This is a reprint of the paper
Estructura ordenada de los 3-anillos
by Lorenzo Acosta
published in **Lecturas Matemáticas**
16 (1995), pp. 1–11

ESTRUCTURA ORDENADA DE LOS 3-ANILLOS*

Lorenzo Acosta

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Abstract. We present the well-known order structure of the 3-rings, using only ring operations and avoiding the use of idempotent elements.

Key words and phrases. p-rings, Boolean rings, distributive lattices, Post lattices, idempotent elements.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 06D99. Secondary 16A32, 16A45.

Resumen. Mostramos la bien conocida estructura ordenada de los 3-anillos, utilizando únicamente las operaciones del anillo y evitando el uso de las descomposiciones de sus elementos en términos de idempotentes.

Introducción

Se sabe desde hace mucho tiempo que los p-anillos tienen una estructura de retículo de Post (ver [B], [B-D]). Para determinar esta estructura el instrumento fundamental lo constituye el retículo de Boole de los idempotentes del anillo. En efecto, puede probarse que si A es un p-anillo y x es un elemento de A, entonces x tiene dos expresiones en términos de los idempotentes de A. Por un lado, x puede expresarse de manera única en la forma

$$x = \sum_{i=1}^{p-1} i x_i \quad \text{(expresión disyunta)}$$

* Este trabajo fue presentado en el XII Encuentro de Topología realizado en la sede de la Universidad del Valle en Santafé de Bogotá, en octubre de 1994

donde los x_i son idempotentes ortogonales de A. Por otro lado, x tiene una expresión única de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{p-1} x^{(i)} \quad \text{(expresión decreciente)}$$

donde los $x^{(i)}$ son idempotentes de A tales que $x^{(i)} \geq x^{(i+1)}$ para $i = 1, ..., p-2$. (Aclaremos aquí que si a y b son idempotentes decimos que $a \leq b$ si $ab = a$). Teniendo en cuenta estas descomposiciones, podemos definir un orden en el anillo A que extiende al orden del anillo de sus idempotentes, de la siguiente manera:

$$x \leq y \qquad \text{si y solamente si} \qquad x_i \leq y^{(i)} \qquad \text{para } i = 1, ..., p-1.$$

Puede probarse que $(A, \leq)$ resulta un retículo distributivo que, en la categoría de los retículos distributivos con mínimo y máximo, es el coproducto de un retículo de Boole con una cadena. En otras palabras, $(A, \leq)$ es un retículo de Post (ver [B-D]).

Debido a la manera en que se definió el orden, todas sus propiedades se deducen utilizando las expresiones disyunta y decreciente de los elementos de A. El propósito de este artículo es mostrar la estructura ordenada de los 3-anillos sin utilizar explícitamente estas descomposiciones en términos de idempotentes. En otras palabras, se quiere mostrar una definición del orden utilizando únicamente las operaciones del anillo. Específicamente, se mostrará que

$$x \leq y \qquad \text{si y solamente si} \qquad x = x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2).$$

De la misma manera se encontrarán expresiones explícitas para los extremos superior e inferior de dos elementos.

El trabajo que aquí se presenta para los 3-anillos, puede evidentemente hacerse para un $p > 3$, pero los cálculos son bastante más complicados.

1. El anillo de Boole asociado a un anillo conmutativo

Enunciaremos aquí algunas propiedades conocidas de los retículos y los anillos de Boole y la forma en que a un anillo conmutativo cualquiera puede asociársele un anillo de Boole.

Recordemos, primero que todo, que un *retículo* es un conjunto ordenado en el cual todo par de elementos $\{a, b\}$ posee una mínima cota superior, notada $a \vee b$, y una máxima cota inferior, notada $a \wedge b$. Si el retículo tiene mínimo, éste se notará m y si tiene máximo, éste se notará M. Se dice que el retículo L es *distributivo* si $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para todo $a, b, c \in L$. Esto es equivalente a que $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ para todo $a, b, c \in L$, luego en un retículo distributivo las operaciones de sup e inf son mutuamente distributivas.

Dado un retículo L con mínimo y máximo, se dice que un elemento $a \in L$ es un *complemento* del elemento $b \in L$, si $a \vee b = M$, y, $a \wedge b = m$. Cuando el retículo es distributivo el complemento de un elemento es único en caso de que exista. Se dice que un retículo distributivo con mínimo y máximo es de *Boole* si todo elemento tiene un complemento. El ejemplo típico de retículo de Boole es el conjunto $P(X)$ de las partes de un conjunto X, ordenado por inclusión. En este caso $M = X$, $m = \varnothing$, $A \vee B$ es la reunión de A y B, $A \wedge B$ es la intersección de A y B y el complemento, A', de A es el conjunto $X - A$.

Por otro lado un anillo B con unidad en el que se satisface $x = x^2$ para todo elemento $x \in B$, se llama un anillo de Boole. Puede probarse sin dificultad que todo anillo de Boole es conmutativo y que $2x = 0$ para todo $x \in B$. Si se define en el anillo de Boole B la siguiente relación

$$x \leq y \qquad \text{si y solamente si} \qquad x = xy$$

tenemos que $(B, \leq)$ tiene una estructura de retículo de Boole, donde el mínimo es 0, el máximo es 1, el complemento de x es $1 - x$, $x \wedge y = xy$, $x \vee y = x + y + xy$. Es más, la categoría de los anillos de Boole es equivalente a la categoría de los retículos de Boole (ver [B-D], [A2], [H]).

Nota 1.1. Si el anillo B no tiene unidad, la relación de orden definida arriba sigue dando a B una estructura de retículo distributivo, pero sin elemento máximo (ver [B-D], [A2]).

Sea ahora A un anillo conmutativo con unidad. Un elemento $x \in A$ se llama idempotente si $x = x^2$. El conjunto $Ip(A)$ de todos los idempotentes de A es cerrado para el producto pero no para la suma, por lo que no es un subanillo de A. Sin embargo, si modificamos la suma definiendo

$$a \oplus b = a + b - 2ab,$$

$(Ip(A), \oplus, .)$ tiene una estructura de anillo de Boole y, por consiguiente, es también un retículo de Boole.

Ejemplos.

- (i) Sea $A = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $Ip(A) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ y como anillos de Boole $Ip(A) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong P(\{0,1\})$.
- (ii) Si A es un dominio de integridad, $Ip(A) \cong \mathbb{Z}_2$.
- (iii) Si A es un anillo de Boole, $Ip(A) = A$.

Otro hecho bien conocido es que si el anillo de Boole B es finito, es isomorfo a un anillo de partes y, por consiguiente, su cardinal es una potencia de 2.

2. Idempotentes en los p-anillos

En este parágrafo se definirá la noción de p-anillo y se hará la deducción de las expresiones disyunta y decreciente de las que se habló en la introducción. Estas expresiones se utilizarán más adelante para definir el orden en un p-anillo y para calcular el cardinal de un p-anillo finito.

Definición 2.1. *Sea p un número primo. Un p-anillo es un anillo A en el que se satisfacen las identidades $px = 0$ y $x^p = x$ para todo elemento x de A.*

En otras palabras, un p-anillo es una $\mathbb{Z}_p$-álgebra asociativa en la que $x^p = x$ para todo elemento x.

Nota 2.2. Es un hecho conocido que todo anillo en el que $x^{n(x)} = x$ para todo x, es conmutativo y por consiguiente los p-anillos son anillos conmutativos (ver [B], [J], [L]).

Ejemplos.

(i) Los 2-anillos con unidad son exactamente los anillos de Boole.
(ii) $\mathbb{Z}_p$ es un p-anillo.
(iii) Si A es un p-anillo y X es un conjunto cualquiera, el anillo A^X, de las funciones de X en A, es un p-anillo.

Sea ahora A un p-anillo con unidad y supongamos que para $x \in A$ existen $x_1, ..., x_{p-1}$ en $Ip(A)$ tales que $x_i x_j = 0$ si $i \neq j$ y $x = \sum_{i=1}^{p-1} ix_i$. Para encontrar los x_i en términos de x se establece el siguiente sistema de $p-1$ ecuaciones con $p-1$ incógnitas:

$$\begin{aligned} x &= 1x_1 + 2x_2 + ... + (p-1)x_{p-1} \\ x^2 &= 1x_1 + 2^2 x_2 + ... + (p-1)^2 x_{p-1} \\ &... \\ x^{p-1} &= 1x_1 + 2^{p-1}x_2 + ... + (p-1)^{p-1}x_{p-1} \end{aligned}$$

que matricialmente se escribe

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p-1 \\ 1 & 2^2 & \cdots & (p-1)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^{p-1} & \cdots & (p-1)^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ \cdots \\ x^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Nótese que la matriz asociada al sistema es la matriz de Van der Monde, que, para p primo, es invertible y su inversa es

$$\frac{1}{p-1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2^{p-2} & \cdots & 2^2 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (p-1)^{p-2} & \cdots & (p-1)^2 & p-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota 2.3. Si p no es primo, la matriz no necesariamente es inversible en $M_{p-1}(\mathbb{Z}_p)$. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_4$ dicha matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es cero. Tenemos entonces que el sistema tiene solución única y cada elemento de A tiene una expresión disyunta única.

Ejemplos.

(i) En los anillos de Boole la descomposición de un elemento tiene un solo término.
(ii) Para un 3-anillo A, tenemos que x en A se puede escribir en la forma $x = a+2b$ con a y b idempotentes ortogonales. Para hallar a y b establecemos el sistema

$$\begin{aligned} x &= a + 2b \\ x^2 &= a + b \end{aligned}$$

de donde $a = 2x + 2x^2$ y $b = x + 2x^2$. Un cálculo directo nos muestra que en efecto $a^2 = a\,,\ b^2 = b\,,\ ab = 0$ y $a + 2b = x$.

A partir de la expresión disyunta de un elemento x de A, podemos construir otra de la forma $x = \sum_{i=1}^{p-1} x^{(i)}$, donde los $x^{(i)}$ son idempotentes del anillo tales que $x^{(i)} \geq x^{(i+1)}$ para $i = 1, ..., p-2$. En efecto, podemos definir $x^{(i)} = \sum_{j=i}^{p-1} x_j$ y así

$$x^{(i)}x^{(i+1)} = (\sum_{j=i}^{p-1} x_j)(\sum_{k=i+1}^{p-1} x_k) = \sum_{j=i}^{p-1} \sum_{k=i+1}^{p-1} x_j x_k = x^{(i+1)},$$

de donde $x^{(i)} \geq x^{(i+1)}$. Además,

$$\sum_{i=1}^{p-1} x^{(i)} = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i}^{p-1} x_j = \sum_{i=1}^{p-1} i x_i = x.$$

Puede probarse igualmente que esta descomposición como suma de idempotentes decrecientes, llamada *expresión decreciente* de x, es también única.

Ejemplos.

(i) En un anillo de Boole las expresiones decreciente y disyunta coinciden.

(ii) En el 3-anillo A, si la expresión disyunta de x es $x = a + 2b$, entonces su expresión decreciente es $x = (a+b)+b$. Es decir que $x^{(1)} = a+b$ y $x^{(2)} = b$.

3. Cardinal de un p-anillo

Mostraremos aquí, con ayuda de las expresiones disyuntas de sus elementos, que un p-anillo A es finito si, y solamente si, su anillo de idempotentes $B = Ip(A)$ es finito. En este caso, si el cardinal de B es 2^n entonces el cardinal de A es p^n.

Sea A un p-anillo y sea $B = Ip(A)$ el anillo de Boole de sus idempotentes. Debido a la expresión disyunta de los elementos de A, existe una biyección entre el conjunto A y el conjunto $H = \{(a_1, ..., a_{p-1}) \in B^{p-1} | a_i a_j = 0 \text{ para } i \neq j\}$. Claramente A es finito si y solamente si B es finito. Supongamos ahora que B es finito. B resulta entonces isomorfo a $P(X)$ para algún conjunto finito X. Si X tiene n elementos B tendrá 2^n elementos. Puede probarse sin mayor dificultad, usando inducción sobre p, que el cardinal de A resulta ser p^n. Como ilustración veamos el caso $p = 3$:

B es isomorfo a $P(X)$ para un conjunto X de n elementos y A corresponde biyectivamente con el conjunto $H = \{(U, V) \in P(X) \times P(X) | U \cap V = \varnothing\}$. Fijemos ahora un subconjunto U de X de cardinal k. El número de subconjuntos de X disyuntos de U es precisamente el cardinal de $P(X - U)$, es decir 2^{n-k}. Como el número de subconjuntos U de X de cardinal k es $\binom{n}{k}$, tenemos que el cardinal de H es $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$.

En resumen tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Sean A un p-anillo y B su anillo de idempotentes. A es finito si y solamente si B es finito y en este caso, el cardinal de B es 2^n si y solamente si el cardinal de A es p^n.*

4. Orden en los p-anillos

En este parágrafo recordaremos cómo se define el orden en un p-anillo a partir de las expresiones disyunta y decreciente de sus elementos y enunciaremos un teorema que resume las propiedades de este orden. También se encuentra la extensión booleana libre de un p-anillo.

Dado un p-anillo A se define una relación de orden entre sus elementos de la siguiente manera:

$$x \leq y \qquad \text{si y solamente si} \qquad x_i \leq y^{(i)} \qquad \textit{para} \qquad i = 1, ..., p-1,$$

donde x_i y $y^{(i)}$ son las componentes de las expresiones disyunta de x y decreciente de y respectivamente, y el orden de la derecha es el orden en el anillo de Boole de los idempotentes de A. Esta relación extiende naturalmente el orden de $Ip(A)$ ya que si x e y son idempotentes su expresiones disyunta y decreciente son triviales. De ahora en adelante el signo $\leq$ se utilizará para designar esta relación de orden. Algunas de las propiedades de este orden están dadas por el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Si A es un p-anillo entonces:*
- (i) *$(A, \leq)$ es un retículo distributivo.*
- (ii) *0 es el mínimo de A y $p-1$ es el máximo de A.*
- (iii) *x es inversible si y solamente si $x \geq 1$.*
- (iv) *x es idempotente si y solamente si $x \leq 1$.*
- (v) *El orden restringido a $\mathbb{Z}_p$ es $0 \leq 1 \leq 2 \leq ... \leq p-1$.*
- (vi) *La aplicación $x \to x+1$ es un isomorfismo de conjuntos ordenados entre $[j; j+1]$ y $[j+1; j+2]$ para $j = 0, 1, ..., p-3$, donde $[a; b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}$.*

Teniendo en cuenta la propiedad (vi) y el hecho que, de acuerdo con (iv), $Ip(A) = [0; 1]$, podemos concluir el siguiente corolario (ver [A1]):

Corolario 4.1. *La extensión booleana libre de $(A, \leq)$ es B^{p-1} donde $B = Ip(A)$.*

5. El orden en los 3-anillos

El objeto de este parágrafo es mostrar una definición del orden en un 3-anillo utilizando únicamente las operaciones del anillo y sin recurrir a los idempotentes. También se encontrarán expresiones explícitas para el extremo superior y el inferior de dos elementos y se demostrará el teorema 4.1 para el caso de los 3-anillos.

Lema 5.1. *Sea A un 3-anillo. La aplicación $x \to x^2$ de A en $Ip(A)$ es un morfismo suryectivo de conjuntos ordenados. Por consiguiente, si $x \leq y$ en A, entonces $x^2 = x^2y^2$.*

En efecto, si x e y son elementos de A, tenemos las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned}
x \leq y &\Longrightarrow x_1 \leq y^{(1)}, \quad x_2 \leq y^{(2)} \\
&\Longrightarrow (x+x^2)y^2 = x + x^2, \quad (x-x^2)(y-y^2) = x - x^2 \\
&\Longrightarrow xy^2 + x^2y^2 - x - x^2 = 0, \quad xy - xy^2 - x^2y + x^2y^2 - x + x^2 = 0 \\
&\Longrightarrow x^2 = xy - x^2y + xy^2.
\end{aligned}$$

Ahora bien, el miembro derecho de esta última igualdad queda invariante al multiplicarlo por y^2, de donde obtenemos $x^2y^2 = x^2$.

Teorema 5.2. *Sea A un 3-anillo. Dados x e y elementos de A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $x \leq y$
(ii) $x = x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2)$
(iii) $y = x + y - x^2y^2 - (x - x^2)(y - y^2)$

Demostración. Evidentemente (ii) y (iii) son equivalentes. Veamos ahora que (i) equivale a (ii):
$(i) \Longrightarrow (ii)$: En la demostración del lema anterior vimos que si $x \leq y$ entonces

$$xy - xy^2 - x^2y + x^2y^2 - x + x^2 = 0,$$

y, como $x^2 = x^2y^2$, tenemos que

$$x = xy - xy^2 - x^2y + x^2y^2 + x^2y^2 = x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2).$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Si $x = x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2)$ entonces

$$x^2 = x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2) - (x - x^2)(y - y^2) = x^2y^2,$$

de donde $x = xy^2$. Por lo tanto $(x + x^2)y^2 = x + x^2$, y, $(x - x^2)(y - y^2) = x - x^2$, lo que equivale a $x \leq y$.

Teorema 5.3. *Sea A un 3-anillo. Si x e y son elementos de A entonces $x \wedge y$ y $x \vee y$ existen en A, y además*

$$\begin{aligned} x \wedge y &= x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2) \\ x \vee y &= x + y - x^2y^2 - (x - x^2)(y - y^2). \end{aligned}$$

Demostración. Mostraremos únicamente que $x \wedge y = x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2)$, dejando la segunda parte del teorema como ejercicio para el lector. Sea $z = x^2y^2 + (x-x^2)(y-y^2)$. Para ver que $z \leq x$ calculamos, de acuerdo con el teorema anterior,

$$\begin{aligned} x^2z^2 + (x - x^2)(z - z^2) &= x^2x^2y^2 + (x - x^2)(x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2) - x^2y^2) \\ &= x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2) \\ &= z. \end{aligned}$$

Por simetría se obtiene también $z \leq y$. Sea ahora w una cota inferior de x y de y. Veamos que $w \leq z$. Por el lema 5.1 tenemos que $w^2 = w^2x^2 = w^2y^2$ y entonces

$$\begin{aligned} z^2w^2 + (z - z^2)(w - w^2) &= x^2y^2w^2 + (x - x^2)(y - y^2)(w - w^2) \\ &= w^2 + (x - x^2)(w - w^2) \\ &= w^2 + w - w^2 \\ &= w. \end{aligned}$$

Probemos ahora el teorema 4.1 para el caso $p = 3$:

(i) El teorema anterior nos dice que $(A, \leq)$ es un retículo. Falta ver que es distributivo:

$$\begin{aligned}
x \wedge (y \vee z) &= x^2(y \vee z)^2 + (x - x^2)(y \vee z - (y \vee z)^2) \\
&= x^2(y + z - y^2z^2 - (y - y^2)(z - z^2))^2 + (x - x^2)(y + z \\
&\quad - y^2z^2 - (y - y^2)(z - z^2 - (y + z - y^2z^2 - (y - y^2)(z - z^2))^2) \\
&= x^2(y^2 + z^2 - y^2z^2) + (x - x^2)(y + z - y^2 - z^2 - (y - y^2)(z - z^2)) \\
&= xy + xz - xy^2 - xz^2 - x^2y - x^2z - x^2y^2 - x^2z^2 \\
&\quad - x^2y^2z^2 - (x - x^2)(y - y^2)(z - z^2).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= (x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2)) \vee (x^2z^2 + (x - x^2)(z - z^2)) \\
&= x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2) + x^2z^2 + (x - x^2)(z - z^2) - x^2y^2x^2z^2 \\
&\quad - (x - x^2)(y - y^2)(x - x^2)(z - z^2) \\
&= x^2y^2 + (x - x^2)(y - y^2) + x^2z^2 + (x - x^2)(z - z^2) \\
&\quad - x^2y^2z^2 - (x - x^2)(y - y^2)(z - z^2) \\
&= xy + xz - xy^2 - xz^2 - x^2y - x^2z - x^2y^2 - x^2z^2 \\
&\quad - x^2y^2z^2 - (x - x^2)(y - y^2)(z - z^2).
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, de donde $(A, \leq)$ es un retículo distributivo.

(ii) Sea y en A. $0 \wedge y = 0$, de donde $0 \leq y$. Además, $2 \wedge y = y^2 + (2 - 1)(y - y^2) = y^2 + y - y^2 = y$, luego $y \leq 2$.

(iii) Si x es inversible, de $x^3 = x$ deducimos $x^2 = 1$. Entonces $x \wedge 1 = x^2 = 1$ y así $1 \leq x$. Recíprocamente, si $1 \leq x$ tenemos que $1 = x \wedge 1 = x^2$ y así x es inversible.

(iv) Si x es idempotente, $x \wedge 1 = x^2 = x$, de donde $x \leq 1$. Por otro lado, si $x \leq 1$, $x = x \wedge 1 = x^2$, luego x es idempotente.

(v) Evidente.

(vi) Veamos primero que $\varphi : [0; 1] \longrightarrow [1; 2] : x \to x + 1$ está bien definida. En efecto si x está en [0;1] entonces $x = x^2$, y, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 1$. Así $x + 1$ es inversible y entonces pertenece a [1;2]. Como φ es claramente biyectiva solo falta ver que respeta el orden. Sean x e y en [0;1] tales que $x \leq y$. Entonces $x = xy$. Calculemos ahora

$$\begin{aligned}
\varphi(x) \wedge \varphi(y) &= \varphi(x)^2\varphi(y)^2 + (\varphi(x) - \varphi(x)^2)(\varphi(y) - \varphi(y)^2) \\
&= (x + 1)^2(y + 1)^2 + (x + 1 - 1)(y + 1 - 1) \\
&= 1 + xy \\
&= 1 + x \\
&= \varphi(x),
\end{aligned}$$

de donde $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Bibliografía

[A1] L. Acosta, *Extensiones Booleanas libres de retículos distributivos*, Lecturas Matemáticas **15** (1994), no. 1, 1–8.

[A2] L. Acosta, N. Bateman, R. Isaacs, S. Monsalve, M. Ospina & C. Ruiz, *Una aproximación booleana a la topología general*, 4° Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, 1987.

[B] A. Batbedat, *p–Anneaux*, Faculté des Sciences de Montpellier, 1968–1969.

[B-D] R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Columbia, 1974.

[E] G. Epstein, *The lattice theory of Post Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 300–317.

[G] G. Grätzer, *Lattice Theory*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1971.

[H] P. Halmos, *Lectures on Boolean algebras*, Springer, Berlin, 1974.

[J] N. Jacobson, *Structure of Rings*, American Mathematical Society, 1964.

[L] L. Lesieur, *Sur les anneaux tels que $x^n = x$*, Séminaire Dubreil–Pisot (Algèbre et théorie des nombres) 19 année, 1965–1966, pp. 1–8.

(Recibido en noviembre de 1994)

Lorenzo Acosta Gempeler
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, COLOMBIA
e-mail: loacosta@ciencias.campus.unal.edu.co