 4) \\ z^5 &= C(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ z^6 &= (x^4)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

El elemento lineal de  $\mathbb{R}^6$  está dado por

$$ds^2 = 2dz^1 dz^4 - d(z^2)^2 - d(z^3)^2 - dz^5 dz^6.$$

Haciendo el cambio de coordenadas propuesto en (14), obtenemos que

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2(dx^1 + C(x^1, x^2, x^3, x^4)dx^4 + x^4(c_1 dx^1 + c_2 dx^2 + c_3 dx^3 + c_4 dx^4))dx^4 - \\ &\quad - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (c_1 dx^1 + c_2 dx^2 + c_3 dx^3 + c_4 dx^4)2x^4 = \\ &= 2dx^1 dx^4 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + 2C(x^1, x^2, x^3, x^4)(dx^4)^2, \end{aligned}$$

así que el tensor métrico del espacio inmerso (segunda forma fundamental) tiene como matriz

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2C(x^1, x^2, x^3, x^4) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Cuando  $C = C(x^2, x^3, x^4)$ , es decir, cuando no depende de  $x^1$ , se obtiene que

$$R_{ij} = 0 \implies \partial_{22}C + \partial_{33}C = 0. \quad (16)$$

La métrica  $g_{ij}$  (15) con la restricción (16) se conoce como la métrica de Pérez. Tal métrica describe un campo de ondas gravitacionales planas.

## 8. LA MÉTRICA DE KERR

La métrica de Kerr está dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2 z^2} (k)^2 \quad (17)$$

donde  $r$  satisface

$$(r^2 + a^2)rk = r^2(xdx + ydy) + ar(xdy - ydx) + (r^2 + a^2)(zdz - rdt)$$

y

$$\begin{aligned} r^4 - (R^2 - a^2)r^2 - a^2 z^2 &= 0; \\ R^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Esta forma fundamental se obtuvo haciendo una transformación a un sistema de coordenadas asintóticamente planas de la métrica

$$ds^2 = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + 2(du + a \sin^2 \theta d\phi) \quad (18)$$

$$\times (dr + a \operatorname{sen}^2 \theta d\phi) - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \times (du + a \operatorname{sen}^2 \theta d\phi)^2$$

donde  $m, a \in \mathbb{R}$ . Tal transformación es

$$(r - ia)e^{i\theta} \operatorname{sen} \theta = x + iy \quad ; \quad r \cos \theta = z \quad ; \quad u = t + r. \quad (19)$$

En este sistema de coordenadas la matriz del tensor métrico  $g_{ij}$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \operatorname{sen}^2 \theta & 1 \\ 0 & r^2 + a^2 \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ a \operatorname{sen}^2 \theta & 0 & (r^2 + a^2) \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2mra^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} & \frac{2mra \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\ 1 & 0 & \frac{2mra \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} & \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} - 1 \end{pmatrix}.$$

La métrica de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist [MTW]

$$x_1 = r \quad ; \quad x_2 = \theta \quad ; \quad x_3 = \phi \quad ; \quad x_4 = t$$

toma la forma

$$g_{11} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{a^2 - 2mr + r^2};$$

$$g_{21} = 0 \quad ; \quad g_{31} = 0 \quad ; \quad g_{41} = 0 \quad ; \quad g_{22} = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad ; \quad g_{32} = 0 \quad ; \quad g_{42} = 0 \quad ;$$

$$g_{33} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta (a^4 + 2a^2 r^2 + r^4 - a^2 (a^2 - 2mr + r^2) \operatorname{sen}^2 \theta)}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta};$$

$$g_{43} = \frac{-2mra \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta};$$

$$g_{44} = -\frac{a^2 - 2mr + r^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}.$$

En este caso el tensor de Ricci es nulo y, por lo tanto, la curvatura escalar es cero<sup>1</sup>:  $R = 0$ . Esto muestra que la métrica de Kerr es plana y Ricci-plana, pero, también, que no es conformemente plana, pues en este sistema de coordenadas existe al menos una componente no nula<sup>2</sup>:  $C_{3434}$

Otra métrica con las mismas características geométricas que la de Kerr es la de Schwarzschild, cuyo tensor métrico en coordenadas de Boyer-Lindquist es

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \left(\frac{(1-(2Gm))}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(1-(2Gm))}{r} \end{pmatrix}.$$

La métrica de Schwarzschild es el caso particular  $a = 0$  de la métrica de Kerr. Físicamente, el campo de Kerr es el campo gravitacional de una estrella en rotación con momento angular  $a$ . El de Schwarzschild, el de una que no rota.

<sup>1</sup>Cálculos hechos utilizando *Mathematica* y *MathTensor*.

<sup>2</sup>*MathTensor*

## 9. ENCAJE DEL ESPACIO-TIEMPO DE KERR

Mostraremos que el problema de encajar espacios de Riemann  $V_n$  en espacios planos  $E_m$  ( $m > n$ ) conduce a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de Pfaff con condiciones algebraicas sobre sus coeficientes.

Supongase que deseamos encajar el espacio-tiempo axialmente simétrico de Kerr en un espacio pseudoeuclideo de dimensión nueve, utilizando un método de encaje local isométrico.

En general, para encajar un espacio  $V_n$  en un espacio euclidiano  $E_m$  se debe tener en cuenta que

- i) El problema de encaje  $V_n \hookrightarrow E_m$  requiere
  - a) dado  $V_n$  con  $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ , definir la dimensión de  $E_m$  en el cual  $V_n$  se pueda considerar como una superficie,
  - b) encontrar las funciones  $y^\alpha(x)$  que definan el encaje.
- ii) Las ecuaciones fundamentales de un encaje localmente isométrico  $V_n \hookrightarrow E_m$  se obtienen al igualar las dos formas métricas de los respectivos espacios

$$ds_E^2 = G_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = g_{ij}(x) dx^i dx^j = ds_V^2 \quad (20)$$

donde  $G_{\alpha\beta} = \delta_{ij}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m}$  e  $i, j, k = \overline{1, n}$ , así que

$$g_{ij}(x) = G_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} = G_{\alpha\beta} y_i^\alpha y_j^\beta. \quad (21)$$

De lo anterior se deduce que el estudio del encaje  $V_n \hookrightarrow E_m$  se reduce al estudio de  $\frac{n(n+1)}{2}$  ecuaciones diferenciales no lineales. Cualquier sistema de  $m$  soluciones reales independientes  $y^\alpha(x)$  constituye un sistema de funciones de encaje.

Es conocido (cf. [F]) que cualquier  $V_n$  puede ser local e isométricamente encajado en  $E_m$ ,  $m = \frac{n(n+1)}{2}$ . Sin embargo, puede suceder que  $V_n$  se pueda encajar en un  $E_m$  de menor dimensión. Si el menor número de dimensión de  $E_m$  en el cual se puede encajar  $V_n$  es  $m = n + k$ ,  $V_n$  es de clase  $k$ . Sobre los espacios de clase  $k$ , con  $k > 2$ , es poco lo que se conoce, como lo hemos mencionado. Esto se debe a que las ecuaciones de Gauss-Codazzi y sus condiciones de integrabilidad son tan complejas que encontrar sus soluciones es casi imposible (cf. [C]). KUZIEV [Ku] ha demostrado que la clase de encaje del campo de Kerr es  $k \geq 3$ .

Veamos cómo plantear en general las ecuaciones que definen las funciones de encaje para una métrica dada. Trabajaremos con sistemas básicos ortonormales no holonómicos. Consideraremos un espacio  $V_n$  con signatura

$$V_n : ds_V^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j = \epsilon_k [\omega^k(d)]^2, \quad \epsilon_k = \pm 1 \quad (22)$$

donde  $\omega^k(d)$  son 1-formas diferenciales independientes (más específicamente,  $\omega^i(d) = A_s^i dx^s$ ) el cual se puede encajar en un espacio euclidiano  $E_m$  con signatura

$$E_m : ds_E^2 = G_{\alpha\beta}(x) dy^\alpha dy^\beta = \epsilon_\alpha (dy^\alpha)^2, \quad \epsilon_\alpha = \pm 1. \quad (23)$$

La ecuación (20) toma la forma

$$\epsilon_k [\omega^k(d)]^2 = \epsilon_\alpha (dy^\alpha)^2. \quad (24)$$

Escogiendo una base en  $V_n$  podemos obtener expresiones para  $dy^\alpha(x)$ :

$$dy^\alpha = A_k^\alpha(x)\omega^k(d), \tag{25}$$

donde  $(A)_{m \times n}$  tiene rango  $n$ , y de (24) podemos concluir que

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha A_k^\alpha A_l^\alpha &= \delta_{kl}\epsilon_k \\ \epsilon_\alpha (A_k^\alpha(x))^2 &= \epsilon_k, \end{aligned}$$

de lo cual

$$\epsilon_\alpha A_i^\alpha A_j^\alpha = 0 \quad (i \neq j). \tag{26}$$

Por lo tanto, el número de funciones  $A_k^\alpha$  que definen el encaje es

$$s = m.n - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Así pues, para hallar las funciones de encaje de un espacio de Riemann  $(V_n, g)$  en un espacio euclidiano  $E_m$  se debe resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de Pfaff (25) con condiciones sobre los coeficientes dadas por (26), donde  $A$  es la matriz del cambio de coordenadas de cartesiano a no holonómico. Esta matriz se puede obtener mediante un sistema de coordenadas poliesférico asociado a un árbol apropiado. La dimensión  $m$  y el árbol se escogen en principio arbitrariamente, y la idea del método es la de encontrar un árbol asociado a las coordenadas poliesféricas en el cual este sistema tenga soluciones simples.

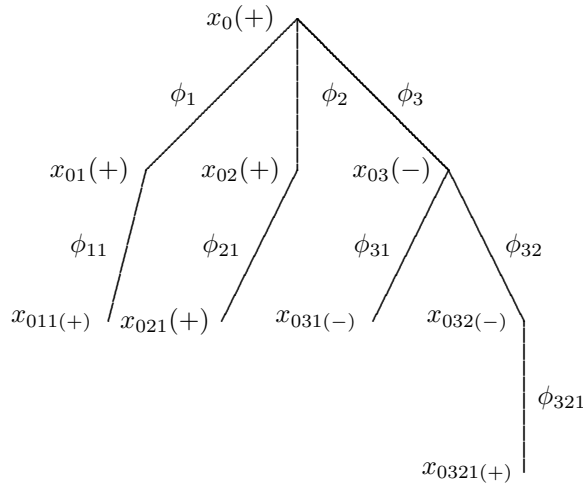


Figura 2

Mostraremos como ejemplo del método descrito el encaje dado por KUZIEV a la métrica de Kerr.

Para  $n = 4$ ,  $s = 4m - 10$ . Usaremos las coordenadas poliesféricas de VILINKIN [Vi], tratadas en párrafos anteriores de este artículo, y el algoritmo para construir

sistemas de coordenadas a partir de este tipo de funciones. KUZIEV [Ku] encaja la métrica de Kerr en  $E_9$ . Para hacer este encaje de un espacio de dimensión 4 en otro de dimensión 9, tenemos que escoger 4 puntos en la esfera de radio 1 en  $E_9$ . Cada punto sobre la esfera forma ocho ángulos con los ejes coordenados en  $E_9$ . Por lo tanto cada punto, el cual se representa con nueve coordenadas rectangulares, se puede expresar también mediante ocho ángulos, correspondientes a las coordenadas poliesféricas.

Para cada punto consideraremos  $E_9$  con la siguiente signatura

$$(-, -, -, +, -, -, -, -, +)$$

y el árbol asociado de la figura 2:

$$(+)x_{0321}, (+)x_{011}, (+)x_{021}, (-)x_{031}, (-)x_{032}, (+)x_{01}, (+)x_{02}, (-)x_{03}, (+)x_0.$$

Utilizaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned} x^1 &= x_{0321}; x^2 = x_{011}; x^3 = x_{021}; x^4 = x_{031}; x^5 = x_{032}, \\ x^6 &= x_{01}; x^7 = x_{02}; x^8 = x_{03}; x^9 = x_0 \end{aligned}$$

y para los ángulos

$$\phi_1 = \varphi_{321}; \phi_2 = \varphi_{11}; \phi_3 = \varphi_{21}; \phi_4 = \varphi_{31}; \phi_5 = \varphi_{32}; \phi_6 = \varphi_1; \phi_7 = \varphi_2; \phi_8 = \varphi_3.$$

La matriz de transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas poliesféricas  $A_{9 \times 4}$ ,  $A_i^\alpha(x)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , tiene entonces como primera columna a  $A_1^\alpha(x)$  cuyas componentes son (de acuerdo con el orden establecido):

$$\begin{aligned} x^3 &= \cosh \phi_8 \operatorname{sen} \phi_7 \operatorname{sen} \phi_3 \\ x^7 &= \cosh \phi_8 \operatorname{sen} \phi_7 \cos \phi_3 \\ x^4 &= \operatorname{senh} \phi_8 \cos \phi_5 \operatorname{sen} \phi_4 \\ x^8 &= \operatorname{senh} \phi_8 \cos \phi_5 \cos \phi_4 \\ x^2 &= \cosh \phi_8 \cos \phi_7 \operatorname{sen} \phi_6 \operatorname{sen} \phi_2 \\ x^6 &= \cosh \phi_8 \cos \phi_7 \operatorname{sen} \phi_6 \cos \phi_2 \\ x^9 &= \cosh \phi_8 \cos \phi_7 \cos \phi_6 \\ x^5 &= \operatorname{senh} \phi_8 \operatorname{sen} \phi_5 \cosh \phi_1 \\ x^1 &= \operatorname{senh} \phi_8 \operatorname{sen} \phi_5 \operatorname{senh} \phi_1 \end{aligned}$$

y  $A_2^\alpha$ ,  $A_3^\alpha$ ,  $A_4^\alpha$  se escogen de forma análoga, teniendo en cuenta que las coordenadas  $A_2^\alpha(x)$  se escogen en términos de  $\phi_9, \dots, \phi_{16}$ , las  $A_3^\alpha(x)$ , en términos de  $\phi_{17}, \dots, \phi_{24}$ , y las  $A_4^\alpha(x)$ , en términos de  $\phi_{25}, \dots, \phi_{32}$ .

Para la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2mr}{p^2}\right) dt^2 - \frac{p^2}{\Delta} dr^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2mr}{p^2} a^2 \operatorname{sen}^2 \theta\right) \\ &\quad \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 - p^2 d\theta^2 + \frac{4mr}{p^2} a \operatorname{sen}^2 \theta d\phi dt, \end{aligned}$$



y en un sistema de coordenadas no holonómico,

$$ds^2 = -(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2 \quad (27)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \frac{p}{\sqrt{\Delta}} dr \\ \omega^2 &= p d\theta \\ \omega^3 &= \left( \frac{\Delta}{1 - \frac{2mr}{p^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{sen } \theta d\phi \\ \omega^4 &= \left[ \left( 1 - \frac{2mr}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt + \frac{2mr}{p^2} \left( 1 - \frac{2mr}{p^2} \right)^{-\frac{1}{2}} a \text{sen }^2 \theta d\phi \right] \end{aligned}$$

con  $\Delta = r^2 + a^2 - 2mr$ ,  $p^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ .

Resolviendo entonces (25), teniendo en cuenta (26), se encuentra que:

$$\begin{aligned} y^1 &= \left( \frac{2mar}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{sen } \theta \text{sen } (\phi - t) \\ y^2 &= \left( \frac{2mar}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{sen } \theta \cos(\phi - t) \\ y^3 &= \left[ 1 - \frac{2mr}{p^2} (1 - a \text{sen }^2 \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \text{sen } t \\ y^4 &= \left[ 1 - \frac{2mr}{p^2} (1 - a \text{sen }^2 \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \cos t \\ y^5 &= \left[ r^2 + a^2 - \frac{2mar}{p^2} (1 - a \text{sen }^2 \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \text{sen } \theta \text{sen } \phi \\ y^6 &= \left[ r^2 + a^2 - \frac{2mar}{p^2} (1 - a \text{sen }^2 \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \text{sen } \theta \cos \phi \\ y^7 &= \left[ r^2 + a^2 - \frac{2mar}{p^2} (1 - a \text{sen }^2 \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \cos \theta \\ y^8 &= \Phi_1(r, \theta) \\ y^9 &= \Phi_2(r, \theta) \end{aligned}$$

donde  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ , conjuntamente con las demás funciones  $y^1, \dots, y^7$ , definen el encaje. KUZIEV no da explícitamente estas funciones, pero demuestra su existencia. Para la métrica de SCHWARZSCHILD, el caso  $a = 0$  de la métrica de Kerr, KUZIEV muestra que el encaje dado por KAZNER [Ka] se obtiene de esta serie de  $y^\alpha$  haciendo  $a = 0$ .

En este caso

$$\begin{aligned}
 y^1 &= 0 \\
 y^2 &= 0 \\
 y^3 &= \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \operatorname{sen} t \\
 y^4 &= \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \operatorname{cos} t \\
 y^5 &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\
 y^6 &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \phi \\
 y^7 &= r \operatorname{cos} \theta \\
 y^8 &= 0
 \end{aligned}$$

y

$$y^9 = f(r), \quad \text{donde } f \text{ satisface} \quad \left(\frac{df}{dr}\right)^2 = \frac{2mr^3 - m^2}{r^3(r - 2m)}.$$

así que la métrica de Schwarzschild puede ser encajada en  $\mathbb{R}^6$ . Si  $m = 0$ , se obtiene la métrica de Lorentz.

**Nota.** Todos los cálculos fueron hechos utilizando los paquetes computacionales *Mathematica* y *MathTensor*.

#### BIBLIOGRAFÍA

- [G] S. GITLER, *Inmersion and Embedding of Manifolds*, Proc. Symp. Pure Math. **22** (1970), 87–96.
- [W] H. WHITNEY, *The self intersections of smooth  $n$ -manifolds in  $2n$ -space*, Ann. of Math. (2) **45** (1944), 220–246.
- [WT] WEN TSÜN WU, *On the isotopy of  $C^r$ -manifolds of dimension  $n$  in euclidean  $(2n+1)$ space*, Sci Record 2 (1958), 271–275.
- [T] T.Y. THOMAS, *Riemann space of class one and their characterization*, Acta Math. **67** (1936), 169–211.
- [CE] E. CARTAN, *La deformation de hypersurfaces dans l'espace conforme réel a  $n \geq 5$  dimensions*, Bull. Soc. Math. France **45** (1917), 57–121.
- [We] K.H. WEISE, *Beiträge zum Klassenproblem der quadratischen Differentialformen*, Math. Ann. (1935), 522–570.
- [L1] G.M. LANCASTER, *Canonical metrics for certain conformally Euclidean spaces of dimension three and codimension one*, Duke Math. Journal **40** (1973), 1–8.
- [L2] ———, *A characterization of certain conformally euclidean spaces of class one*, Prog. AMS **21** (1969), 623–628.
- [L3] ———, *Conformally flat hypersurface in  $\mathbb{R}^{n+1}$* , Tensor N.S. Journal **35** (1981), 293–296.
- [C] C.D. COLLINSON, *Embeddings of plane fronted waves and other space-time*, Math.Phys. **3** (1968), 403–410.
- [Ku] R.R. KUZIEV, *Sobre la clase de encaje del Campo de Kerr*, en ruso, Selecciones sobre Gravitación y Teoría de Relatividad **16** (1979).
- [Vi] N.I. VILINKIN, *Funciones especiales y teoría de Representación de Grupos*, en ruso, Nauka, Moscú, 1965.

- [BL] R. BOYER & R. LINQUIST, *Maximal analytical extension of the Kerr metric*, Math. Phys. **8 No 2** (1967), 265.
- [Ka] E. KAZNER, *Finite representation of the solar gravitational field in flat space of six dimensions*, American J. of Mathematics **43** (1921), 129.
- [LL] L.D. LANDAU & E.M. LIPZSHITZ, *Teoría de Campos*, en ruso, Nauka , Moscú, 1973.
- [R1] I.A. ROSENSON, *Sobre espacios de Riemann de clase 1*, en ruso, Izvestia, Academia de Ciencias de la URSS, Serie Matemática. **4** (1940), 181–192.
- [R2] ———, *Sobre espacios de Riemann de clase I (Parte 2)*, en ruso, Izvestia, Academia de Ciencias de la URSS, Serie Matemática. **5** (1941), 325–351.
- [R3] ———, *Sobre espacios de Riemann de clase I (Parte 3)*, en ruso, Izvestia, Academia de Ciencias de la URSS, Serie Matemática. **7** (1943), 253–284.

(Recibido en octubre de 1993, revisado en marzo de 1995)

JOSÉ R. ARTEAGA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
SANTAFÉ DE BOGOTÁ, COLOMBIA  
*e-mail*: jarteaga@cdcnet.uniandes.edu.co