Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen V (1998), pp.27–37

ESTRUCTURAS DE O-CATEGORÍA GENERADAS POR FUNTORES FIELES Y EPI-OBJETOS

MARGARITA OSPINA(*)

Resumen. En este artículo mostramos cómo un funtor fiel, con valores en una O-categoría, produce una estructura de O-categoría sobre su dominio. También probamos que la existencia de un *epi-objeto* en una O-categoría nos permite definir un funtor fiel con valores en $\mathbb{P}os$ y, por lo tanto, otra estructura de O-categoría sobre ella, que resulta comparable con la original. Por último, mostramos que si dos funtores fieles están relacionados por transformaciones naturales especiales, entonces producen estructuras de O-categoría comparables.

Abstract. In this paper we show how a faithful functor, with values in an O-category, gives rise to a structure of O-category on its domain. We also prove that the existence of an epi-object in an O-category allows us to define a faithful functor with values in $\mathbb{P}os$ *and, then, another structure of O-category on it, comparable with the original. Finally, we show that if two faithful functors are related by special natural transformations then they produce comparable structures of O-category.*

Keywords. O-category, faithful functor, epi-object, o-epi-object, o-epi-natural transformation, o-mono-natural transformation.

(*)Texto recibido 31/3/99, revisado 28/6/99. Margarita Ospina, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional-Sede Bogotá. E-mail: mospina@matematicas.unal.edu.co Parcialmente financiado por Colciencias y la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia. Hace parte de una tesis de doctorado dirigida por el Dr. Carlos Ruiz S.

1. Introducción

Una estructura de O-categoría, sobre una categoría dada, consiste en dotar a cada conjunto de morfismos entre dos de sus objetos de una relación de orden que sea compatible con la composición. En este sentido, toda categoría tiene una estructura trivial de O-categoría dada por la relación de igualdad entre sus morfismos. Este artículo presenta dos métodos para dotar a una categoría de estructuras no triviales de O-categoría.

Un primer método se basa en la existencia de funtores fieles de una categoría en una O-categoría, y permite "transportar" el orden a la categoría dominio. El segundo, parte de una O-categoría y por medio de un *epi-objeto* construye un funtor fiel con codominio la O-categoría $\mathbb{P}os$, lo que nos sitúa en el primer caso, permitiendo generar una nueva estructura de O-categoría.

Por otra parte, se generalizan los conceptos de epi y mono-morfismo al caso de O-categorías originando las nociones de *o-epi* y *o-mono-morfismo.* Con estos morfismos se representan ciertas estructuras de O-categoría. También se demuestra que cuando dos funtores fieles se relacionan mediante una transformación natural con componentes *o-epi* u *o-mono*, se pueden comparar las estructuras de O-categorías que ellos generan.

Cabe anotar que en todas las secciones aparecen ejemplos que ilustran las definiciones y que realzan la pertinencia de los conceptos "*o*-" en O-categorías, como ampliación de los tradicionales en categorías.

2. Nociones básicas

En el texto se utilizarán conceptos básicos de teoría de categorías como categoría, monomorfismo, epimorfismo, funtor, funtor fiel y transformación natural. En caso necesario, el lector puede consultar [A], [A-H-S], [McL] o [McLa].

Notación. Utilizaremos las letras $\mathbb{C}, \mathbb{K}, \ldots$, para nombrar categorías, A, B, X, Y, Z, $W, \ldots$ para representar objetos, y f, g, h, $k \ldots$ para denotar morfismos. Para funtores utilizaremos las letras mayúsculas $F, G, H, \ldots$ y las transformaciones naturales aparecerán con letras griegas como λ y μ. El conjunto de los morfismos de X en Y en la categoría $\mathbb{C}$ se notará $[X,Y]_{\mathbb{C}}$, o simplemente $[X,Y]$ si no hay lugar a confusión.

También haremos especial uso de la noción de O-categoría, que presentamos enseguida, ya que aunque puede encontrarse por ejemplo en [C-G-R], o en [B] como un caso especial de 2-categoría, no se encuentra en los libros clásicos de categorías.

Definición 2.1. *Se dice que una categoría* $\mathbb{K}$ *tiene una estructura de O-categoría, si para todo par* $X, Y \in Obj(\mathbb{K})$ *existe una relación de orden* $\leq_{X,Y}$ *sobre* $[X,Y]_{\mathbb{K}}$*, de tal manera que la composición*

$$\circ : [X,Y]_{\mathbb{K}} \times [Y,Z]_{\mathbb{K}} \to [X,Z]_{\mathbb{K}} : (f,g) \mapsto g \circ f$$

resulte monótona no decreciente, considerando en $[X,Y]_{\mathbb{K}} \times [Y,Z]_{\mathbb{K}}$ *el orden producto.*

Aunque es posible definir diferentes relaciones de orden entre los morfismos de una categoría dada, que cumplan con la condición de la definición anterior, en la mayoría de los casos será claro de qué relación de orden se trata y por eso hablaremos simplemente de la O-categoría $\mathbb{K}$. Cuando sea necesario se notará la O-categoría $(\mathbb{K}, \leq)$, donde $\leq$ es la relación de orden parcial definida en la colección de morfismos de la categoría y que corresponde a la unión de las $\leq_{X,Y}$, variando X, Y en $Obj(\mathbb{K})$. Por esto, escribiremos con frecuencia $f \leq g$ en lugar de $f \leq_{X,Y} g$.

3. Los funtores fieles con valores en una O-categoría producen O-categorías

Definición 3.1. *Sea* $F : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ *un funtor con codominio una O-categoría* $(\mathbb{C}, \leq)$*. Para cada par de objetos* X, Y *de* $\mathbb{K}$*, definimos la relación* $\leq_F$ *sobre* $[X,Y]_{\mathbb{K}}$ *de la siguiente manera:*

$$f \leq_F g \Leftrightarrow F(f) \leq F(g).$$

Teorema 3.2. *En las condiciones de la definición anterior se tiene:*

a) *Para todo par de objetos* X, Y *de* $\mathbb{K}$*,* $\leq_F$ *es una relación de pre-orden sobre* $[X,Y]$.
b) F *es fiel, si y solamente si, para todo par de objetos* X, Y *de* $\mathbb{K}$*,* $\leq_F$ *es una relación antisimétrica en* $[X,Y]$.
c) $\leq_F$ *es compatible con la composición de* $\mathbb{K}$.

Demostración. La parte a) es evidente. Para demostrar la parte b) utilizamos las siguientes equivalencias: $f \leq_F g \wedge g \leq_F f \Leftrightarrow F(f) \leq F(g) \wedge F(g) \leq F(f) \Leftrightarrow F(f) = F(g)$. Si F es fiel, $F(f) = F(g) \Rightarrow f = g$ y por lo tanto $f \leq_F g \wedge g \leq_F f \Rightarrow f = g$. Recíprocamente, si $\leq_F$ es antisimétrica entonces $f \leq_F g \wedge g \leq_F f \Rightarrow f = g$ luego $F(f) = F(g) \Rightarrow f = g$ y F resulta fiel. Veamos ahora la parte c).

Sean $f, g \in [X, Y], h \in [Y, Z], k \in [W, X]$.

$$\begin{aligned} f \leq_F g &\Rightarrow F(f) \leq F(g) \\ &\Rightarrow F(h) \circ F(f) \leq F(h) \circ F(g) \ \wedge F(f) \circ F(k) \leq F(g) \circ F(k) \\ &\Rightarrow F(h \circ f) \leq F(h \circ g) \ \wedge \ F(f \circ k) \leq F(g \circ k) \\ &\Rightarrow h \circ f \leq_F h \circ g \ \wedge \ f \circ k \leq_F g \circ k. \end{aligned}$$

Como una consecuencia inmediata tenemos:

Corolario 3.3. *Todo funtor fiel con codominio una O-categoría define una estructura natural no trivial de O-categoría sobre la categoría dominio.*

Ejemplo 3.4. Sean $\mathbb{T}opT_0$ la categoría de los espacios topológicos T_0 y las funciones continuas y $\mathbb{P}os$ la O-categoría de los conjuntos ordenados y funciones monótonas no decrecientes con el orden $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ para todo x en el dominio de f y g. Definimos el operador

$$\begin{aligned} \alpha : \ \mathbb{T}opT_0 &\longrightarrow \mathbb{P}os \\ (X, \tau) &\longmapsto (X, \alpha(\tau)) \\ f &\longmapsto \alpha(f) = f \end{aligned}$$

donde $\alpha(\tau)$ es el orden de especialización (ver [J]) definido por

$$\alpha(\tau) = \{(x, y) \in X \times X \mid x \in adh_\tau(y)\}.$$

Se demuestra que α define un funtor fiel (ver [A-L]). Por lo tanto, produce una estructura de O-categoría sobre $\mathbb{T}opT_0$, dada por:

$$f \leq_\alpha g \Leftrightarrow (\forall x \in X)(f(x) \in adh_\mu(g(x)))$$

donde $f, g : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \mu)$.
Esta relación de orden resulta equivalente (ver [J]) a la relación

$$f \leq_\alpha g \Leftrightarrow (\forall U \in \mu)(f^{-1}(U) \subseteq g^{-1}(U)).$$

Así por ejemplo, si μ es una topología T_1, el orden inducido es el trivial.

4. Epimorfismos y o-epimorfismos

En las categorías, se destacan cierta clase de morfismos que permiten cancelación a derecha o izquierda en el siguiente sentido:

$$\begin{aligned} f \circ h = g \circ h &\Rightarrow f = g \\ h \circ f = h \circ g &\Rightarrow f = g. \end{aligned}$$

En el primer caso decimos que h es un epimorfismo y en el segundo que es un monomorfismo. Estos conceptos, en presencia de orden en los morfismos, permiten la siguiente generalización.

Definición 4.1. *Sea $\mathbb{K}$ una O-categoría, $X, Y \in Obj(\mathbb{K})$ y $h \in [X, Y]$.*
i) Diremos que h es un o-epimorfismo si para todo par de morfismos f y g con dominio Y se tiene la siguiente implicación:

$$f \circ h \leq g \circ h \Rightarrow f \leq g$$

ii) Diremos que h es un o-monomorfismo si para todo par de morfismos f y g con codominio X se tiene la siguiente implicación:

$$h \circ f \leq h \circ g \Rightarrow f \leq g.$$

Proposición 4.2. *Todo o-epimorfismo es un epimorfismo y todo o-monomorfismo es un monomorfismo.*

Demostración. En efecto, supongamos que h es un o-epimorfismo. Entonces:

$$\begin{aligned} f \circ h = g \circ h &\Rightarrow f \circ h \leq g \circ h \wedge g \circ h \leq f \circ h \\ &\Rightarrow f \leq g \wedge g \leq f \\ &\Rightarrow f = g, \end{aligned}$$

luego h es un epimorfismo. La prueba para los o-monomorfismos es análoga.

Proposición 4.3. *Si $\mathbb{K}$ es una subcategoría de $\mathbb{P}os$, todo morfismo sobreyectivo es un o-epimorfismo.*

Demostración. Sean $f, g : Y \to Z$ y $h : X \to Y$ sobreyectivo;

$$\begin{aligned} f \circ h \leq g \circ h &\Leftrightarrow (\forall x \in X)(f \circ h(x) \leq g \circ h(x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in X)(f(h(x)) \leq g(h(x))) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in Y)(f(y) \leq g(y)) \\ &\Leftrightarrow f \leq g. \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo muestra que no todo epimorfismo de una O-categoría $\mathbb{K}$ es un o-epimorfismo de $\mathbb{K}$.

Ejemplo 4.4. Sea $\mathbb{K}$ la categoría cuyos objetos son las triplas $(X, \tau, \leq)$ donde X es un conjunto, τ es una topología de Hausdorff sobre X y $\leq$ es una relación de orden sobre X, considerando como morfismos las funciones continuas y monótonas no decrecientes. $\mathbb{K}$ es entonces una sub-categoría de $\mathbb{T}op$ y de $\mathbb{P}os$ y hereda de esta última una estructura natural de O-categoría. Consideremos los siguientes objetos de $\mathbb{K}$:

$(\mathbb{Q}, \mu, \leq)$: Conjunto de los racionales con su topología y orden usuales
$(\mathbb{R}, \tau, \preceq)$: Conjunto de los reales con su topología usual y el orden

$$x \preceq y \Leftrightarrow x = y \quad \text{o} \quad x, y \in \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad x \leq y.$$

Sea ahora $h : (\mathbb{Q}, \mu, \leq) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau, \preceq)$ la función de inclusión. h es claramente un morfismo de $\mathbb{K}$. Veamos que h es un epimorfismo. Sean f, g morfismos de $\mathbb{K}$ tales que $f \circ h = g \circ h$; probemos que $f = g$, es decir, $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) = g(x))$. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces existe una sucesión $\{q_n\}$ de racionales tal que $x = \lim_{n\to\infty} q_n$, y se tiene:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = g(\lim_{n\to\infty} q_n) = g(x)$$

ya que $(\mathbb{R}, \tau)$ es espacio de Haussdorff, las funciones f, g son continuas y coinciden en los racionales ($f \circ h = g \circ h$).
Probemos ahora que h no es un o-epimorfismo de $\mathbb{K}$. En efecto, sean $f, g : (\mathbb{R}, \tau, \preceq) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau, \preceq)$ definidas por $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$. Evidentemente f y g son morfismos de $\mathbb{K}$ tales que $f \circ h \preceq g \circ h$. Sin embargo, $f \not\preceq g$ ya que si x es irracional, $f(x) = x \not\preceq x + 1 = g(x)$.

El siguiente ejemplo muestra que no todo monomorfismo de una O-categoría $\mathbb{K}$ es un o-monomorfismo de $\mathbb{K}$.

Ejemplo 4.5. Consideremos la O-categoría $\mathbb{P}os$. Sea $h : (\mathbb{R}, \preceq) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq) : x \mapsto x$ donde $\preceq$ es el orden trivial y $\leq$ es el orden usual. Claramente h es un monomorfismo de $\mathbb{P}os$ (todo morfismo inyectivo de $\mathbb{P}os$ es un monomorfismo). Sean ahora $f, g : (\mathbb{R}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{R}, \preceq)$ definidas por $f(x) = 0$ y $g(x) = 1$. Entonces:

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,((h \circ f)(x) = h(0) = 0 \leq (h \circ g)(x) = h(1) = 1)$$

y tenemos que $h \circ f \leq h \circ g$, pero $f \not\preceq g$, ya que por ser $\preceq$ el orden trivial $0 \not\preceq 1$.

Con la siguiente definición destacaremos ciertos objetos de una O-categoría que poseen morfismos especiales de ellos hacia todos los objetos y que dan lugar a funtores fieles.

Definición 4.6. *a) Un objeto A de una categoría $\mathbb{K}$ se llamará epi-objeto si para todo objeto X de $\mathbb{K}$ existe un epimorfismo $h_X \in [A, X]$.*

b) Un objeto B de una O-categoría $\mathbb{C}$ se llamará o-epi-objeto si para todo objeto X de $\mathbb{C}$ existe un o-epimorfismo $h_X \in [B, X]$.

Ejemplo 4.7. Sea $\mathbb{C}$ la subcategoría de $\mathbb{P}os$ cuyos objetos son los subconjuntos de $\mathbb{N}$ con su orden usual y cuyos morfismos son las funciones monótonas no decrecientes. $\mathbb{C}$ hereda la estructura de O-categoría de $\mathbb{P}os$. Dado un objeto X de $\mathbb{C}$, es fácil construir una función monótona no decreciente de $\mathbb{N}$ *sobre* X. Por la proposición 4.3 sabemos que dicha función es un o-epimorfismo. Por consiguiente $\mathbb{N}$ es un o-epi-objeto de $\mathbb{C}$.

Teorema 4.8. *Sea A un epi-objeto de una O-categoría $\mathbb{K}$. El operador H_A que a cada objeto X de $\mathbb{K}$ le asocia el conjunto ordenado $[A, X]$, y a cada morfismo $f \in [X, Y]$ le asocia la función $f_* : [A, X] \to [A, Y] : h \mapsto f \circ h$ es un funtor fiel de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{P}os$.*

Demostración. H_A está bien definido pues f_* respeta orden gracias a que en la O-categoría $\mathbb{K}$ la composición es compatible con el orden; H_A es un funtor por ser la restricción del bifuntor Hom. Veamos entonces que es fiel:

$$\begin{aligned} H_A(f) = H_A(g) &\Rightarrow f_* = g_* \\ &\Rightarrow (\forall h \in [A, X])\,(f \circ h = g \circ h) \\ &\Rightarrow f \circ h_X = g \circ h_X \\ &\Rightarrow f = g. \end{aligned}$$

La proposición anterior, bajo la óptica del corolario 3.3, puede enunciarse así:

Corolario 4.9. *Si $(\mathbb{K}, \leq)$ es una O-categoría, A un epi-objeto de $\mathbb{K}$ y $\leq_{H_A}$ el orden asociado al funtor H_A, entonces $(\mathbb{K}, \leq_{H_A})$ es una O-categoría.*

Surge la inquietud de saber si, en el caso particular de un o-epi-objeto, la nueva estructura de O-categoría de $\mathbb{K}$ tiene alguna característica especial. La siguiente proposición aclara la situación y nos proporciona una relación entre el orden original de $\mathbb{K}$ y cualquier otro orden producido por epi-objetos.

Teorema 4.10. *Sea $(\mathbb{K}, \leq)$ una O-categoría y sea A un epi-objeto de $\mathbb{K}$.*

a) El orden original de $\mathbb{K}$ está contenido en el orden $\leq_{H_A}$.

b) Si A es un o-epi-objeto de $\mathbb{K}$, entonces el orden original de $\mathbb{K}$ coincide con el orden $\leq_{H_A}$.

Demostración. a) En efecto,

$$\begin{aligned} f \leq g &\Rightarrow f \circ h \leq g \circ h, \text{ para todo } h \text{ componible a derecha con } f \text{ y } g \\ &\Rightarrow f_* \leq g_* \\ &\Rightarrow H_A(f) \leq H_A(g) \\ &\Rightarrow f \leq_{H_A} g. \end{aligned}$$

b) Si A es un o-epi-objeto, entonces:

$$\begin{aligned} f \leq_{H_A} g &\Rightarrow H_A(f) \leq H_A(g) \\ &\Rightarrow (\forall h \in [A, X])\,(f \circ h \leq g \circ h) \\ &\Rightarrow f \circ h_X \leq g \circ h_X \\ &\Rightarrow f \leq g. \end{aligned}$$

Nota: Vale la pena destacar que no toda estructura de O-categoría proviene de una construcción del tipo anterior. Basta por ejemplo notar que la O-categoría $\mathbb{P}os$ no puede serlo, pues no tiene un epi-objeto, ya que ésto implicaría que hay un conjunto con al menos una función sobreyectiva a cualquier otro conjunto.

5. Relaciones entre O-categorías generadas por funtores fieles

Hemos probado que funtores fieles de una categoría $\mathbb{K}$ en una O-categoría $\mathbb{C}$ producen estructuras de O-categoría sobre $\mathbb{K}$. Si notamos $\leq_F$ y $\leq_G$ las relaciones de orden en los morfismos de $\mathbb{K}$, asociadas a los funtores F y G respectivamente, la existencia de una transformación natural $\lambda : F \Rightarrow G$ puede incidir sobre la relación que puede haber entre $\leq_F$ y $\leq_G$. Ciertas propiedades de λ que definimos a continuación nos servirán para establecer, en algunos casos, tal relación.

Definición 5.1. *Sean F y G funtores de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{C}$, con $\mathbb{C}$ una O-categoría, y sea $\lambda : F \Rightarrow G$ una transformación natural.*

Se dice que λ es una o-epi transformación natural si para todo X objeto de $\mathbb{K}$, $\lambda_X : F(X) \to G(X)$ es un o-epimorfismo.

Se dice que λ es una o-mono transformación natural si para todo X objeto de $\mathbb{K}$, $\lambda_X : F(X) \to G(X)$ es un o-monomorfismo.

Teorema 5.2. *Sean F y G dos funtores fieles de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{C}$, con $\mathbb{C}$ una O-categoría, $\lambda : F \Rightarrow G$ una transformación natural, y $\leq_F, \leq_G$ los órdenes en los morfismos de $\mathbb{K}$ asociados a los funtores F y G respectivamente.*

i) Si λ es o-epi entonces $f \leq_F g \Rightarrow f \leq_G g$.

ii) Si λ es o-mono entonces $f \leq_G g \Rightarrow f \leq_F g$.

iii) Si λ es o-epi y o-mono el orden asociado a los dos funtores es el mismo.

Demostración. El diagrama siguiente presenta la situación y nos sirve de apoyo.

$$\begin{array}{c||ccc}
\mathbb{K} & & \mathbb{C} & \\
\hline\hline
X & F(X) & \xrightarrow[\lambda_X]{} & G(X) \\
\downarrow f \ \downarrow g & \downarrow \ F(f)\!\downarrow \ F(g) & & \downarrow G(f)\!\downarrow G(g) \\
Y & F(Y) & \xrightarrow[\lambda_Y]{} & G(Y)
\end{array}$$

i) Partamos de f y g morfismos de X en Y en la categoría $\mathbb{K}$, con $f \leq_F g$;

$$\begin{aligned} f \leq_F g &\Leftrightarrow F(f) \leq F(g) \\ &\Rightarrow \lambda_Y \circ F(f) \leq \lambda_Y \circ F(g) (\mathbb{C} \text{ es O-categoría}). \end{aligned} \tag{1}$$

Como λ es una transformación natural de F en G tenemos:

$$\lambda_Y \circ F(f) = G(f) \circ \lambda_X \quad \text{y} \quad \lambda_Y \circ F(g) = G(g) \circ \lambda_X; \tag{2}$$

reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$G(f) \circ \lambda_X \leq G(g) \circ \lambda_X.$$

Si λ es *o-epi* podemos concluir

$$G(f) \leq G(g),$$

que es equivalente a

$$f \ \leq_G \ g.$$

ii) Supongamos ahora $f \ \leq_G \ g$, es decir, $G(f) \leq G(g)$. En forma similar a *i)* obtenemos

$$G(f) \circ \lambda_X \leq G(g) \circ \lambda_X$$

y por la conmutatividad del diagrama

$$\lambda_Y \circ F(f) \leq \lambda_Y \circ F(g).$$

Si λ es *o-mono* se tiene

$$F(f) \leq F(g)$$

y por lo tanto

$$f \ \leq_F \ g.$$

iii) Es consecuencia inmediata de i) y ii).

Ejemplo 5.3 Consideremos la O-categoría $\mathbb{P}os$ junto con el funtor idéntico Id y el funtor

$$\begin{aligned} P : \mathbb{P}os &\longrightarrow \mathbb{P}os \\ (X, \leq) &\longmapsto (P(X), \leq^{\forall}) \\ f &\longmapsto f_! \end{aligned}$$

donde $P(X)$ representa el conjunto de partes de X, para A y B subconjuntos de X,

$$A \leq^{\forall} B \Leftrightarrow A = B \vee (\forall a \in A)(\forall b \in B)\ (a \leq b)$$

y, para $f : (X, \leq) \to (Y, \preceq)$ morfismo de conjuntos ordenados, $f_!$ envía a cada subconjunto de X en el conjunto de sus imágenes según f.

Es fácil probar que $f_!$ resulta de nuevo un morfismo entre los conjuntos ordenados $(P(X), \leq^{\forall})$ y $(P(Y), \preceq^{\forall})$. Definamos ahora para todo objeto $(X, \leq)$ de $\mathbb{P}os$

$$\lambda_X : (X, \leq) \to (P(X), \leq^{\forall}) : x \mapsto \{x\}.$$

Claramente λ define una familia de morfismos en $\mathbb{P}os$. Además se cumple que para todo $x \in X$, $f_!(\lambda_X(x)) = f_!(\{x\}) = \{f(x)\}$, y, $\lambda_Y(f(x)) = \{f(x)\}$, luego λ es una transformación natural de Id en P.
Por otra parte, probemos que los λ_X son todos o-monomorfismos. Sean f, g morfismos con codominio X tales que $\lambda_X \circ f \leq \lambda_X \circ g$. Para todo w del dominio de f y g se tiene $\lambda_X(f(w)) \leq^{\forall} \lambda_X(g(w))$, es decir, $\{f(w)\} \leq^{\forall} \{g(w)\}$, luego $f(w) \leq g(w)$, lo cual implica $f \leq g$.
Por la proposición 5.2 se tiene entonces:

$$f \leq_P g \Rightarrow f \leq_{Id} g.$$

La implicación en el sentido contrario no se cumple, como puede verse en el siguiente caso particular.
Consideremos las siguientes funciones del conjunto de los números naturales, con su orden usual, en sí mismo:

$$f(x) = x + 1,\ g(x) = x + 2.$$

Es claro que $f \leq_{Id} g$; sin embargo, si tomamos por ejemplo el subconjunto $A = \{2, 3, 4\}$, $f(A) = \{3, 4, 5\}$, $g(A) = \{4, 5, 6\}$ y se tiene $f(A) \not\leq^{\forall} g(A)$, así como $g(A) \not\leq^{\forall} f(A)$, lo que hace que f y g no sean comparables en el orden definido por el funtor P.

Ejemplo 5.4 Consideremos ahora la subcategoría de $\mathbb{P}os$ cuyos objetos son los conjuntos bien ordenados y notémosla $\mathbb{W}os$.

Sobre esta nueva categoría definimos los dos siguientes operadores:

$$\begin{aligned} P^* : \mathbb{W}os &\longrightarrow \mathbb{P}os \\ (X, \leq) &\longmapsto (P^*(X), \subseteq) \\ f &\longmapsto f_! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} in^{\circ} : \mathbb{W}os &\longrightarrow \mathbb{P}os \\ (X, \leq) &\longmapsto (X, \leq^{\circ}) \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

donde $P^*(X)$ es el conjunto de las partes no vacías de X, $f_!$ se interpreta como en el ejemplo anterior y $\leq^{\circ}$ es el orden opuesto de $\leq$.

El carácter funtorial de P^* e in° es evidente y su fidelidad resulta muy sencilla de probar.
Para todo $(X, \leq)$ objeto de $\mathbb{W}os$ podemos establecer la siguiente función entre sus imágenes mediante los funtores descritos:

$$\min_X : (P^*(X), \subseteq) \longrightarrow (X, \leq^\circ)$$
$$A \longmapsto \min_X A$$

donde $\min_X A$ es el mínimo del conjunto A en $(X, \leq)$.
Esta función es un morfismo en $\mathbb{P}os$ pues $A \subseteq B \Rightarrow \min_X B \leq \min_X A$, es decir, $\min_X A \leq^\circ \min_X B$. Además, la familia de tales morfismos define una transformación natural min de P^* en in°, ya que se tiene

$$\min_X A \in A \Rightarrow f(\min_X A) \in f(A) \Rightarrow \min_Y(f(A)) \leq f(\min_X A) \text{ y,}$$
$$(\forall a \in A)(\min_X A \leq a) \Rightarrow (\forall a \in A)(f(\min_X A) \leq f(a)) \Rightarrow f(\min_X A) \leq \min_Y(f(A)).$$

Notamos que todos los $\min_X$ son sobreyectivos porque $x = \min\{x\}$.
Por la proposición 4.3, sabemos entonces que *min* es una o-epi transformación natural y, por lo tanto, si f y g son morfismos de $\mathbb{W}os$,

$$f \leq_{P^*} g \Rightarrow f \leq_{in^\circ} g.$$

Aquí, como en el ejemplo anterior, la otra implicación no se tiene. Basta tomar $(X, \leq)$ como el conjunto de los naturales con el orden usual, y el morfismo idéntico I ($I(n) = n$), junto con el morfismo S ($S(n) = n + 1$). Evidentemente $S \leq_{in^\circ} I$. Pero si calculamos $I(\{1\}) = \{1\}$ y $S(\{1\}) = \{2\}$, éstos resultan no comparables para el orden $\leq_{P^*}$ ya que no hay ninguna relación de contenencia entre ellos.

Referencias

[A] J. Adámek, *Theory of Mathematical Structures*, Dordrecht: Reidel, 1983.

[A-H-S] J. Adámek, H. Herrlich and G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, New York: Wiley, 1990.

[A-L] L. Acosta, E. Lozano, "Una adjunción entre relaciones binarias y espacios topológicos", Boletín de Matemáticas, nueva serie, **III** (1996), no. 1, 37-41.

[B] J. Bénabou, "Introduction to Bicategories; Reports of the Midwest Category Seminar", Lecture Notes in Mathematics **47** (1967), Springer Verlag.

[C-G-R] M. S. Calenko, V. B. Gisin and D. A. Raikov, "Ordered Categories with involution", Dissertationes Mathematicae **227** (1984).

[J] P. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[Mc La] C. MacLarty, *Elementary Categories, Elementary Toposes*, Oxford: Clarendon Press, 1995.

[Mc L] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Second Edition, New York: Springer, 1998.