Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen V (1998), pp.15–26

TOPOLOGÍAS CONSISTENTES

LORENZO ACOSTA G.(*)

Resumen. Se introduce la categoría de los espacios topológicos consistentes y se muestra que el funtor que, a cada espacio topológico consistente, le asocia el conjunto ordenado por su orden de especialización, tiene como adjunto a izquierda al funtor que, a cada conjunto ordenado, le asocia el conjunto dotado con su topología de Scott, y como adjunto a derecha el funtor que, a cada conjunto ordenado, le asocia el conjunto dotado con su topología débil.

Abstract. We introduce the category of consistent topological spaces and we show that the functor which associates to a consistent topological space the set ordered by its specialization order has as left adjoint the functor which associates to a partial ordered set the set endowed with its Scott topology, and as right adjoint the functor which associates to a partial ordered set the set endowed with its weak topology.

Keywords. Directed orders, Scott's topology, specialization order, consistent topologies.

0. Introducción

Sea X un conjunto ordenado. Decimos que una topología sobre X es *(orden) concordante* si el orden de especialización (que está definido por $x \leq y \Leftrightarrow x \in adh\{y\}$) es la relación de orden dada. Alexandrov estudió las topologías concordantes maximales y las llamó "discretas" [4]. Más tarde, estas topologías, que están caracterizadas como aquellas que son cerradas para intersecciones arbitrarias, fueron llamadas *topologías de Alexandrov* o *topologías casi-discretas.* Para una relación de orden dada, también existe una topología concordante minimal, llamada *topología superior (upper topology)* o *topología débil (weak topology).* Las topologías concordantes son entonces aquellas que están entre

(*)Texto recibido 28/1/99, revisado 28/6/99. Lorenzo Acosta, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional - Sede Bogotá. E-mail: lacosta@matematicas.unal.edu.co

la topología débil y la topología de Alexandrov del conjunto ordenado. Entre las topologías concordantes hay una que ha sido estudiada por muchos autores a través de los años: la *topología de Scott.* Este nombre se debe a los trabajos de D. Scott sobre retículos continuos [10]. Esta topología es muy importante en la teoría de conjuntos ordenados continuos y retículos continuos. Las topologías que se encuentran entre la topología débil y la topología de Scott de un conjunto ordenado se llaman *topologías consistentes.* Las topologías concordantes fueron estudiadas por Gierz, Keimel, Lawson, Mislove y Scott en sus trabajos sobre retículos continuos (recopilados en [6]). Fueron también usadas por Johnstone en su magnífico libro sobre los espacios de Stone [8]. Algunos de los autores que han usado estas topologías son Erné, Gatzke, Hofmann, Hoffmann, Schwarz, Stralka, Weck y muchos otros.

En este artículo se introduce la categoría de los espacios topológicos consistentes y se muestra que el funtor que, a cada espacio topológico consistente, le asocia el conjunto ordenado por su orden de especialización, tiene como adjunto a izquierda al funtor que, a cada conjunto ordenado, le asocia el conjunto dotado con su topología de Scott, y como adjunto a derecha al funtor que, a cada conjunto ordenado, le asocia el conjunto dotado con su topología débil.

1. Nociones básicas

Recordamos aquí las nociones de adjunción de Kan y adjunción de Ore. Para las definiciones de categoría y funtor, que asumimos conocidas, se pueden consultar [2], [3] y [7]. Se definen también aquí el orden de especialización asociado a una topología y las topologías $v(R)$ (topología débil) y $\gamma(R)$ (topología de Alexandrov) asociadas a una relación de orden R.

Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ dos categorías y $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ dos funtores. Decimos que F es adjunto a izquierda de G si existe una biyección natural entre los conjuntos $[FX;Y]$ y $[X;GY]$ para todo objeto X de $\mathbf{C}$ y todo objeto Y de $\mathbf{D}$ ($[A;B]$ denota el conjunto de morfismos de A en B en la categoría correspondiente). En este caso también se dice que G es adjunto a derecha de F o que (F,G) es un *par adjunto de Kan.*

Recordemos ahora que todo conjunto ordenado $(X,\leq)$ puede verse como una categoría donde los objetos son los elementos de X y el conjunto de morfismos de a en b es $\{(a,b)\}$ si $a \leq b$ y es vacío en caso contrario. Bajo este punto de vista, un funtor entre dos conjuntos ordenados es una función monótona no decreciente. Sean ahora $f : (X,\leq) \to (Y,\preceq)$ y $g : (Y,\preceq) \to (X,\leq)$ dos funciones monótonas no decrecientes. Tenemos que f es *adjunta a izquierda* de g si y solamente si para todo x de X y todo y de Y

$$f(x) \preceq y \Longleftrightarrow x \leq g(y).$$

Dentro de este contexto (f, g) se llamará un *par adjunto de Ore*. Para un estudio detallado sobre la adjunción de Ore puede consultarse [9].

Nota 1.1 Las funciones adjuntas también reciben el nombre de "residuated mappings" (ver [5]) y "conexiones de Galois", aunque este término se utiliza generalmente para el caso contravariante.

Definición 1.1. *Sea R una relación binaria sobre el conjunto X. Llamaremos $\downarrow_R (x)$ al conjunto de los $y \in X$ tales que $(y, x) \in R$ y llamaremos $\uparrow_R (x)$ al conjunto de los $y \in X$ tales que $(x, y) \in R$.*

La siguiente caracterización de la adjunción será útil más adelante. Su demostración es un sencillo ejercicio para el lector.

Proposición 1.1. *Sean $f : (X, \leq) \to (Y, \preceq)$, $g : (Y, \preceq) \to (X, \leq)$ dos funciones entre conjuntos ordenados. Son equivalentes:*

a) *f es adjunta a izquierda de g.*
b) *f y g son monótonas no decrecientes, $f \circ g \preceq 1_Y$ y $g \circ f \geq 1_X$.*

Introducimos ahora un operador que nos permite poner en contacto los espacios topológicos y los conjuntos dotados con una relación binaria.

Definición 1.2. *Sea τ una topología sobre X. Definimos*

$$\alpha(\tau) = \{(a, b) \in X \times X \mid a \in adh_\tau(b)\},$$

donde $adh_\tau(b)$ designa la adherencia de $\{b\}$ en el espacio topológico (X, τ).

Proposición 1.3. *a) $\alpha(\tau)$ es una relación de pre-orden sobre X.*
b) τ es una topología T_0 si y solo si $\alpha(\tau)$ es antisimétrica.

En el caso de los espacios T_0, $\alpha(\tau)$ es entonces una relación de orden sobre X, denominada "orden de especialización" para τ [8].

La siguiente proposición nos muestra el comportamiento del operador α con respecto a las funciones continuas. Este resultado es el que nos permitirá considerar este operador como un funtor entre categorías adecuadas. Su demostración es sencilla si se utiliza la caracterización de la continuidad en términos de adherencia.

Proposición 1.4. *Si $f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ es una función continua entre los espacios topológicos (X, τ) y (Y, μ), entonces $f : (X, \alpha(\tau)) \to (Y, \alpha(\mu))$ respeta las relaciones.*

Definición 1.3. *Siguiendo la notación de [1] y [2], designamos por* **Gra** *la categoría cuyos objetos son las parejas* (X, R) *donde* R *es una relación binaria sobre* X *y cuyos morfismos son las funciones que respetan las relaciones. Designaremos por* **Pos** *la sub-categoría plena de* **Gra** *cuyos objetos son las parejas* (X, R) *donde* R *es una relación de orden sobre* X. *Como es costumbre, designaremos por* **Top** *la categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas y por* $\mathbf{TopT}_0$ *la subcategoría plena de* **Top** *cuyos objetos son los espacios topológicos* $\mathbf{T}_0$.

Nota 1.2. En [3], la categoría **Gra** es designada por **Rel**.

Proposición 1.5. *Si definimos* $\alpha(f) = f$, *entonces* α *es un funtor de* $\mathbf{TopT}_0$ *en* **Pos**.

Sea R una relación de orden sobre X. Podemos preguntarnos cuáles son las topologías τ sobre X tales que $\alpha(\tau) = R$. Una respuesta a esta pregunta se encuentra en [8]:

$$\alpha(\tau) = R \Leftrightarrow v(R) \subseteq \tau \subseteq \gamma(R)$$

donde $v(R)$ es la topología generada por los complementos de los conjuntos de la forma $\downarrow_R (x)$ con $x \in X$, y $\gamma(R)$ es la topología cuyos abiertos son los subconjuntos M de X tales que

$$x \in M \wedge (x, y) \in R \Rightarrow y \in M.$$

Estos subconjuntos se llaman R-finales.

$v(R)$ es conocida con el nombre de *topología débil* (también es llamada *upper topology* [6] y *upper interval topology* [8]) *y* $\gamma(R)$ es la *topología de Alexandrov* asociada a R (ver [2] y [8]).

Nota 1.3. Puede mostrarse que si se define $\gamma(f) = f$, γ resulta ser un funtor de **Gra** en **Top** y que $\alpha : \mathbf{Top} \to \mathbf{Gra}$ es adjunto a derecha de $\gamma : \mathbf{Gra} \to \mathbf{Top}$. [1].

2. Topología de Scott

En esta sección introducimos las nociones necesarias para definir la topología de Scott asociada a una relación de orden, como son la de conjunto dirigido, inaccesibilidad por dirigidos y convergencia de conjuntos dirigidos.

Definición 2.1. *Sea* X *un conjunto dotado con una relación de orden* R. *Un subconjunto no vacío* D *de* X *es* R*-dirigido si para todo* $x, y \in D$ *existe un* $z \in D$ *tal que* $(x, z), (y, z) \in R$.

El siguiente lema nos muestra el comportamiento de las funciones monótonas con respecto a los conjuntos dirigidos y los conjuntos finales.

Lema 2.1. *Sean (X,R) y (Y,S) dos conjuntos dotados con relaciones de orden y $f:(X,R)\to(Y,S)$ una función monótona.*
a) Si $V\subseteq Y$ es S-final entonces $f^{-1}(V)$ es R-final.
b) Si $D\subseteq X$ es R-dirigido entonces $f(D)$ es S-dirigido.

Demostración. En efecto, si $V\subseteq Y$ es S-final

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(V)\wedge(x,y)\in R &\Rightarrow f(x)\in V\wedge(f(x),f(y))\in S\\ &\Rightarrow f(y)\in V\\ &\Rightarrow y\in f^{-1}(V)\end{aligned}$$

luego $f^{-1}(V)$ es R-final. Por otro lado, si $D\subseteq X$ es R-dirigido

$$\begin{aligned} x,y\in D &\Rightarrow (\exists z\in D)\,((x,z),(y,z)\in R)\\ &\Rightarrow (\exists z\in D)\,((f(x),f(z)),(f(y),f(z))\in S)\end{aligned}$$

y por consiguiente $f(D)$ es S-dirigido.

Corolario 2.2. *Sean R,S relaciones de orden sobre X tales que $R\subseteq S$.*
a) Si $V\subseteq X$ es S-final entonces V es R-final,
b) Si $D\subseteq X$ es R-dirigido entonces D es S-dirigido.

Demostración. Basta observar que si $R\subseteq S$ entonces $1_X:(X,R)\to(X,S)$ es monótona.

A continuación definimos la noción de convergencia de sub-conjuntos dirigidos en un espacio topológico dotado con una relación de orden. Esta noción está relacionada con la convergencia de redes en un espacio topológico.

Definición 2.2. *Sean X un conjunto, τ una topología sobre X y R una relación de orden sobre X. Si D es un subconjunto R-dirigido de X y $x\in X$, decimos que D converge a x según τ (en símbolos $D\underset{\tau}{\to}x$) si para toda vecindad V de x existe un $d\in D$ tal que $D\cap(\uparrow_R(d))\subseteq V$.*

En otras palabras, $D\underset{\tau}{\to}x$ si y solamente si la red

$$i:D\to(X,\tau):d\mapsto d$$

converge a x.

Como nos muestra la siguiente proposición, bajo ciertas condiciones, las funciones continuas preservan la convergencia de sub-conjuntos dirigidos. En la nota 2.1. se explica la diferencia con el comportamiento de las funciones continuas con la convergencia de redes en general.

Proposición 2.3. *Sean R y τ una relación de orden y una topología sobre el conjunto X y S y μ una relación de orden y una topología sobre el conjunto Y. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ es continua y $\mu\subseteq\gamma(S)$ entonces, para todo subconjunto R-dirigido D de X tal que $f(D)$ sea S-dirigido, $D\underset{\tau}{\to}x$ implica $f(D)\underset{\mu}{\to}f(x)$.*

Demostración. En efecto, sea D un subconjunto R-dirigido de X tal que $D\underset{\tau}{\to}x$ y $f(D)$ es S-dirigido. Sea V una vecindad de $f(x)$. Por ser f continua, $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x y así existe $d\in D$ tal que $D\cap(\uparrow_R(d))\subseteq f^{-1}(V)$ y por consiguiente $f(d)\in V$. Como V es S-final tenemos que $\uparrow_R(f(d))\subseteq V$ y por lo tanto $f(D)\underset{\mu}{\to}f(x)$.

Nota 2.1. En la situación de la proposición anterior se producen dos redes con valores en Y. La primera es la compuesta de $i:D\to X:d\mapsto d$ con $f:X\to(Y,\mu)$ y la segunda es la inclusión de $f(D)$ en Y, $j:f(D)\to(Y,\mu):z\mapsto z$. La continuidad de f trae como consecuencia la convergencia de la primera red a $f(x)$. Sin embargo, sin hipótesis adicionales no se puede garantizar la convergencia de la segunda red a $f(x)$.

El siguiente ejemplo ilustra lo que acabamos de comentar.

Ejemplo 2.1. Sean $X=\mathbb{N}\cup\{\infty\},\tau$ la topología sobre X cuyos abiertos son $\phi,X,2\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ y $2\mathbb{N}+1$ y R la relación de orden usual sobre X. Sean $Y=\{0,1\},\mu$ la topología discreta sobre Y y S la relación de orden usual sobre Y. Consideremos la función $f:X\to Y$ definida por:

$$x\longmapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\in 2\mathbb{N}\cup\{\infty\}\\ 1 & \text{si } x\in 2\mathbb{N}+1.\end{cases}$$

$f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ es continua y $D=X$ es un subconjunto R-dirigido de X tal que $f(D)=Y$ es un subconjunto S-dirigido de Y y $D\underset{\tau}{\to}\infty$. Sin embargo, no es cierto que $f(D)\underset{\mu}{\to}f(\infty)=0$.

Pregunta: ¿La monotonía de f implica la convergencia de la segunda red?

La noción que vamos a presentar es fundamental para comprender la definición de la topología de Scott.

Definición 2.3. *Sea X un conjunto dotado con una relación de orden R. Diremos que un subconjunto A de X es inaccesible por R-dirigidos si para todo subconjunto R-dirigido D de X tal que $\sup_R D\in A$, se tiene que $D\cap A\neq\phi$.*

Un subconjunto A de X es inaccesible por R-dirigidos si y solamente si su complemento es cerrado para R-sups de R-dirigidos.

La colección de sub-conjuntos inaccesibles por R-dirigidos no constituye una topología. Sin embargo, al imponer ciertas condiciones a estos sub-conjuntos sí se obtiene una topología, que parece ser la más conveniente para trabajar con la convergencia de sub-conjuntos dirigidos.

Proposición 2.4. *Sea X un conjunto dotado con una relación de orden R. La colección $\sigma(R)$ de subconjuntos de X que son R-finales e inaccesibles por R-dirigidos es una topología sobre X.*

Demostración. Claramente ϕ y X son elementos de $\sigma(R)$. Supongamos que $A, B \in \sigma(R)$ y que D es un subconjunto R-dirigido de X tal que $\sup_R D \in A \cap B$. Existen entonces $x \in D \cap A$ y $y \in D \cap B$. Por ser D R-dirigido, existe $z \in D$ tal que $(x, z), (y, z) \in R$ y por ser A y B R-finales tenemos que $z \in A \cap B$. Concluimos que $A \cap B$ es inaccesible por R-dirigidos y como es R-final tenemos que $A \cap B \in \sigma(R)$. Supongamos ahora que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una colección de elementos de $\sigma(R)$ y que D es un subconjunto R-dirigido de X tal que $\sup_R D \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Entonces $\sup_R D \in A_i$ para algún $i \in I$ y por consiguiente $D \cap A_i \neq \phi$. Así, $D \cap \bigcup_{i \in I} A_i \neq \phi$ y $\bigcup_{i \in I} A_i$ es inaccesible por R-dirigidos. Siendo la unión de conjuntos R-finales un conjunto R-final, concluimos que $\bigcup_{i \in I} A_i \in \sigma(R)$.

Definición 2.4. *Sea X un conjunto dotado con una relación de orden R. La topología $\sigma(R)$ se llama la topología de Scott para (X, R).*

3. Topologías consistentes

Presentamos en esta sección la noción de topología consistente y mostramos que σ se puede extender a los morfismos de una categoría de tal manera que resulta funtorial y es adjunto a izquierda del funtor α definido entre las categorías correspondientes. La definición de topología consistente con una relación de orden se encuentra en [6]. En este mismo libro se plantea como ejercicio demostrar el corolario 3.7.

Definición 3.1. *Sea X un conjunto y sea R una relación de orden sobre X. Diremos que una topología τ sobre X es R-consistente si:*

(1) *$adh_\tau(x) = \downarrow_R(x)$ para todo $x \in X$,*
(2) *Para todo subconjunto R-dirigido D de X, si $x = \sup_R D$ entonces $D \underset{\tau}{\rightarrow} x$.*

Las proposiciones 3.1 a 3.6 tienen como objetivo conseguir una caracterización bastante clara de las topologías consistentes en términos de la relación de contenencia, la topología de Scott y la topología débil.

Proposición 3.1. *La condición (1) es equivalente a $\alpha(\tau) = R$.*

Demostración. Basta observar que:

$$\begin{aligned}\alpha(\tau) = R &\Leftrightarrow [(x,y) \in \alpha(\tau) \Leftrightarrow (x,y) \in R] \\ &\Leftrightarrow [x \in adh_\tau(y) \Leftrightarrow x \in \downarrow_R (y)] \\ &\Leftrightarrow adh_\tau(y) = \downarrow_R (y).\end{aligned}$$

Corolario 3.2. *τ satisface (1) si y solamente si $v(R) \subseteq \tau \subseteq \gamma(R)$.*

Proposición 3.3. *Sean $\tau \supseteq v(R)$ y D un subconjunto R-dirigido de X tal que x es una R-cota superior de D. Si $D \underset{\tau}{\rightarrow} x$ entonces $x = \sup_R D$.*

Demostración. En efecto, si $(z,x) \notin R$ entonces $X \setminus \downarrow_R (z)$ es una vecindad de x. Por consiguiente, $D \cap (X \setminus \downarrow_R (z)) \neq \phi$ y así $D \nsubseteq \downarrow_R (z)$ y z no es R-cota superior de D. Concluímos que x es la mínima R-cota superior de D.

La siguiente proposición es evidente:

Proposición 3.4. *Si $\tau \subseteq \gamma(R)$ y D es un subconjunto dirigido de X entonces para todo $d \in D$ se tiene que $D \underset{\tau}{\rightarrow} d$.*

Proposición 3.5. *Si $\tau \subseteq \sigma(R)$ entonces τ satisface la condición (2).*

Demostración. Supongamos que $\tau \subseteq \sigma(R)$ y sea D un subconjunto R-dirigido de X tal que $x = \sup_R D$. Sea V una vecindad de X. Como V es inaccesible por R-dirigidos $V \cap D \neq \phi$, y como V es un subconjunto R-final de X tenemos que D está eventualmente en V. Por consiguiente, $D \underset{\tau}{\rightarrow} x$.

Proposición 3.6. *Si $\tau \subseteq \gamma(R)$ la condición (2) implica $\tau \subseteq \sigma(R)$.*

Demostración. Sea $V \in \tau$. Como $\tau \subseteq \gamma(R)$ basta mostrar que V es inaccesible por R-dirigidos. Sea D un subconjunto R-dirigido de X tal que $x = \sup_R D \in V$. Por la condición (2) $D \underset{\tau}{\rightarrow} x$, luego $V \cap D \neq \phi$. Así, V es inaccesible por R-dirigidos y $\tau \subseteq \sigma(R)$.

Corolario 3.7. *τ es R-consistente si y solamente si $v(R) \subseteq \tau \subseteq \sigma(R)$.*

Definición 3.2. *a) Sea R una relación de orden sobre X. Designaremos por $R - Cons(X)$ al conjunto de topologías sobre X que son R-consistentes.*

b) Designaremos por $Cons(X)$ al conjunto de topologías sobre X que son R-consistentes para alguna relación de orden R sobre X.

Como consecuencia inmediata de la proposición 3.1 tenemos el siguiente resultado, que nos muestra que una topología solamente puede ser consistente con respecto a una relación de orden, a saber, su orden de especialización.

Proposición 3.8. *$\tau \in Cons(X)$ si y solamente si $\tau \in \alpha(\tau) - Cons(X)$.*

Nuestro propósito ahora es encontrar una relación de orden sobre el conjunto $Pos(X)$ que nos permita relacionarlo adecuadamente con las topologías consistentes mediante los operadores α y σ.

Proposición 3.9. *Si τ, $\mu \in Cons(X)$ y $\tau \supseteq \mu$ entonces $1_X : (X, \alpha(\tau)) \to (X, \alpha(\mu))$ preserva sups de dirigidos.*

Demostración. Sea D un subconjunto $\alpha(\tau)$-dirigido de X, tal que $x = \sup_{\alpha(\tau)} D$. Entonces $D \underset{\tau}{\to} x$ y como $1_X : (X, \tau) \to (X, \mu)$ es continua tenemos que $D \underset{\mu}{\to} x$. Además, x es $\alpha(\mu)$-cota superior de D. Por la proposición 3.3 concluimos que $x = \sup_{\alpha(\mu)} D$.

Proposición 3.10. *Si $1_X : (X, R) \to (X, S)$ preserva sups de dirigidos entonces $\sigma(R) \supseteq \sigma(S)$.*

Demostración. Sea $V \in \sigma(S)$. Debemos ver que V es R-final e inaccesible por R-dirigidos. Por el lema anterior, V es R-final. Sea ahora D un subconjunto R-dirigido de X tal que $\sup_R D \in V$. Por el lema anterior, D es S-dirigido y por hipótesis $\sup_R D = \sup_S D$. Por lo tanto $\sup_S D \in V$ y así $D \cap V \neq \phi$. Concluímos que V es inaccesible por R-dirigidos.

Definición 3.3. *Definimos la siguiente relación de orden en $Pos(X)$:*

$$R \leq S \Leftrightarrow 1_X : (X, R) \to (X, S) \text{ preserva sups de dirigidos.}$$

Corolario 3.11. *Las siguientes funciones son monótonas*

$$\alpha : (Cons(X), \supseteq) \to (Pos(X), \leq)$$
$$\sigma : (Pos(X), \leq) \to (Cons(X), \supseteq).$$

Teorema 3.12. *$\sigma : (Pos(X), \leq) \to (Cons(X), \supseteq)$ es adjunta a izquierda de $\alpha : (Cons(X), \supseteq) \to (Pos(X), \leq)$.*

Demostración. Basta probar que para toda $\tau \in Cons(X)$ y toda $R \in Pos(X)$ se tiene $\sigma\alpha(\tau) \supseteq \tau$ y $R \leq \alpha\sigma(R)$. Por la proposición 3.1 sabemos que $R = \alpha\sigma(R)$ y como τ es $\alpha(\tau)$-consistente, la proposición 3.6 nos dice que $\sigma\alpha(\tau) \supseteq \tau$.

Las siguientes dos proposiciones nos muestran que los morfismos adecuados para trabajar con los conjuntos ordenados son las funciones que preservan sups de dirigidos, si se quiere relacionarlos con los espacios topológicos dotados con topologías consistentes.

Proposición 3.13. *Sea $f : (X, R) \to (Y, S)$ una función entre conjuntos ordenados que preserva sups de dirigidos. Entonces $f : (X, \sigma(R)) \to (Y, \sigma(S))$ es continua.*

Demostración. Basta ver que si $V \in \sigma(S)$ entonces $f^{-1}(V)$ es inaccesible por R-dirigidos. Sea D un subconjunto R-dirigido de X tal que $\sup_R D \in f^{-1}(V)$. Entonces $\sup_S f(D) = f(\sup_R D) \in V$ y por consiguiente $f(D) \cap V \neq \phi$. Concluimos que $D \cap f^{-1}(V) \neq \phi$ y así $f^{-1}(V)$ es inaccesible por R-dirigidos.

Proposición 3.14. *Si* $f : (X,\tau) \to (Y,\mu)$ *es continua entre espacios topológicos con topologías consistentes entonces* $f : (X,\alpha(\tau)) \to (Y,\alpha(\mu))$ *preserva sups de dirigidos.*

Demostración. Sea D un subconjunto $\alpha(\tau)$-dirigido tal que $x = \sup_{\alpha(\tau)} D$. Como τ es $\alpha(\tau)$-consistente entonces $D \underset{\tau}{\to} x$ y como f es continua tenemos que $f(D) \underset{\mu}{\to} f(x)$. Además, como x es $\alpha(\tau)$-cota superior de D y $f : (X,\alpha(\tau)) \to (Y,\alpha(\mu))$ es monótona, $f(x)$ es $\alpha(\mu)$-cota superior de $f(D)$. Por lo tanto, debido a que μ es $\alpha(\mu)$-consistente, $f(x) = \sup_{\alpha(\mu)} f(D)$.

Definición 3.4. *Designaremos por* **Cons** *la subcategoría plena de* **Top** *cuyos objetos son espacios topológicos consistentes y por* **Posd** *la subcategoría de* **Pos** *cuyos objetos son los conjuntos ordenados y cuyos morfismos son las funciones que preservan sups de dirigidos.*

Corolario 3.15. α : **Cons** $\to$ **Posd** *y* σ : **Posd** $\to$ **Cons** *son funtores si definimos* $\alpha(f) = f$ *y* $\sigma(f) = f$.

La adjunción de Ore presentada en el teorema 3.12 se extiende naturalmente a una adjunción de Kan de la siguiente manera:

Teorema 3.16. σ : **Posd** $\to$ **Cons** *es adjunto a izquierda de* α : **Cons** $\to$ **Posd**.

Demostración. Veamos que $[(X,\sigma(R)),(Y,\mu)]_{\mathbf{Cons}} = [(X,R),(Y,\alpha(\mu))]_{\mathbf{Posd}}$. Sea $f : (X,(\sigma(R))) \to (Y,\mu)$ continua, donde μ es consistente y sea D un subconjunto R-dirigido de X con $x = \sup_R D$. Como $f : (X,\alpha\sigma(R)) \to (Y,\alpha(\mu))$ es monótona y $\alpha\sigma(R) = R$, tenemos que $f(D)$ es $\alpha(\mu)$-dirigido y x es $\alpha(\mu)$-cota superior de $f(D)$. Debido que $\sigma(R)$ es consistente $D \underset{\sigma(R)}{\to} x$, y como f es continua tenemos que $f(D) \underset{\mu}{\to} f(x)$. En virtud de la proposición 3.3. $f(x) = \sup_{\alpha(\mu)} f(D)$ y concluímos que f preserva sups de dirigidos.
Recíprocamente, sean $f : (X,R) \to (Y,\alpha(\mu))$ una función que preserva sups de dirigidos $V \in \mu$. Sabemos que $f^{-1}(V)$ es R-final, luego basta ver que es inaccesible por R-dirigidos. Sea D un subconjunto R-dirigido de X tal que $x = \sup_R D \in f^{-1}(V)$. Entonces $f(x) = f(\sup_R D) = \sup_{\alpha(\mu)} f(D) \in V$ y como μ es consistente tenemos que $f(D) \cap V \neq \phi$ y entonces $D \cap f^{-1}(V) \neq \phi$.

Problemas:

(1) Caracterizar topológicamente la propiedad "ser consistente" para topologías sobre un conjunto X.
(2) Caracterizar los puntos fijos del operador $\alpha \circ \sigma$.

4. Otras adjunciones relacionadas

Como se mostró en [0] y [1] el funtor α que asigna a cada topología su orden de especialización admite adjunto a derecha y a izquierda al considerarlo entre las categorías adecuadas. Resumimos aquí los resultados presentados en los artículos citados y los relacionamos con este trabajo.

Para comenzar recordemos la definición de dos categorías:
Posla: Categoría cuyos objetos son los conjuntos ordenados y cuyos morfismos son funciones adjuntas a izquierda.
TopT$_0$ la: Categoría cuyos objetos son los espacios topológicos T$_0$ y cuyos morfismos son funciones t-adjuntas a izquierda ($f : (X,\tau) \to (Y,\mu)$ es t-adjunta a izquierda si es continua y para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f^{-1}(adh_\mu(y)) = adh_\tau(x)$).
Sabemos que

$$\alpha : \mathbf{TopT_0} \to \mathbf{Pos} \text{ es adjunto a derecha de } \gamma : \mathbf{Pos} \to \mathbf{TopT_0}$$
$$\alpha : \mathbf{TopT_0la} \to \mathbf{Posla} \text{ es adjunto a derecha de } \gamma : \mathbf{Posla} \to \mathbf{TopT_0la}$$
$$\alpha : \mathbf{TopT_0la} \to \mathbf{Posla} \text{ es adjunto a izquierda de } \upsilon : \mathbf{Posla} \to \mathbf{TopT_0la}$$
$$\alpha : \mathbf{Cons} \to \mathbf{Posd} \text{ es adjunto a derecha de } \sigma : \mathbf{Posd} \to \mathbf{Cons}$$

donde en todos los casos los funtores se comportan como la identidad en morfismos. Consideremos ahora la categoría **Consla** = **Cons** $\cap$ **TopT$_0$la** : categoría cuyos objetos son los espacios topológicos T$_0$ y consistentes y cuyos morfismos son las funciones t-adjuntas a izquierda.

Claramente α es un funtor de **Consla** en **Posla**, y, como $\upsilon(R)$ y $\sigma(R)$ son topologías consistentes para toda relación de orden R, υ y σ son funtores de **Posla** en **Consla**. Más aún, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.1.
a) α : **Consla** $\to$ **Posla** *es adjunto a izquierda de* υ : **Posla** $\to$ **Consla**.
b) α : **Consla** $\to$ **Posla** *es adjunto a derecha de* σ : **Posla** $\to$ **Consla**.

Referencias

0. L. Acosta, *T-adjunction*, Universidad Nacional de Colombia (1998 preprint).
1. L. Acosta y E. Lozano, "Una adjunción entre relaciones binarias y espacios topológicos", Boletín de Matemáticas, Nueva serie **III, N°**1 (1996), 37-41.
2. J. Adámek, *Theory of Mathematical Structures*, Dordrecht: Reidel, 1983.
3. J. Adámek, H. Herrlich and G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, New York: Wiley, 1990.

4. P. S. Alexandrov, "Diskrete Räume", Mat. Sb. 1 **43** (1937), 501-19 Z 18-91.
5. T. S. Blyth, "Residuated mappings", Order 1 (1984).
6. G. Gierz, *et al. A Compendium of Continuous Lattices*, New York: Springer, 1980.
7. S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, New York: Springer, 1971.
8. P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
9. C. J. Ruíz, *Teoría de la adjunción*, Trabajo de año sabático, Universidad Nacional de Colombia (1989).
10. D. S. Scott, "Continuous lattices", en: *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, Springer Lecture Notes in Mathematics **274** (1972), 97-136.