

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE
COMPLEJA ; V

JAIRO CHARRIS C.

CAPITULO XI

FUNCIONES ANALITICAS Y SERIES DE TAYLOR

1. Series de Taylor

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Se define el límite superior de a_n , y se denota por $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{m \geq n} a_m)$$

Si

$$b_n = \sup_{m \geq n} a_m$$

la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente. Por lo tanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Teorema 1.1. Sea $a \in \mathbb{R}$. Las proposiciones (a) y (b) siguientes son equivalentes :

(a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

(b) (i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq n$, $a_m < a + \varepsilon$.

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \geq n$ tal que $a_m > a - \varepsilon$.

Demostración Demostremos primero que (a) implica (b). Tenemos que demostrar que (i) y (ii) son válidas, bajo las hipótesis de que (a) es válida.

Demostremos (i). Sea $\varepsilon > 0$. Si $a + \varepsilon \leq \sup_{m \geq n} a_m$ para todo n , necesariamente

$$a + \varepsilon \geq a + \inf_{n \geq m} (\sup_{k \geq m} a_k),$$

lo cual es absurdo. Debe existir entonces n tal que

$$\sup_{m \geq n} a_m < a + \varepsilon$$

Esto implica que $a_m < a + \varepsilon$ para todo $m \geq n$, y demuestra (i). Para demostrar (ii), sea $\varepsilon > 0$, y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \leq a - \varepsilon$ para todo $m \geq n$. Se tendría

$$\sup_{m \geq n} a_m \leq a - \varepsilon,$$

y de esto

$$a \leq a - \varepsilon,$$

también absurdo. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ debe existir $m \geq n$ con $a_m > a - \varepsilon$. Esto demuestra (ii). Demostremos ahora que (b) implica (a). La condición (i) implica que

$$\sup_{m \geq n} a_m \leq a + \varepsilon,$$

de lo cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} a_m \leq a + \varepsilon$$

La condición (ii) implica, por otra parte, que

$$\sup_{m \geq n} a_m \geq a - \varepsilon$$

para todo n , de lo cual

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a + \varepsilon$$

Se tiene entonces

$$|\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n - a| \leq \varepsilon,$$

y como ε es arbitrario,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Esto demuestra la afirmación.

Nota. Sea $-\infty \leq a \leq +\infty$. Nótese que decir que $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ es equivalente a decir a es el mayor número real tal que existe una subsucesión $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$ con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

Lema 10. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos y

$$a = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}$$

Entonces:

- Si $a < 1$, la serie s converge absolutamente.
- Si $a > 1$, s diverge.

Demostración: Demostremos (a). Sea $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon < 1$. Sea $m > 0$ tal que $|a_n|^{1/n} \leq a + \varepsilon$ para $m \geq n$. Entonces $|a_n| \leq (a + \varepsilon)^n$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a + \varepsilon)^n$ es evidentemente convergente, también $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ lo es. Esto demuestra (a). Para demostrar (b) escójense $a' \leq a$, $a' < \infty$ y $\varepsilon > 0$ tales que $|a_n| \geq (a' - \varepsilon)^n$ para infinitos valores de n y que $a'^{-\varepsilon} > 1$. Se deduce que $|a_n|$ no converge a 0, de lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Nota: Si $a = 1$ nada se puede concluir con respecto al comportamiento de

s. Ver los ejercicios al final. El lema 1.0 se conoce con el nombre de Test de la Raiz.

Lema 1.1. (Abel) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sea $a_n \in \mathbb{C}$. Sea $a \in \mathbb{C}$ y sea

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{1/n}$$

Entonces: (a) si $0 < b < +\infty$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{1.1}$$

converge absolutamente en $B_r(a)$, donde $r = \frac{1}{b}$.

La convergencia es además absolutamente uniforme sobre todo compacto $K \subseteq B_r(a)$. Si $z \notin B_r(a)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

diverge.

(b) Si $b=0$, (1.1) converge absolutamente en \mathbb{C} y absoluta y uniformemente en todo compacto K de \mathbb{C} .

(c) Si $b=+\infty$, (1.1) diverge en todo punto $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$.

Demostración. Para demostrar la primera afirmación de (a) es claramente suficiente demostrar que (1.1) converge absoluta y uniformemente en compactos de $B_r(a)$. Ahora, para ésto es claramente suficiente demostrar que la convergencia es uniforme sobre $B_s(a)$ para todo $0 < s < r$. Escribamos $B_s = B_s(a)$.

$$\sup_{z \in B_s} \left\{ \sum_{k=m}^{m+n} |a_k (z-a)^k| \right\} = \sup_{z \in B_s} \left\{ \sum_{k=m}^{m+n} |a_k| |z-a|^k \right\} \leq \sum_{k=m}^{m+n} |a_k| s^k$$

Se deduce que

$$\begin{aligned} \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=m}^{m+n} |a_k (z-a)^k| \right\| B_s &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{m+n} \| |a_k (z-a)^k| \| B_s \\ &\leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{m+n} |a_k| s^k = 0, \end{aligned}$$

pues $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| s^k$ es convergente, ya que (Test de la Raiz),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup |a_k|^{1/k} s = s \lim_{k \rightarrow \infty} \sup |a_k|^{1/k} = s \cdot \frac{1}{r} < 1$$

Supongamos ahora que $z \notin B_r(a)$. En tal caso, $|z-a| > r$, y es claro que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ diverge, pues

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup |a_k|^{1/k} |z-a| = |z-a| \cdot \frac{1}{r} > 1.$$

Esto demuestra (a). Para demostrar (b) el argumento es similar. Basta demostrar que para todo $R > 0$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=m}^{m+n} \| |a_k (z-a)^k| \| B_{R(a)} \right) = 0,$$

lo cual es evidente por ser $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| R^k$ convergente, debido a que (Test de la Raiz) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup |a_k|^{1/k} R = 0 < 1$.

Demostremos (c). Si $z \neq a$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{1/n} |z-a| = |z-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{1/n} = +\infty > 1.$$

lo cual implica la afirmación. Esto demuestra el lema.

Corolario. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{1/n} = b \leq +\infty.$$

Sea $r = \frac{1}{b}$, donde escribimos $r = +\infty$ si $b = 0$, $B_r(a) = \mathbb{C}$ si $r = +\infty$. Entonces, la función $f: B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in B_r(a),$$

es holomorfa en $B_r(a)$. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k}.$$

En particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{n!}{(n-k)!} a_n \right|^{1/(n-k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{1/n}.$$

Demostración. Escribamos

$$f_n(z) = a_n (z-a)^n, \quad z \in B_r(a).$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en compactos de $B_r(a)$,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

es holomorfa en $B_r(a)$. Como además

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$$

converge en compactos a $f^{(k)}$ para todo $k \geq 0$, todo se reduce a demostrar que

$$f_n^{(k)} = 0, \quad k > n.$$

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k}, \quad k \leq n.$$

lo cual es inmediato por inducción sobre k . Finalmente, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

converge en todo punto $z \in B_r(z)$, necesariamente

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-k]{|a_n|} = b$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto demuestra el corolario.

Una serie de funciones de la forma

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad (1.3)$$

se denomina una *serie de potencias* o *una serie de Taylor*. Para abreviar, la denominaremos una *T-serie*. En tal caso, si

$$b = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

y si escribimos

$$r = \frac{1}{b} \quad \text{si} \quad 0 < b < +\infty$$

$$r = 0 \quad \text{si} \quad b = +\infty$$

$$r = +\infty \quad \text{si} \quad b = 0,$$

r se denomina el radio de convergencia de la serie (1.3). Así mismo, se denomina dominio de convergencia de s al mayor conjunto abierto Ω tal que s converge para todo $z \in \Omega$. Es claro que

$$\Omega = B_r(a) \quad \text{si} \quad 0 < r \leq +\infty$$

donde r es el radio de convergencia de s , y donde convenimos que

$$B_r(a) = \mathbb{C}, \quad \text{si} \quad r = +\infty.$$

En el caso $r=0$ convendremos en que $B_r(a) = \emptyset$ y en este caso, $\Omega = \emptyset$.

El corolario al teorema (1.1) establece que toda serie de Taylor define en su dominio de convergencia una función holomorfa cuyo valor en $z \in \Omega$ es precisamente la suma de la serie. Las series (1.2) tienen a su vez un dominio de convergencia el cual contiene a Ω . No es difícil ver que el dominio de convergencia de tales series es precisamente Ω . Basta demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{n!}{(n-k)!} a_n \right|^{1/n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| a_n \right|^{1/n}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual es un ejercicio simple para el lector.

Si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z-a| = r$, nada se puede decir, en general, acerca de la convergencia de S en este punto. Algunas veces la serie diverge en todo punto del conjunto

$$S_r(a) = \{z \mid |z-a| = r\}.$$

Otras converge en algunos puntos y, aún, otras, converge en todos. Nótese también lo siguiente: si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

converge en algún punto $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$, necesariamente $r > 0$.

Definición 1.2. Una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω abierto en \mathbb{C} , se dice analítica compleja, o, simplemente, \mathbb{C} -analítica, si para cada punto $a \in \Omega$ existen una vecindad U de a en Ω y una serie de potencias

$$S_U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad a_n \in \mathbb{C},$$

la cual converge a $f(z)$ en todo punto $z \in U$. Denotaremos por $A_{\mathbb{C}}(\Omega)$

al C -espacio de las funciones C -analíticas en Ω .

Sea $D = \{z \mid |z| < 1\}$ y sea $f: D \rightarrow C$ definida por $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Entonces f es C -analítica en D . En efecto, si $a \in D$

$$f(z) = \frac{1}{(1-a) - (z-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{1-a}}$$

Pero, para todo $b \in C$, con $|b| < 1$,

$$\frac{1}{1-b} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n$$

como se demuestra inmediatamente. Entonces, para $z \in D$,

$$f(z) = \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a}\right)^{n+1} (z-a)^n,$$

si $|z-a| < |1-a|$. Nótese al respecto que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{1}{1-a}\right)^{n+1} \right|^{\frac{1}{n}} = \left| \frac{1}{1-a} \right|.$$

Así, si $a \in D$, el radio de convergencia es $r = |1-a|$, y es imposible que la serie converja en todo D . El desarrollo en serie de Taylor de una función C -analítica es entonces local y no global. Nótese que si $f \in A_C(\Omega)$ y U es una vecindad de a en la cual

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad (z \in U)$$

entonces la serie converge uniformemente en compactos de $U \cap B_r(a)$, donde $r > 0$ es el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Nótese que $U \subseteq B_r(a)$, y que $U \subseteq B_r(a)$ si U es abierta.

Teorema 1.2 $\mathcal{C}(\Omega) \supseteq A_{\mathcal{C}}(\Omega)$.

Demostración En efecto, si $a \in \Omega$, existen una vecindad abierta V de a y una serie de Taylor

$$S_V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

la cual converge uniformemente a f en compactos de V . Esto implica que la restricción de f a V está en $\mathcal{C}(V)$. Como esto vale para cualquier $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Esto demuestra el teorema.

Sean $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, \mathbb{C} -analítica, $a \in \Omega$, V una vecindad abierta de a en Ω , y

$$S_V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

una serie de Taylor la cual converge a f en compactos de V . Entonces,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k}$$

para todo $z \in V$. Se deduce entonces que

$$f^{(k)}(a) = k! a_k,$$

o sea

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a).$$

Por lo tanto :

Teorema 1.3 Si $f \in A_{\mathcal{C}}(\Omega)$ y $a \in \Omega$, existe una vecindad U de a en Ω tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^n \quad (1.4)$$

para todo $z \in U$. Si V es otra vecindad de a y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ es otra serie de Taylor, la cual converge a f en V , necesariamente

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

y podemos tomar $U = V$; o dicho de otra manera, ambas series convergen en $U \cup V$. La serie (1.4) es entonces la única convergente a f en la vecindad de a .

Nota. Veremos inmediatamente que si $f \in A_C(\Omega)$ y $a \in \Omega$, f admite un desarrollo en serie de Taylor, necesariamente dado por (1.4), en $B_r(a)$, para todo $r > 0$ tal que $0 < r < d = d(a, C\Omega) = \inf_{z \in C\Omega} |z - a|$.

Teorema 1.4 (Taylor). Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, necesariamente $f \in A_C(\Omega)$. Es decir, $A_C(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)$. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $a \in \Omega$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^n \quad (1.5)$$

converge a f en toda bola $B_r(a) \subseteq \Omega$, y la convergencia es uniforme en $B_S(a)$, si $B_S(a) \subseteq \Omega$. En particular, si $d = d(a, C\Omega)$, la serie converge a f en compactos de $B_d(a)$.

Demostración. Todo se reduce a demostrar que (1.5) converge simplemente a f en toda bola $B_r(a)$ tal que $B_r(a) \subseteq \Omega$. Las otras afirmaciones resultan inmediatamente de las propiedades generales de las T -series. Sea $z \in B_r(a)$ y sea

$$S_r(a) = \{t \mid |t-a| = r\}.$$

Entonces, $S_r(a) \subseteq \Omega$, y la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{t-a} \right)^n$$

converge uniformemente en $S_r(a)$, por ser

$$\sup_{t \in S_r(a)} \left| \frac{z-a}{t-a} \right| < 1$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \int_{C_r(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} (z-a)^n dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{C_r(a)} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \right\} (z-a)^n \\ &= (2\pi i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^n \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\frac{f(t)}{t-z} = \frac{f(t)}{(t-a)-(z-a)} = \frac{f(t)}{t-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}} = \frac{f(t)}{t-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{t-a} \right)^n$$

por ser

$$\sup_{t \in S_r(a)} \left| \frac{z-a}{t-a} \right| < 1$$

Como

$$(2\pi i) f(z) = \int_{C_r(a)} \frac{f(t)}{t-z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_r(a)} \frac{f(t)}{t-a} \left(\frac{z-a}{t-a} \right)^n dt$$

se deduce que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^n$$

lo cual completa la demostración.

El teorema de Taylor marca otra diferencia fundamental entre las funciones C -derivables y las \mathbb{R} -derivables. Una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ en \mathbb{R} no necesariamente admite un desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x-a)^n \quad (1.6)$$

en la vecindad de $a \in \Omega$, aún cuando las \mathbb{R} -derivadas $f^{(n)}(x)$ existan en todo punto $x \in \Omega$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota. Es conveniente advertir de nuevo que si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $U \in \mathcal{B}(a)$, U abierta, no necesariamente existe un desarrollo de Taylor de f en potencias de $(z-a)$ el cual sea válido en todo U . Esto es cierto si y sólo si $U \subseteq B_r(a)$, donde r es el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^n.$$

Los teoremas siguientes son característicos del comportamiento de las funciones holomorfas. En todos ellos interviene de manera decisiva la C -analiticidad de tales funciones, y tales teoremas fueron descubiertos en un principio dentro del marco de las funciones C -analíticas.

Definición 1.3. Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{C} . Un subconjunto $A \subseteq \Omega$ se dice un conjunto de unicidad de Ω , si, para toda pareja f, g de funciones en Ω , el hecho de que f, g coincidan en A , implica que f, g coinciden en Ω .

Lo anterior es claramente equivalente a decir que si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $f(z) = 0$ para todo $z \in A$, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

Teorema 1.5. (Principio de la Prolongación analítica) Si Ω es conexo, todo subconjunto A de Ω , el cual tenga un punto de acumulación en Ω , es un conjunto de unicidad de Ω . En particular, si $A \subseteq \Omega$ es abierto y $A \neq \emptyset$, entonces A es un subconjunto de unicidad de Ω .

Demostración. Comenzaremos por demostrar la última afirmación. Sea en-

tonces $A \subseteq \Omega$, abierto y no vacío. Sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ y supongamos que $f(z) = 0$ para todo $z \in A$. Esto implica evidentemente que $f^{(k)}(z) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $z \in A$. Sea

$$E_k = \{ z \in \Omega \mid f^{(k)}(z) = 0 \},$$

y sea

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$$

Es claro que E_k es cerrado en Ω , pues $f^{(k)}$ es continua. Por lo tanto E es cerrado. Además $E \neq \emptyset$, pues $A \subseteq E$. Sea ahora $b \in E$. En una vecindad abierta V de b , $V \subseteq \Omega$, f tiene un desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(b) (z-b)^n, \quad z \in V.$$

Como $b \in E$, necesariamente $f(z) = 0$ para todo $z \in V$, y como V es abierta, $f^{(k)}(z) = 0$ para todo $z \in V$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $V \subseteq E$. Se deduce entonces que E es abierto en Ω y, como Ω es conexo, $E = \Omega$. Esto demuestra el teorema en el caso de que A sea abierto. Supongamos ahora A arbitrario con un punto de acumulación $a \in \Omega$. Entonces $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto es claro si $k=0$, pues siendo a un punto de acumulación de A , debe existir $\{a_n\} \subseteq A$ ($a_n \neq a_m \neq a$ si $m \neq n$) tal que $a_n \rightarrow a$, y entonces

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0.$$

Veamos que $f^{(k)}(a) = 0$ para $k \geq 1$. Como $a \in \Omega$, existe una vecindad abierta U de a , en Ω , en la cual

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^n$$

para todo $z \in U$. Supongamos por inducción que $f^{(k)}(a) = 0$ para $k < m$.
Entonces

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^n.$$

Sea $\{a_n\} \subseteq A$, $a_n \neq a_m$ si $m \neq n$, $a_n \neq a$ para todo n , y $\{a_n\} \subseteq U$. Entonces

$$f(a_k) = 0 = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (a_k - a)^n,$$

de lo cual

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(a) = - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (a_k - a)^{n-m}.$$

Ahora bien, como la serie

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^{n-m}$$

converge en U , define allí una función holomorfa $g \in \mathcal{C}(U)$,

$$g(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^{n-m}, \quad z \in U.$$

Es claro que $g(a) = 0$ y que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(a_k) = g(a) = 0.$$

Por lo tanto,

$$f^{(m)}(a) = -m! \lim_{k \rightarrow \infty} g(a_k) = 0.$$

Esto demuestra que $g^{(m)}(a) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Pero entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in U$, y, como U es un conjunto de unicidad de Ω , $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Esto demuestra el teorema.

Corolario 1 Si Ω es conexo, $\mathcal{C}(\Omega)$ es un anillo entero conmutativo con elemento unidad para las leyes de composición

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z)$$

$$(fg)(z) = f(z)g(z).$$

Demostración. Que $\mathcal{C}(\Omega)$ es un anillo conmutativo con elemento unidad es evidente (el elemento unidad es la función

$$1(z) = 1$$

para todo $z \in \Omega$). Veamos que no hay en $\mathcal{C}(\Omega)$ divisores de 0. Supongamos que $fg = 0$. Si $f \neq 0$, y si

$$A = \{z \mid f(z) = 0\},$$

$\Omega' = \Omega - A$ es abierto y no vacío. Ahora, para $z \in \Omega'$,

$$f(z)g(z) = 0, \quad f(z) \neq 0.$$

Por lo tanto $g(z) = 0$. Como Ω' es un conjunto de unicidad de Ω , $g(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. El corolario está demostrado.

Nota. Si Ω no es conexo, $\mathcal{C}(\Omega)$ tiene obviamente divisores de cero.

Corolario 2. Sean Ω, Ω' abiertos conexos tales que $\Omega \cap \Omega' \neq \emptyset$. Sea

$$\Delta: \mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}(\Omega \cap \Omega')$$

$$(f, g) \mapsto (f - g)|_{\Omega \cap \Omega'}.$$

Si sobre $\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega')$ se considera la estructura de \mathbb{C} -espacio producto, y si

$$R: \mathcal{C}(\Omega \cup \Omega') \rightarrow \mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega')$$

es la aplicación

$$R(f) = (f|_{\Omega}, f|_{\Omega'}),$$

Δ y R son \mathbb{C} -lineales, y la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(\Omega \cup \Omega') \xrightarrow{R} \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega') \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}(\Omega \cap \Omega')$$

es exacta.

Demostración. Trivial.

Nota. Veremos más adelante que si $A \subseteq \Omega$, Ω conexo, A es de unicidad si y sólo si A tiene un punto de acumulación en Ω . Es decir, si $A \subseteq \Omega$ y ningún punto de acumulación de A pertenece a Ω , o si A no tiene puntos de acumulación, existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \neq 0$, tal que $f|_A = 0$. Si A es finito, esto es evidente. Bastará tomar

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n), \quad z \in \Omega,$$

supuesto que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Si A no es finito, el problema es un poco más delicado, y depende de la teoría de haces o de la teoría de los productos infinitos. Sobre esto volveremos más adelante.

Teorema 1.6. Sea $A \subseteq \Omega$, Ω conexo. Supóngase que A no tiene puntos de acumulación en Ω . Entonces

- A es un subespacio discreto de Ω . Además, A es cerrado en Ω .
- A es a lo más enumerable.

Demostración. Inmediata.

Teorema 1.7. Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $a \in \Omega$, Ω conexo. Supóngase que $f(a) = 0$, pero que $f \neq 0$. Entonces, existen $m > 0$ y $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tales que

$$f(z) = (z - a)^m g(z), \quad g(a) \neq 0$$

para todo $z \in \Omega$. Además, g está unívocamente determinada por f .

y existe una vecindad U de a en Ω tal que

$$g(z) \neq 0$$

para todo $z \in U$.

Demostración. Sea U una vecindad de a en Ω tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, $z \neq a$. Tal vecindad existe, pues $f^{-1}(0)$ no puede tener puntos de acumulación en Ω . Además, U puede suponerse lo suficientemente pequeña para que f admita en U el desarrollo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^n.$$

Ahora bien, si $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, f sería idénticamente nula en Ω , contrario a la hipótesis. Por lo tanto, debe existir $p > 0$ tal que $f^{(p)}(a) \neq 0$. Sea

$$m = \min \{ p \mid f^{(p)}(a) \neq 0 \}.$$

Como $f(a) = 0$, $m > 0$. Como en U

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(a),$$

es claro que

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

donde

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (z-a)^{n-m}$$

es holomorfa en U . Como $f(z) \neq 0$ para $z \in U$, $z \neq a$, es claro que $g(z) \neq 0$ para $z \in U$, $z \neq a$. Como además

$$g(a) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(a),$$

necesariamente $g(a) \neq 0$. Por lo tanto $g(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Definamos ahora

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$$

para $z \in U$. Entonces es claro que $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisface las condiciones del enunciado. Finalmente, como $\Omega - \{a\}$ es un conjunto de unicidad de Ω , es claro que g es única. Esto demuestra la proposición.

Corolario. Sea Ω conexo, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces, si $f^{-1}(0) = \{a_1, \dots, a_n\}$,

$$f(z) = (z-a_1)^{\lambda_1} (z-a_2)^{\lambda_2} \dots (z-a_n)^{\lambda_n} b(z)$$

donde $\lambda_k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k > 0$, $b \in \mathcal{O}(\Omega)$, $b(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

Nota. Si Ω es conexo, $a \in \Omega$, y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \neq 0$, $f(a) = 0$, entonces

$$f(z) = (z-a)^p g(z) \quad , \quad p > 0,$$

con $g(z) \neq 0$ en una vecindad de a . El menor valor de p que satisface la anterior condición se denomina el *orden del cero* que f tiene en a .

Es costumbre escribir $p = C(f, a)$. Es claro que $C(f, a) = 0$ si y sólo si $f(a) \neq 0$. A su vez, si $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, escribiremos

$$C(f, a) = +\infty,$$

Teorema 1.8. (Teorema de la aplicación abierta). Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y no constante. Si Ω es conexo, para todo abierto U de Ω , $f(U)$ es abierto en \mathbb{C} . Es decir, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es abierta.

Demostración. Es suficiente demostrar que, para todo $a \in U$, $f(U)$ es una vecindad de $f(a)$ en \mathbb{C} . Sea $w = f(a)$. Como f no es constante

y Ω es conexo, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon}(a) \subseteq U$ y $f(z) \neq u$ para todo $z \in \overline{B_\varepsilon}(a)$, $z \neq a$ (si no, a sería un punto de acumulación de $A \cap f^{-1}(u)$, el cual sería un conjunto de unicidad de Ω). Sea

$$S = \inf_{z \in \overline{B_\varepsilon}(a)} |f(z) - u|, \quad S_\varepsilon(a) = \{z \mid |z - a| = \varepsilon\}.$$

Entonces $\delta > 0$ (pues $S_\varepsilon(a)$ es compacto). Podemos suponer que $B_\delta(a) \not\subseteq f(U)$. Sea entonces $b \in B_\delta(a)$ tal que $b \notin f(U)$. La función

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b} \in \mathcal{C}(U),$$

y por las estimativas de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{1}{|f(a) - b|} = |g(a)| &\leq \sup_{z \in S_\varepsilon(a)} |g(z)| = \sup_{z \in S_\varepsilon(a)} \frac{1}{|f(z) - b|} \leq \sup_{z \in S_\varepsilon(a)} \frac{1}{|f(z) - u| - |b - u|} \\ &\leq \frac{1}{\delta - |b - f(a)|}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que

$$2|b - f(a)| \geq \delta,$$

y por lo tanto $b - f(a) \notin B_{\delta/2}(w)$. Hemos demostrado entonces que

$$B_\delta(w) \cap \mathcal{C} \cdot f(U) \subseteq \mathcal{C} \cdot B_{\delta/2}(w),$$

y de ésto

$$B_{\delta/2}(w) \subseteq f(U) \cup \mathcal{C} \cdot B_\delta(w).$$

Como

$$B_{\delta/2}(w) \cap \mathcal{C} \cdot B_\delta(w) = \emptyset$$

Se deduce que

$$B_{\delta/2}(w) \subseteq f(U),$$

y el teorema está demostrado.

Nota. En particular, $f(\Omega)$ es abierto en \mathbb{C} . El anterior teorema es obviamente falso para las funciones \mathbb{R} -derivables de Ω en \mathbb{R} . Tómese por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Entonces, $f(\mathbb{R}) = [0, \frac{1}{e}]$.

Teorema 19. (Principio del Máximo). Sea Ω un abierto conexo de \mathbb{C} , y sean $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, no constante, y

$$M = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|.$$

Entonces $|f(z)| < M$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración. La afirmación es obvia si $M = +\infty$. Supongamos entonces $M < +\infty$. Sea $U = B_M(0)$. Es claro que $f(\Omega) \subseteq \bar{U} = \bar{B}_M(0)$, pero como $f(\Omega)$ es abierto, también $f(\Omega) \subseteq U$. Esto demuestra el teorema.

Corolario 1. Sea Ω un abierto conexo y acotado de \mathbb{C} y sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, la cual es continua sobre $\bar{\Omega}$, tal que

$$|f(a)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|.$$

Entonces, si f no es constante, $a \in F_r(\Omega) = \bar{\Omega} - \Omega$. Por lo tanto

$$\|f\|_{\Omega} = \|f\|_{F_r(\Omega)}, \quad (1.6)$$

Demostración. Nótese en primer lugar que a existe, pues Ω es compacto. Además

$$|f(z)| \leq |f(a)|$$

para todo $z \in \Omega$. Por lo tanto, $a \in F_r(\Omega)$. Como

$$|f(a)| = \|f\|_{F_r(\Omega)} = \|f\|_{\Omega}$$

el corolario está demostrado.

Corolario 2. Sean Ω un abierto conexo de \mathbb{C} , $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si existe $a \in \Omega$ tal que $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es constante.

Corolario 3. Sea Ω un abierto conexo de \mathbb{C} . Entonces, para todo conjunto compacto $K \subseteq \Omega$,

$$\|f\|_K = \|f\|_{F_r(K)},$$

para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si

$$|f(a)| = \|f\|_K$$

y $a \in \overset{\circ}{K}$, entonces f es constante.

Nota. La relación (1.6) del corolario 1 es falsa si Ω no es acotado.

Ejemplo 1.1. Sea

$$\Omega = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, |y| < \frac{\pi}{2} \}.$$

Es fácil ver que $F_r(\Omega) = \{ (x, y) \mid y = \pm \pi/2 \}$. Sea $f(z) = e^{e^z}$. Entonces

$$f(x, \pm \frac{\pi}{2}i) = e^{\pm i} e^x,$$

y por lo tanto

$$\|f\|_{F_r(\Omega)} = 1.$$

Es fácil ver, sin embargo, que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

y por lo tanto que

$$\|f\|_{\overline{\Omega}} = +\infty.$$

2. Familias Normales.

El siguiente teorema es un resultado fundamental del análisis complejo. Definimos primero:

Definición 2.1. Sea $\mathcal{H} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_m)$. Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ se dice *normal* en \mathcal{H} si satisface una de las dos condiciones siguientes: (1) De toda sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ se puede extraer una subsucesión $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ la cual converge hacia $f \in \mathcal{H}$ uniformemente en compactos de Ω . (2) Si $\{f_n\}$ es una sucesión en \mathcal{F} tal que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(a)| = +\infty$ para un punto $a \in \Omega$, entonces $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty$, para todo $x \in \Omega$.

Teorema 2.1. (Montel). Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ y supóngase que para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe una constante $M_K > 0$ tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_K \leq M_K. \quad (2.1)$$

Entonces \mathcal{F} es normal en $\mathcal{O}(\Omega)$. Claramente, bajo las hipótesis del teorema, la condición de normalidad (2) no puede darse. Por otra par-

te, la condición (2.1) es equivalente a la siguiente : existe $M_K > 0$ tal que $\|f\|_K \leq M_K$ para toda $f \in \mathcal{F}$: es decir, \mathcal{F} es una familia uniformemente acotada en compactos o, simplemente, acotada para la topología τ_C . Nótese también que la condición de normalidad (1) es equivalente a la afirmación de que \mathcal{F} es relativamente compacta en $C(\Omega, \mathbb{R}_m)$.

Demostración del teorema 2.1. En efecto, si \mathcal{F} es uniformemente acotada en compactos, demostraremos que \mathcal{F} es continua. Para ver ésto, sea $a \in \Omega$. Entonces, para todo $z \in U$, U es una vecindad convexa de a , y toda $f \in \mathcal{F}$,

$$f(z) - f(a) = \int_{\rho} f'(t) dt,$$

donde $\rho = [a, z]$. Se tiene entonces $(\bar{\rho} = \text{Im } \rho)$,

$$|f(z) - f(a)| \leq \sup_{t \in \bar{\rho}} |f'(t)| \int_{\rho} |dt|,$$

o sea,

$$|f(z) - f(a)| \leq \sup_{t \in \bar{\rho}} |f'(t)| |z - a|,$$

y esto, para toda $f \in \mathcal{F}$. Pero, si suponemos que $U = B_r(a)$ y que $B_r(a) \subseteq \Omega$, tomando $s > r$ tal que $\bar{B}_s(a) \subseteq \Omega$,

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_s(a)} \frac{|f'(u)|}{|u-t|} du \leq M_s \frac{s}{|r-s|} = M'_s.$$

donde $M_s > 0$ es tal que

$$\sup_{|z-a|=s} |f(z)| \leq M_s$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. Si damos $\varepsilon > 0$ y tomamos

$$0 < \delta \leq \min \{ \varepsilon / M'_z, r \} .$$

se tiene entonces

$$|f(z) - f(a)| \leq \varepsilon$$

para todo $f \in \mathcal{F}$ y todo z tal que $|z - a| \leq \delta$, lo cual prueba la equicontinuidad de \mathcal{F} . Por otra parte, es claro que para todo $z \in \Omega$ existe $M_z > 0$ tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(z)| < M_z .$$

Las condiciones del teorema de Ascoli-Arzelá están entonces dadas. Esto demuestra el teorema.

Ejercicios

1. Demuestre que las siguientes series tienen radio de convergencia 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Demuestre que la primera diverge en todo punto de $S_1(0) = \{z \mid |z| = 1\}$, que la segunda converge en $S_1(0) - \{1\}$, y que la tercera converge en $S_1(0)$.

2. Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ no converge uniformemente en $B_1(0)$.

3. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} z^{n+1}$ converge uniformemente en $B_1(0)$, mientras que la serie derivada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ no converge uniformemente en $B_1(0)$.

4. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ tiene radio de convergencia $\rho > 0$, cuál es el radio de convergencia de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (z-a)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 (z-a)^n \quad ?$$

5. Cuál es el desarrollo de Taylor, en la vecindad de $a=0$, de $f(z) = e^z$.

Cuál es su radio de convergencia? Cuál el desarrollo de Taylor de

$$f(z) = (1+z)^n, \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbf{N}$$

alrededor de $z=0$? Cuál es su radio de convergencia? Cuál el desarrollo de

$$f(z) = (1+z)^n, \quad |z| < 1, \quad n < 0, \quad n \in \mathbf{Z}$$

en la vecindad de $z=0$.

6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{e} \frac{1}{1-|x|^2} \quad |x| < 1$$

$$f(x) = 0, \quad |x| \geq 1$$

Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por ($f^{(n)}$ denota a la \mathbb{R} -derivada de orden n de f):

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1) (x-1)^n$$

Qué es g ? Calcule $A = \{x \mid g(x) = f(x)\}$. Qué se puede decir del desarrollo de Taylor de una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; Ω abierto en \mathbb{R} , la cual admita \mathbb{R} -derivadas de cualquier orden?

7. Una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω abierto en \mathbb{C} ó \mathbb{R} , se dice \mathbb{R} -analítica (analítica real), si para todo punto $a \in \Omega$ existen una vecindad abierta U de $a = (a_1, a_2)$ en Ω y una serie de potencias

$$\sum_{\substack{n_1=0 \\ n_2=0}}^{\infty} a_{n_1 n_2} (x-a_1)^{n_1} (y-a_2)^{n_2}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad n_2 = 0 \quad \text{si } \Omega \subseteq \mathbb{R},$$

la cual converge a f en todo punto $k \in U$. Demuestre que la serie $S_U(x,y)$ converge uniforme y absolutamente en todo compacto k de U . Demuestre que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{-n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k}, \quad f^{(n)}(a) = n! a_n$$

para todo $x \in U$ y que la convergencia es uniforme en compactos de U . Demuestre además que la serie $\sum a_n (z-a)^n$ converge a f en $(a-d, a+d)$, donde $d = d(a, C \Omega)$, y que la convergencia es absoluta y uniforme en compactos de dicho conjunto. Sea $A \subseteq \Omega$. Demuestre que si A tiene un punto de acumulación en Ω , que si $f|_A = 0$, y que si Ω es conexo, $f = 0$ en Ω . Suponga que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Qué se puede decir de los a_n ? Es f una aplicación abierta de Ω en \mathbb{R} cuando f no es constante? Vale el principio del máximo? Qué acerca del teorema de Montel? Demuestre que si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{R} -analítica, Ω abierto en \mathbb{R} , existen un abierto Ω' de \mathbb{C} y una función \mathbb{C} -analítica $\hat{f}: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$, tales que

$$\begin{aligned} \Omega' \cap \mathbb{R} &= \Omega, \\ \hat{f}|_{\Omega} &= f. \end{aligned}$$

8. Sea $f \in \mathcal{C}^{\infty}(B_R(0))$, y supóngase que

$$f(x) \in \mathbb{R}$$

para todo $x \in (-R, R)$. Demuestre que los coeficientes de Taylor de f en $a=0$ son todos reales y que

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}, \quad z \in B_R(0).$$

Concluya que si $z \in B_R(0)$ y $f(z) = 0$, también $f(z) = 0$. Si además $f(ix) \in i\mathbb{R}$ para todo $x \in (-R, R)$, demuestre que

$$f(-z) = -f(z)$$

para todo $z \in B_R(0)$.

9. Sean $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $a \in \Omega$, $R > 0$ tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in B_R(a).$$

Demuestre que para todo $0 < r < R$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

10. Sea $f \in \mathcal{O}(C)$ y suponga que existen $M > 0$, $\lambda > 0$, tales que

$$|f(z)| \leq M(1 + |z|^\lambda)$$

para todo $z \in C$. Demuestre que f es un polinomio de grado $n = [\lambda]$ = mayor número natural $\leq \lambda$.

11. Sea $f \in \mathcal{O}(C)$. Demuestre que si $|f| \geq 1$ entonces f es constante.

12. Sea $f \in \mathcal{O}(C)$. Demuestre que si $\operatorname{Re} f$ es constante, f es constante.

Que si $\operatorname{Im} f$ es constante, f es constante. Que si $\operatorname{Re} f \leq 0$, f es constante. Que si $\operatorname{Im} f \leq 0$, f es constante. Si $\operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo $z \in C$, f es constante. Si $\operatorname{Re} f(z) \neq 0$ para todo $z \in C$, f es constante.

13. Sea Ω un abierto conexo de C y sea $a \in \Omega$. Suponga que existe $\varepsilon > 0$ con $\overline{B_\varepsilon(a)} \subseteq \Omega$, y tal que so $\rho = c_\varepsilon(a)$ entonces

$$\int_{\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = 0 \quad , \quad n \in \mathbf{N} .$$

Demuestre que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

14. Sea Ω un abierto conexo de \mathbb{C} . Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \neq 0$, $Z = \{z \mid f(z) = 0\}$.

- (i) Demuestre que Z no tiene puntos de acumulación en Ω .
- (ii) Si K es un subconjunto compacto de Ω , $K \cap Z$ es finito.
- (iii) Z es a lo más enumerable.

15. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \quad , \quad |x| < 1 ,$$

$$f(x) = 0 \quad , \quad |x| \geq 1 .$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbf{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)$ existe. Demuestre que f no puede ser \mathbb{R} -analítica.

16. Sea $U = B_1(0)$, y suponga que $f, g \in \mathcal{O}(U)$ y que $f(z) \neq 0$, $g(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Demuestre que si

$$\frac{f'}{f}(1/n) = -\frac{g'}{g}(1/n)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = c g(z)$$

para todo $z \in U$.

17. Supóngase que $f \in \mathcal{O}(U)$, $U = B_R(0)$, está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad z \in U .$$

Sea

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

Si $0 < r < R$, y si $|z_0| < r$, demuestre que

$$S_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \left(\frac{z^{n+1} - z_0^{n+1}}{z - z_0} \right) dz,$$

donde $\rho = c_r(0)$.

18. Sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $0 \in \Omega$, y supóngase que $\overline{B_1(0)} \subseteq \Omega$.

Demuestre que

$$(1 - |z_0|^2) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z) \frac{1 - z z_0}{z - z_0} dz,$$

donde $\rho = c_1(0)$. Concluya que

$$(1 - |z_0|^2) |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

19. Sea $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$, y supóngase que $0 \in \Omega$, $\overline{B_{R_1}(0)} \subseteq \Omega$, $\overline{B_{R_2}(0)} \subseteq \Omega$.

Sea $\rho = c_{R_1 R_2}(0)$, y supóngase que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

la primera para $z \in B_{R_1}(0)$, la segunda para $z \in B_{R_2}(0)$. Demuestre

que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho} \frac{f(z)}{z} g\left(\frac{z_0}{z}\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z_0^n$$

para $|z_0| < R_1 R_2$.

20. Sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Bajo qué condiciones puede $|f|$ tener un mínimo local en Ω ?

21. Sea Ω un abierto conexo y acotado de \mathbb{C} . Sea $\{f_n\} \subseteq C(\Omega)$, tal que $f_n|_{\Omega} \in \mathcal{O}(\Omega)$ para todo $n \geq 1$. Supóngase que $f_n \rightarrow f \in C(\bar{\Omega})$, uniformemente en $F_r(\Omega)$, puntualmente en Ω . Demuestre que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en compactos de Ω y que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
22. Supóngase que Ω es un conjunto abierto, conexo y acotado, que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Omega} |f(z_n)| \leq M.$$

para toda sucesión $z_n \in \Omega$, $z_n \rightarrow z \in F_r(\Omega)$. Demuestre que

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq M.$$

23. Sea Ω un abierto conexo de \mathbb{C} , $D = B_r(a) \subseteq \Omega$. Supóngase que f es no constante y que $|f|$ es constante en $F_r(D)$. Demuestre que f se anula en al menos un punto de D . Demuestre además que existe $z_0 \in \overset{\circ}{D}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(z_0 + (z - z_0)^n)$$

es analítica en una vecindad de z_0 .

24. Sea $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ la cual converge hacia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ en todo punto $z \in \Omega$. Demuestre que existe un subconjunto abierto $\Omega' \subseteq \Omega$, denso en Ω , tal que $f \in \mathcal{O}(\Omega')$. (Indicación: use el teorema de Baire para demostrar que si $\psi = \sup |f_n|$, para toda bola $B \subseteq \Omega$, existe $B' \subseteq B$ tal que $\psi|_{B'}$ es acotada en B').
25. Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Demuestre que $f_1 = \operatorname{Re}(f)$ y $f_2 = \operatorname{Im}(f)$ son \mathbb{R} -ana-

líticas.

26. Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ armónica. Demuestre que f es \mathbb{R} -analítica.
27. Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ armónica. Demuestre que f es \mathbb{R} -analítica.
28. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Se define el límite inferior de a_n por

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k$$

Sea $-\infty \leq a \leq +\infty$. Demuestre que

$$a = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

sí y sólo si existe una subsucesión a_{n_k} de a_n tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a,$$

y que ningún $b < a$ cumpla esta condición. Suponga ahora que $a \in \mathbb{R}$.

Demuestre que $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ si y sólo si

(i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_m > a - \varepsilon$ para todo $m \geq n$.

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \geq n$ tal que

$$a_m < a + \varepsilon.$$