This is a reprint of the paper
Un modelo matemático para la sensación de 'caliente o frío'
by Yu Takeuchi
published in **Lecturas Matemáticas**
15 (1994), pp. 193–201

UN MODELO MATEMÁTICO PARA LA SENSACIÓN DE 'CALIENTE O FRÍO' *

Yu Takeuchi

Abstract. When an object at room temperature is touched there is a transfer of calorific energy from the hand to the object. In this paper we present a mathematical model describing this transfer of heat. The conclusion is: the feeling of coldness upon touching an object "depends" on $\sqrt{\rho c K}$, where ρ is the density, c is the specific heat and K is the conductivity of the object.

Key words and phrases. Heat equation, calorific conductivity, transfer of calorific energy, separation of variables method.

1991 AMS Subject classification. Primary: 35K05.

Resumen. Al tocar un objeto a la temperatura ambiente habrá un escape de energía calorífica de la mano hacia el objeto. En este artículo se presenta un modelo matemático para calcular la cantidad de calor que se escapa de la mano hacia el objeto. Se concluye que la sensación de 'frío' al tocar un objeto "depende" de $\sqrt{\rho c K}$, donde ρ es la densidad, c es el calor específico y K es la conductividad del objeto.

Modelos matemáticos

En física no sólo se observan los fenómenos de la naturaleza: también se buscan explicaciones aproximadas (lo mejor posible) del por qué se presentan tales fenómenos. Como en la naturaleza intervienen muchos parámetros, la situación se idealiza, con el fin de poder tratarla en términos matemáticos; y basándose en las leyes básicas de la física (expresadas también en términos matemáticos), se establecen entonces las ecuaciones que describen el fenómeno natural (*modelo matemático*). La solución del modelo matemático, interpretada adecuadamente en el mundo real, debe ofrecer una explicación convincente del fenómeno estudiado. Mostraremos cómo funciona esto en el caso de un ejemplo interesante.

* Este artículo fue presentado en las *V Jornadas Nacionales de Matemáticas*, Universidad Javeriana, Bogotá, noviembre de 1993.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

El ejemplo.

En un seminario de matemática y física en Ibagué, Tolima, en abril de 1993, asistí a un taller sobre la enseñanza de la ciencia en los niveles básicos desde una perspectiva de no diferenciación, presentado por el grupo Física y Cultura, de la Universidad Pedagógica Nacional. La profesora mostró dos cubos, uno de metal (tal vez de acero) y otro de madera, los cuales, según ella, habían sido dejados expuestos varias horas a la temperatura ambiente (unos 20° C), y nos pidió que los tocaramos. Al tocar el cubo metálico tuve una sensación de 'frío', y al tocar el cubo de madera, una sensación de 'caliente'. La profesora nos preguntó ¿por qué un cubo estaba caliente y el otro estaba frío, a pesar de que ambos cubos debían tener la misma temperatura? Una maestra manifestó que el cubo metálico era "más compacto" (yo no sé qué quiere decir "compacto" en física). Yo manifesté que el fenómeno era "muy complicado", ya que intervenían muchos factores, y que era necesario plantear un modelo matemático para interpretar correctamente dicho fenómeno. No comprendí lo que buscaba la profesora del taller con este experimento elemental pero relacionado con un fenómeno bastante complicado.

Un modelo matemático para el problema de la sensación de 'frío' o 'caliente'.

Al tocar un objeto a la temperatura del ambiente (20° C) habrá un escape de calor desde la mano (36° C) hacia el objeto (20° C). Si la cantidad de energía calorífica que se escapa de la mano es mayor entonces "se siente más frío" el objeto. Vamos a calcular, aproximadamente, tal energía calorífica.

Como se puede ver en la Figura 1, una parte de la energía calorífica que entra al cubo sale al ambiente a través de la superficie lateral del cubo. Este hecho nos causaría una seria dificultad para resolver nuestro problema. Para evitar esta dificultad, vamos a suponer que el calor no atraviesa por la superficie lateral del cubo, o sea que el flujo del calor es "perpendicular" a la superficie del cubo (Figura 2). Además, supondremos que la temperatura T_1 de la mano es constante (36° C), y que la temperatura T_0 de la mesa es constante (20° C) e igual a la del ambiente.

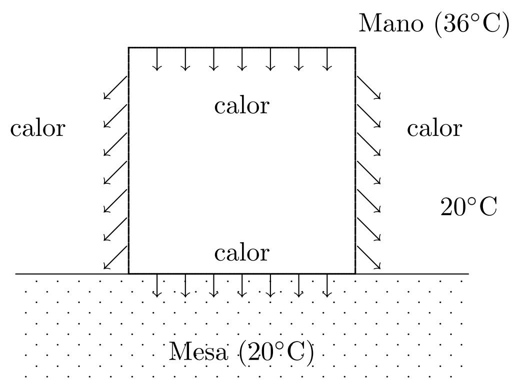

Figura 1

Sean L el espesor del cubo, x la distancia a la superficie superior, t el tiempo.

Supondremos $t = 0$ en el momento en que la mano toca el cubo.

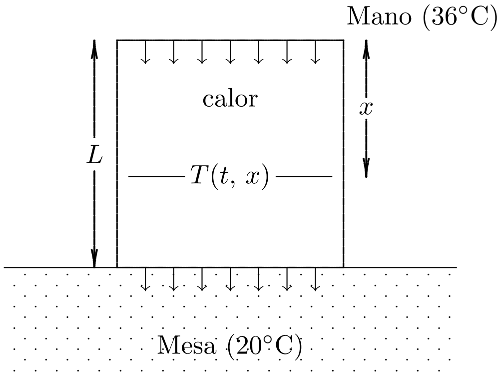

Figura 2

Sea $T(t, x)$ la temperatura del cubo en la posición x y en el momento t. Entonces $T(t, x)$ satisface la ecuación de la transmisión del calor([1], 10.5):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

donde ρ es la densidad, c es el calor específico y K es la conductividad del material. Dividiendo la ecuación anterior por ρc, se obtiene que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

donde $\kappa^2 = \frac{K}{\rho c}$. La constante κ^2 se llama *coeficiente de transmisión del calor*.

En el instante inicial ($t = 0$), tenemos que

$$T(0, x) = T_0 \ \ (= 20^\circ C) \qquad \text{(condición inicial).} \tag{2}$$

Recuérdese que T_0 es la temperatura del ambiente. Al tocar con la mano (36° C en el instante $t = 0$) obtenemos, para $t > 0$, las condiciones de frontera):

$$\begin{cases} T(t, 0) = T_1 & \text{(36° C, temperatura de la mano),} \\ T(t, L) = T_0 & \text{(20° C, temperatura de la mesa).} \end{cases} \tag{3}$$

Es decir, suponemos que la temperatura de la mano y del medio ambiente no cambian a lo largo del experimento.
Obtenemos así un problema netamente matemático: resolver la ecuación diferencial parcial (1), de acuerdo con la condición inicial (2) y bajo las condiciones de frontera (3).

Solución matemática.

Sea

$$T(t,x) = T_1 - \frac{T_1 - T_0}{L} \cdot x + S(t,x). \tag{4}$$

Entonces, de (1), $S(t,x)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa^2 \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}. \tag{5}$$

Además, $S(t,x)$ satisface las siguientes condiciones:

$$S(t,0) = S(t,L) = 0 \text{ para } t > 0 \quad \text{(condiciones de frontera)} \tag{6}$$

$$S(0,x) = \frac{T_1 - T_0}{L} \cdot (x - L) \quad \text{(condición inicial)}. \tag{7}$$

Supongamos, según el método de separación de variables ([1], Chap.10), que $S(t,x)$ es un producto de dos funciones $\theta(t)$ y $X(x)$, es decir, que

$$S(t,x) = \theta(t) \cdot X(x). \tag{8}$$

Reemplazando (8) en (4), tenemos que

$$\theta'(t) \cdot X(x) = \kappa^2 \cdot \theta(t) \cdot X''(x).$$

Dividiendo por $\theta(t) \cdot X(x)$ se obtiene que

$$\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = \kappa^2 \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

donde λ es una constante (la constante de separación). Entonces

$$\theta'(t) = -\lambda^2 \cdot \theta(t), \qquad X''(x) + \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \cdot X(x) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\theta(t) = \exp(-\lambda^2 t), \quad X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda}{\kappa} x\right) \quad \text{ó} \quad \cos\left(\frac{\lambda}{\kappa} x\right),$$

donde exp es la función exponencial. De acuerdo con las condiciones de frontera (6), tenemos que escoger la solución sen $\frac{\lambda}{\kappa} x$. Además, la constante de separación λ debe satisfacer

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda}{\kappa}\, L\right) = 0,$$

o sea,

$$\frac{\lambda}{\kappa} = \frac{n\pi}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Por la linealidad de la ecuación diferencial (5), tendremos la siguiente solución general, que satisface las condiciones de frontera (6) (1, 10.5):

$$S(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\ \pi\ x}{L}\right) \cdot \exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right) \cdot t. \tag{9}$$

Los coeficientes $b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ se determinan de acuerdo con la condición inicial (7). Así ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\ \pi\ x}{L}\right) = \frac{T_1 - T_0}{L} \cdot (x - L).$$

De la ortogonalidad de las funciones sen $\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $\quad n = 1, 2, 3, \dots$, en $[0, L]$, se deduce que

$$b_n = \frac{T_1 - T_0}{L} \cdot \frac{\int_0^L (x - L) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx} = -\frac{2}{n\pi}(T_1 - T_0), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De (4) obtenemos finalmente la siguiente solución de la ecuación diferencial parcial (1), que satisface las condiciones (2) y (3):

$$T(t, x) =$$
$$T_1 - (T_1 - T_0) \cdot \left[\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2} \cdot t\right)\right]. \tag{10}$$

Análisis de la solución.

Estamos interesados en calcular la cantidad de calor (energía calorífica) que sale de la mano; más precisamente, la cantidad de calor (la llamaremos A) que atraviesa la superficie superior ($x = 0$) por unidad de área, y en el intervalo de tiempo entre $t = 0$ y $t = \triangle t$. En física sabemos que la cantidad de calor que atraviesa perpendicularmente la superficie $x = 0$ (por unidad de área, y por unidad de tiempo) es

$$-K \cdot \left(\frac{\partial T(t, x)}{\partial x}\right)_{x=0}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$A = -\int_0^{\triangle t} K \cdot \left(\frac{\partial T(t, x)}{\partial x}\right)_{x=0} dt \ \ \text{(por unidad de área)}.$$

Por ejemplo, tomando $\triangle t = 1$ segundo, y reemplazando la solución dada en (10), obtenemos la cantidad A como sigue:

$$A = \frac{K \cdot (T_1 - T_0)}{L} \cdot \left[1 + \frac{2L^2}{\pi^2\kappa^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right)\right)\right]. \tag{11}$$

El valor de A.

En la práctica, $\frac{\pi^2\kappa^2}{L^2}$ es pequeño (para L relativamente grande ver la tabla 1). Sin embargo, si n es grande entonces $\frac{n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}$ es grande, así que $\exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right) \approx 0$. Por lo tanto,

$$1 - \exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right) \approx 1.$$

La serie que aparece en (11) converge entonces “lentamente”. Si calculamos el valor de la suma con $N-1$ términos, el error de cálculo es:

$$\text{“error”} \; = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(1-\exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right)\right) \sim \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{N}.$$

Por ejemplo, si se quiere que el error sea menor que 0.001, se debe calcular la serie hasta el milésimo término.
Teniendo en cuenta que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(1-\exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right)\right) = \\
&\quad \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2}\cdot\exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right) - \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right).
\end{aligned}$$

Si aproximamos *la serie infinita* por *la suma finita*, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\left(1-\exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right)\right) \sim \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2}\cdot\exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right), \tag{12}$$

y el error del cálculo es

$$\begin{aligned}
\text{“error”} \; &= \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right) \\
&< \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\exp\left(\frac{-N^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right) \sim \frac{1}{N}\cdot\exp\left(\frac{-N^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right).
\end{aligned}$$

Por ejemplo, tomando $L = 5$cm, se tiene que $\dfrac{\pi^2\kappa^2}{L^2} = 0.00076$ para el caso de la madera (ver la tabla 1). Si $N = 61$, entonces

$$\text{“error”} \; < \frac{1}{61}\cdot\exp(-2.82) \sim 9.8X10^{-4} < 0.001,$$

o sea que basta calcular 60 términos de la suma finita dada en (12) para que el error de cálculo sea menor que 0.001.

En la tabla 1 se muestra el valor de A (cal/cm^2) para $L = 1$ cm y para $L = 5$ cm.

	ρ	C	K	κ^2	A(1)	A(2)
acero	7.86	0.11	0.151	0.175	6.521	6.512
madera	0.52	0.33	0.33×10^{-3}	0.00192	0.137	0.135
vidrio	2.20	0.20	3.4×10^{-3}	0.00773	0.698	0.699

Tabla 1

Observamos que el valor de A (la cantidad de calor que se escapa de la mano al tocar el cubo) es, para el acero, "50 veces mayor" que el valor de A para la madera, y el valor de A para el vidrio es "5 veces mayor" que el valor de A para la madera. Por esta razón, al tocar el cubo metálico tenemos la sensación de 'frío', mientras que tenemos la sensación de 'caliente' al tocar el cubo de madera. Es interesante observar también que el valor A no parece depender del espesor de los objetos (en tanto este espesor sea relativamente grande).

Fórmula aproximada para el valor de A.

Podemos aproximar la serie en la fórmula (11) por medio de una integral impropia, en la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa^2}{L^2}\right)\right) \sim$$
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-\pi^2\kappa^2}{L^2} \cdot t^2\right)\right) dt = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\pi\kappa}{L}. \tag{13}$$

Reemplazando (13) en (11), y "despreciando" el 1 dentro del corchete en (11), se obtiene que

$$A \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\rho c K} \cdot (T_1 - T_0), \tag{14}$$

lo cual muestra la independencia de L (para valores relativamente grandes de L). En la tabla 2 aparecen los valores de A, (1) para $L = 1$ cm de la tabla 1, (2) para $L = 5$ cm de la tabla 1, y (3) dados por la fórmula (14). Puede observarse que la fórmula (14) es bastante precisa.

	A(1)	A(2)	A(3)
acero	6.521	6.512	6.518
madera	0.137	0.135	0.135
vidrio	0.698	0.699	0.699

Tabla 2

Conclusión.

No podemos decir que la sensación de 'frío' al tocar un objeto es proporcional al valor de $\sqrt{\rho c K}$ del objeto, ya que la sensación humana no es lineal con respecto al estímulo energético que la causa. Sin embargo, podemos afirmar que si el valor $\sqrt{\rho c K}$ del objeto es mayor, entonces éste nos da una mayor sensación de 'frío' al tocarlo.

Bibliografía

1.. Erwin Kreyszig , *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, N.Y., 1964.

Yu Takeuchi
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, COLOMBIA