Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen V (1998), pp.1–13

EL TEOREMA DE TICHONOFF PARA FORMAS DÉBILES DE COMPACIDAD

XAVIER CAICEDO(*)

Resumen. En contraste con el conocido teorema de Tichonoff acerca de la compacidad de productos de espacios compactos, las formas débiles de compacidad de un espacio topológico, como son la propiedad de Lindelöf, la compacidad enumerable y en general la llamada $[\lambda, \kappa]$-compacidad (todo recubrimiento abierto de cardinal κ tiene un subrecubrimiento de cardinal menor que λ), no son siempre preservadas por productos. Presentamos aquí una caracterización para cada λ y κ de aquellas familias de espacios para las que se da la preservación de la $[\lambda, \kappa]$-compacidad por productos, generalizando y unificando así resultados parciales conocidos al respecto. Damos además algunas aplicaciones, incluyendo una insólita aplicación a la teoría de modelos que nos condujo a la caracterización mencionada.

Abstract. Weak compactness properties of topological spaces, as the Lindelöf property, countable compactness, etc, are not in general preserved by products. We provide here a characterization, for each λ and κ, of those families of spaces for which $[\lambda, \kappa]$-compactness is preserved by products, generalizing and unifying known partial results. We present also some applications, including a surprising application to abstract model theory which suggested our characterization.

Keywords. $[\lambda, \kappa]$-compactness, abstract model theory, topological products.

(*)Texto recibido 9/4/99, revisado 25/6/99. Xavier Caicedo, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional-Sede Bogotá; Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes. e-mail: xcaicedo@uniandes.edu.co. Conferencia Pronunciada en la XLVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, Septiembre 1998.

0. Introducción

El célebre teorema de Tichonoff, que garantiza la compacidad de un producto arbitrario de espacios topológicos compactos, no vale para formas intermedias de compacidad, ni siquiera para el caso más simple de un producto de un espacio por sí mismo. Por ejemplo, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología que tiene por base los intervalos semiabiertos $[a, b)$, $a < b$ (*recta de Sorgenfrey*) es un espacio de Lindelöf cuyo cuadrado no lo es (ver, por ejemplo, Munkres 1975 [Mu]). Pueden construirse también espacios enumerablemente compactos cuyo producto no es enumerablemente compacto (Stephenson-Vaughan 1974 [S-V]). Aunque es posible exhibir grupos topológicos de Lindelöf cuyo producto no es de Lindelöf, un interesante problema no resuelto al respecto es la existencia de grupos topológicos enumerablemente compactos cuyo producto no lo sea. Tales grupos han podido construirse utilizando axiomas adicionales de teoría de conjuntos como la negación de la Hipótesis del Continuo junto con el Axioma de Martin, esencialmente la versión apropiada del teorema de categoría de Baire cuando se niega dicha hipótesis (van Douwen 1980 [vD], Hart and Mills 1992 [H-M] y A. H. Tomita 1996 [T]), pero se ignora si existen sin la suposición de nuevos axiomas conjuntistas.

La propiedad de Lindelöf y la compacidad enumerable son casos particulares de una amplia gama de propiedades intermedias de compacidad consideradas originalmente por P. Alexandroff y P. Urysohn en 1929 [A-U] y estudiadas a lo largo de los años por varios autores (ver las exposiciones de Vaughan 1984 [V] y de Stephenson 1984 [St], o la de Nyikos 1992 [Ny])

Dados cardinales infinitos $\lambda \leq \kappa$, un espacio topológico E es $[\lambda, \kappa]$-*compacto*, si y solamente si todo recubrimiento de E por una familia de κ abiertos contiene un subrecubrimiento de cardinalidad menor de λ. Equivalentemente, si toda intersección de menos de λ conjuntos de una familia $\{S_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de subconjuntos cerrados de E es no vacía (*propiedad de* $_<\lambda$-*intersecciones*) entonces $\bigcap_{\alpha<\kappa} S_\alpha \neq \emptyset$.

Por comodidad, llamaremos a un espacio $[\lambda, \infty]-$*compacto* si es $[\lambda, \kappa]$-compacto para todo cardinal κ, y utilizaremos la notación "omega" para denotar los alefs: $\omega = \aleph_0$, $\omega_1 = \aleph_1, \ldots$ Así,

$[\omega, \omega]$-compacto significa enumerablemente compacto
$[\omega_1, \infty]$-compacto significa Lindelöf
$[\omega, \infty]$-compacto significa (plenamente) compacto
$[\omega, \kappa]$-compacto significa (inicialmente) κ-compacto.

La $[\lambda, \kappa]$-compacidad es preservada por imágenes de funciones continuas y por subespacios cerrados, pero no necesariamente por productos como ya hemos observado. Se conocen, sin embargo, algunos resultados positivos para el producto cuando $\lambda = \omega$.

• (Stephenson-Vaughan). *Si κ es un cardinal singular y límite fuerte (es decir, cof(κ) $< \kappa$ y $\delta < \kappa \Rightarrow 2^\delta < \kappa$), entonces la $[\omega, \kappa]$-compacidad es preservada por productos.*

Como es consistente con los axiomas de la teoría de conjuntos suponer que todo cardinal límite mayor que ω es singular y límite fuerte (esto es consecuencia, por ejemplo, de la Hipótesis Generalizada del Continuo más "no hay inaccesibles"), resulta también consistente suponer que la $[\omega, \kappa]$- compacidad es preservada por productos para todo $\kappa > \omega$. Por otra parte, sin restricciones sobre κ, ni hipótesis adicionales, y sumando resultados de Scaraborough y Stone 1966 [S-S], Berstein 1970 [B], Ginsburg y Saks 1975 [G-S], Saks 1978 [Sa], y García-Ferreira 1990 [GF], es posible caracterizar en términos de convergencia de ultrafiltros los espacios cuyas potencias son $[\omega, \kappa]$-compactas, como indicaremos más adelante, y obtener resultados como el siguiente.

• *Si el producto de cualesquiera 2^{2^κ} factores de un producto $\prod_i E_i$ es $[\omega, \kappa]$-compacto, entonces el producto $\prod_i E_i$ es $[\omega, \kappa]$-compacto.*

• *Si $E^{|E|^\kappa}$ o $E^{2^{2^\kappa}}$ es $[\omega, \kappa]$-compacto entonces E tiene todas sus potencias $[\omega, \kappa]$- compactas.*

Por ejemplo, si $E^{|E|^\omega}$ o E^{2^c} es enumerablemente compacto, donde $c = 2^\omega$ es la potencia del continuo, entonces E^μ es enumerablemente compacto para cualquier cardinal μ (Scaraborough y Stone, Saks).

No se tiene en la literatura nada parecido a los resultados anteriores para $[\lambda, \kappa]$-compacidad cuando $\lambda > \omega$, que incluya por ejemplo la propiedad de Lindelöf. Es nuestro propósito en esta exposición completar el panorama, presentando una caracterización que hemos obtenido, para κ y λ arbitrarios, de aquellas familias de espacios $[\lambda, \kappa]$-compactos cuyos productos son todos $[\lambda, \kappa]$-compactos, generalizando así los resultados arriba indicados. Una de varias aplicaciones que se obtienen es la de que un espacio cuyas potencias sean todas de Lindelöf debe ser compacto.

La aplicación más significativa para nosotros es la demostración topológica de un teorema de Makowski y Shelah 1983 [Ma-Sh] sobre lógicas abstractas, cuya prueba original por métodos de teoría de modelos nos sugirió el resultado topológico más general del cual el teorema resulta ser un simple corolario. El lector interesado en lógica encontrará en las dos últimas secciones una explicación de este resultado y (esperamos) una ilustración convincente de la unidad intrínseca y a veces oculta de las matemáticas.

1. Preliminares - Convergencia con respecto a un ultrafiltro

No supondremos ninguna condición de separación en los espacios topológicos, en particular no utilizaremos la condición de Hausdorff. La siguiente observación simplifica el estudio de las formas intermedias de compacidad.

• (Folklore). *Un espacio E es $[\lambda, \kappa]$-compacto si y solamente si es $[\mu, \mu]$-compacto para todo μ tal que $\lambda \leq \mu \leq \kappa$.*

• (Alexandroff y Urysohn) *Un espacio E es $[\omega, \kappa]$-compacto si y solamente si es $[\mu, \mu]$-compacto para todo cardinal regular μ tal que $\omega \leq \mu \leq \kappa$.*

Debe tenerse en cuenta que la $[\mu, \mu]$-compacidad no necesariamente asciende o desciende con μ, pues $\mathbb{R}$ es $[\omega_1, \omega_1]$-compacto por ser de Lindelöf pero no es $[\omega, \omega]$-compacto, y la *recta larga*, es decir $L = \omega_1 \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico, es $[\omega, \omega]$-compacta pero no es $[\omega_1, \omega_1]$-compacta. Un caso excepcional es el de los espacios métricos, que son $[\omega, \omega]$-compactos si y solamente si son $[\omega, \infty]$-compactos.

Decimos que $x \in E$ es un *punto de κ-acumulación de $S \subseteq E$* si toda vecindad abierta de x en E contiene por lo menos κ puntos de S. Si todo subconjunto de E de cardinal $\geq \kappa$ tiene un κ-punto de acumulación diremos que E es *puntualmente κ-compacto.* En general, esta propiedad es más fuerte que la $[\kappa, \kappa]$-compacidad. Sin embargo:

• (Alexandroff y Urysohn) *Para un cardinal κ regular, $[\kappa, \kappa]$-compacidad y κ-compacidad puntual son equivalentes.*

El más importante instrumento en el estudio de productorias de formas débiles de compacidad ha sido la siguiente noción utilizada por A. R. Bernstein 1970 [B], para el caso de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$, y luego por Saks 1978 [Sa], para ultrafiltros sobre conjuntos no enumerables.

Definición. Dados un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto I y una *I-familia* $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos de un espacio topológico E, se dice que $\{a_i\}_{i \in I}$ *$\mathcal{F}$-converge* a x, en símbolos

$$\{a_i\}_i \rightarrow_{\mathcal{F}} x,$$

si y solamente si para toda vecindad abierta V de x se tiene $\{i \in I : a_i \in V\} \in \mathcal{F}$. Se dice también que x es un *$\mathcal{F}$-límite de $\{a_i\}_{i \in I}$.*

Definición. E es *$\mathcal{F}$-compacto* $\Leftrightarrow$ toda I-familia de E es $\mathcal{F}$-convergente.

Obsérvese que los $\mathcal{F}$-límites no son únicos pues no suponemos ninguna condición de separación. El conjunto $a\ (\mathcal{F}) = \{S \subseteq E : \{i \in I : a_i \in S\} \in \mathcal{F}\}$ es un ultrafiltro en el espacio E, y $\{a_i\}_i \rightarrow_{\mathcal{F}} x$ si y solamente si x es un punto de adherencia de $a\ (\mathcal{F})$ en el sentido topológico. De lo anterior se desprende que un espacio *es compacto si y solamente si* es $\mathcal{F}$-compacto para todo ultrafiltro

$\mathcal{F}$. Debe notarse, sin embargo, que un espacio puede ser $\mathcal{F}$-compacto para un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sin tener que serlo para otros ultrafiltros. Por supuesto, la $\mathcal{F}$-convergencia tiene sentido para filtros arbitrarios. Si $\mathcal{F}$ es el *filtro de Fréchet* sobre $\mathbb{N}$, ésta no es más que la convergencia ordinaria de sucesiones; por otra parte, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ en el sentido corriente si y solamente si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathcal{F}} x$ para todo ultrafiltro no principal $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{N}$, de manera que no perdemos nada al restringirnos a ultrafiltros.

Es fácil verificar que los $\mathcal{F}$-límites son preservados por funciones continuas y que la $\mathcal{F}$-compacidad se preserva por imágenes de funciones continuas, subespacios cerrados y también por productos. Esto último la diferencia de la $[\lambda,\kappa]$-compacidad. Por otra parte, las siguientes equivalencias relacionan ambas formas de compacidad en el caso $\lambda=\omega$:

• (Berstein 1970 [B], Ginsburg-Saks 1975 [G-S]). *E tiene todas sus potencias $[\omega,\omega]$-compactas si y solamente si E es $\mathcal{F}$-compacto para algún ultrafiltro no principal $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{N}$.*
• (Saks 1978 [Sa]) *E es κ-compacto para puntos límites si y solamente si E es $\mathcal{F}$-compacto para algún ultrafiltro uniforme $\mathcal{F}$ sobre κ.*
• (García-Ferreira 1990 [GF]) *E tiene todas sus potencias $[\omega,\kappa]$-compactas si y solamente si E es $\mathcal{F}$-compacto para algún ultrafiltro $\mathcal{F}$ descomponible sobre κ.*

Se sigue del resultado de Saks citado y de la observación de Alexandroff y Urysohn que, para κ regular, un espacio es $[\kappa,\kappa]$-compacto si y solamente si es $\mathcal{F}$-compacto para algún ultrafiltro uniforme sobre κ. En las secciones siguientes generalizamos los anteriores resultados a κ y λ arbitrarios.

2. Ultrafiltros (λ,κ)-regulares

Para nuestro propósito necesitaremos la siguiente noción, introducida por Keisler 1964 [Ke] en su estudio de las cardinalidades de los ultraproductos.

Definición. $\mathcal{F}$ es (λ,κ)-*regular* si existe una familia $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}$ tal que $|\mathcal{A}|=\kappa$ y para cualquier $B\subseteq\mathcal{A}$ de cardinal λ se tiene $\bigcap B = \emptyset$.

Por supuesto, un ultrafiltro (λ,κ)-regular debe ser no principal. Los ultrafiltros (κ,κ)-regulares son abundantes:

• *Si $\mathcal{F}$ es uniforme sobre κ entonces $\mathcal{F}$ es (κ,κ)-regular* (recuérdese que un ultrafiltro sobre un conjunto I es uniforme si $|S|=|I|$ para todo $S\in\mathcal{F}$).
• *$\mathcal{F}$ es (ω,ω)-regular si y solamente $\mathcal{F}$ no es ω-completo* (es decir, no es cerrado bajo intersecciones enumerables).

Sabemos que, de existir cardinales medibles, el primer medible, μ_o, coincide con el primer cardinal que soporta un ultrafiltro no principal ω-completo. Por lo tanto, todo ultrafiltro sobre un conjunto de cardinal menor que μ_o (o de cardinal arbitrario si no hay medibles) es ω-incompleto. Así:

- *Si $|I| < \mu_o$ todo ultrafiltro no principal sobre I es (ω, ω)-regular.*
- *Si no hay cardinales medibles todo ultrafiltro no principal es (ω, ω)-regular.*

Se sigue que los ultrafiltros (ω, ω)-regulares sobre conjuntos familiares como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, etc. coinciden con los no principales.

El lema siguiente justifica nuestro interés por la (λ, κ)-regularidad. Para su demostración referimos al lector a Caicedo [C3]. Recuérdese que $\kappa^{<\lambda} := \sum_{\delta<\lambda} \kappa^{\delta}$. Por ejemplo, $\kappa^{<\omega} = \kappa$ y $\omega_1^{<\omega_1} = 2^{\omega} = c$.

Lema. *a) Si E es $\mathcal{F}$-compacto para un ultrafiltro (λ, κ)-regular $\mathcal{F}$, entonces E es $[\lambda, \kappa]$-compacto.*

b) Si E es $[\lambda, \kappa]$-compacto, entonces para toda $\kappa^{<\lambda}$-familia de E existe un ultrafiltro (λ, κ)-regular $\mathcal{F}$ sobre $\kappa^{<\lambda}$ para el cual la familia $\mathcal{F}$-converge.

Observación. Si κ es un cardinal regular y $\lambda = \kappa$, entonces el ultrafiltro del lema anterior puede tomarse uniforme sobre κ en lugar de (κ, κ)-regular sobre $\kappa^{<\kappa}$.

3. $[\lambda, \kappa]$–compacidad de productos

Sea $\mathbb{T}$ una clase arbitraria de espacios topológicos, la cual puede consistir en un solo espacio o llegar a ser inclusive una clase propia. Diremos que $\mathbb{T}$ es *productivamente* $[\lambda, \kappa]$-compacta si el producto de cualquier familia (subindicada por un conjunto) de espacios en $\mathbb{T}$ es $[\lambda, \kappa]$-compacto. En particular, un espacio E será productivamente $[\lambda, \kappa]$-compacto si todas sus potencias son $[\lambda, \kappa]$-compactas.

Teorema 1. (Caicedo [C3]). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i) $\mathbb{T}$ es productivamente $[\lambda, \kappa]$-compacta.
ii) Existe un ultrafiltro (λ, κ)-regular $\mathcal{F}$ tal que todo espacio en $\mathbb{T}$ es $\mathcal{F}$-compacto ($\mathcal{F}$ se puede tomar sobre $\kappa^{<\lambda}$, o uniforme sobre κ si $\kappa = \lambda$ y es regular).

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea Σ la familia de todos los ultrafiltros (λ, κ)-regulares sobre $I = \kappa^{<\lambda}$, y suponga que todo producto de espacios de $\mathbb{T}$ es $[\lambda, \kappa]$-compacto, pero que no existe ningún $\mathcal{U} \in \Sigma$ para el cual todos los elementos de $\mathbb{T}$ sean $\mathcal{U}$-compactos. Escoja para cada $\mathcal{U} \in \Sigma$ una I-familia $\{a_i^{\mathcal{U}}\}_{i \in I}$ que *no* $\mathcal{U}$-converge en algún espacio $E_{\mathcal{U}} \in \mathbb{T}$. Para cada i, sea $\sigma_i = \langle a_i^{\mathcal{U}} \rangle_{\mathcal{U}} \in \Pi_{\mathcal{U} \in \Sigma} E_{\mathcal{U}}$. Por hipótesis, este último espacio es $[\lambda, \kappa]$-compacto y por el Lema, parte (b), existe un ultrafiltro $\mathcal{F} \in \Sigma$ para el cual $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ $\mathcal{F}$-converge a algún $\sigma = \langle a^{\mathcal{U}} \rangle_{\mathcal{U}} \in \Pi_{\mathcal{U} \in \Sigma} E_{\mathcal{U}}$. Por la continuidad de la $\mathcal{F}$-proyección, $\{a_i^{\mathcal{F}}\}_{i \in I}$ $\mathcal{F}$-converge a $a^{\mathcal{F}}$ en $E_{\mathcal{F}}$, una contradicción.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Si cada E_r es $\mathcal{F}$-compacto entonces $\Pi_r E_r$ es $\mathcal{F}$-compacto y por la (λ, κ)-regularidad de $\mathcal{F}$ se sigue del Lema, parte (a), que $\Pi_r E_r$ es $[\lambda, \kappa]$-compacto.

Corolario 1. *Un espacio E tiene todas sus potencias $[\lambda, \kappa]$-compactas si y solamente si es $\mathcal{F}$-compacto para algún ultrafiltro (λ, κ)-regular $\mathcal{F}$ (sobre $\kappa^{<\lambda}$).*

Como aplicación inmediata tenemos:

Corolario 2. *Si E es productivamente $[\kappa, \kappa]$-compacto para algún $\kappa < \mu_o$ (κ arbitrario si no hay medibles) entonces E es enumerablemente compacto.*

Demostración. Si E es productivamente $[\kappa, \kappa]$-compacto, entonces es $\mathcal{F}$-compacto para algún ultrafiltro (κ, κ)-regular $\mathcal{F}$ sobre $\kappa^{<\kappa}$, el cual debe ser no principal. Como $\kappa^{<\kappa} < \mu_o$ por inaccesibilidad de μ_o, $\mathcal{F}$ es (ω, ω)-regular y podemos concluir que E es $[\omega, \omega]$-compacto.

Ejemplo. *Si todas las potencias de E son de Lindelöf, entonces E es compacto.* Pues, en tal caso, las potencias de E son todas $[\omega_1, \omega_1]$-compactas y por el corolario anterior E es $[\omega, \omega]$-compacto. Pero ésto es lo único que falta a E para ser compacto, pues Compacto = Lindelöf + Enumerablemente compacto.

Podemos concluir que, a pesar de que $\mathbb{R}$ es de Lindelöf para la topología corriente, $\mathbb{R}^\kappa$ dejará de serlo para algún cardinal κ. Es posible estimar a κ pues de la prueba del Teorema 1 se desprende también el siguiente resultado.

Teorema 2. (Caicedo [C3]). *Si el producto de cualesquiera $2^{2^{(\kappa^{<\lambda})}}$ espacios de $\mathbb{T}$ es $[\lambda, \kappa]$-compacto entonces todos los productos de espacios en $\mathbb{T}$ son $[\lambda, \kappa]$-compactos. Si $E^{2^{2^{(\kappa^{<\lambda})}}}$ o $E^{|E|^{(\kappa^{<\lambda})}}$ es $[\lambda, \kappa]$-compacto entonces E^μ es $[\lambda, \kappa]$-compacto para todo cardinal μ.*

Demostración. En la prueba del Teorema 1, solamente se utiliza la $[\lambda, \kappa]$-compacidad de un producto de tantos espacios como hay ultrafiltros sobre $\kappa^{<\lambda}$, es decir $2^{2^{(\kappa^{<\lambda})}}$ espacios. Y en el caso en que $\mathbb{T}$ se reduce a un solo espacio E, se necesita solamente la $[\lambda, \kappa]$-compacidad de un producto de a lo sumo tantas copias de E como hay $\kappa^{<\lambda}$-familias en E.

Por lo anterior, $\mathbb{R}^{2^{2^\omega}} = \mathbb{R}^{|\mathbb{R}|^{(\omega_1)}}$ no es de Lindelöf; de lo contrario sus potencias serían todas de Lindelöf y por tanto $\mathbb{R}$ sería compacto. Más generalmente, $\mathbb{R}^{2^{(2^\kappa)}}$ no es $[\kappa, \kappa]$-compacto para ningún $\kappa < \mu_0$, de lo contrario $\mathbb{R}$ sería enumerablemente compacto por el Corolario 2.

Se conocen muchos teoremas de transferencia de regularidad de ultrafiltros. Cada uno de ellos proporciona un teorema, muchas veces nuevo, de transferencia de compacidad productiva. Por ejemplo, se sabe que (κ^+, κ^+)-regularidad de ultrafiltros implica (κ, κ)-regularidad, de donde se sigue que la (κ^+, κ^+)-compacidad productiva de una familia de espacios implica su (κ, κ)-compacidad (productiva). Véase Lipparini 1996 [L1] y 199? [L2] para más ejemplos y una demostración de que, recíprocamente, cualquier teorema de transferencia entre formas de compacidad productiva implica una transferencia entre las correspondientes propiedades de regularidad de ultrafiltros.

Teorema 3. (Lipparini 199? [L2]). *$[\lambda, \kappa]$-compacidad productiva implica $[\eta, \mu]$- compacidad si y solamente si todo ultrafiltro (λ, κ)-regular es (μ, η)-regular.*

Esto demuestra que nuestra utilización de la noción de ultrafiltro (λ, κ)-regular es estrictamente necesaria para caracterizar la productividad de formas débiles de compacidad.

4. Compacidad en teoría de modelos

Como es bien sabido, en los últimos 30 años, la teoría de modelos ha desbordado sus orígenes centrados en la lógica de primer orden, dando lugar al estudio sistemático de lógicas más expresivas. Se tiene una noción semántica general de *lógica abstracta*, debida esencialmente a Lindström 1969 [Lin], que incluye por ejemplo:

Lógica de primer orden: $L_{\omega\omega}$

Lógicas infinitarias como $L_{\kappa\lambda}$, $\kappa > \lambda > \omega$, que admite conjunciones infinitas $\bigwedge_{\alpha<\delta} \varphi_\alpha$, $\delta < \kappa$, y cuantificación sobre sucesiones infinitas $(\forall x_\alpha)_{\alpha<\delta} \dots$, $\delta < \lambda$.

Lógicas con nuevos cuantificadores como $L(Q_\kappa)$, donde $Q_\kappa x\varphi(x)$ significa $Card\{x : \varphi(x)\} \geq \kappa$.

Véase Barwise y Feferman 1985 [B-F] para mayores detalles, y algún texto introductorio de teoría de modelos en referencia a los conceptos básicos de teoría de modelos que utilizaremos en lo que sigue, en particular el de ultraproducto.

Una de las propiedades fundamentales de la teoría de modelos de $L_{\omega\omega}$ es la *compacidad semántica,* que expresamos aquí por conveniencia en términos de una familia de teorías en lugar de una familia de proposiciones.

Teorema de Compacidad. (Gödel, Malcev, Henkin). *Dadas teorías $T_i, i \in I$, en $L_{\omega\omega}$, tales que $\bigcup_{i\in J} T_i$ tiene modelos para todo J finito $\subseteq I$, entonces $\bigcup_{i\in I} T_i$ tiene modelos.*

Otra propiedad fundamental de $L_{\omega\omega}$ es el teorema de ultraproductos, del cual mostraron Morel, Scott y Tarski 1958 [M-S-T] se sigue fácilmente el de compacidad.

Teorema de Ultraproductos. (Loz). *Para todo ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I y toda* *familia de estructuras* $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$, *se tiene*

$$\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi[f/\mathcal{F}, g/\mathcal{F}\ldots] \Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[f(i), g(i), \ldots]\} \in \mathcal{F}$$

cualesquiera que sean la fórmula $\varphi(v_1, ..., v_n) \in L_{\omega\omega}$ *y los elementos* $f, g, .. \in \prod_{i\in I} A_i$.

Es natural preguntarnos qué sucede con estas dos propiedades en otras lógicas. Se verifica fácilmente que las lógicas infinitarias no pueden satisfacer el teorema de compacidad, y que las generadas por cuantificadores solamente lo hacen en raras ocasiones. Por otra parte, $L_{\omega\omega}$ es la única lógica que satisface el Teorema de Ultraproductos en forma plena. Sin embargo, como veremos, muchas lógicas cumplen propiedades intermedias de compacidad, análogas a las topológicas, y versiones restringidas del teorema de ultraproductos.

Definición. Una lógica L es $[\lambda, \kappa]$-*compacta* si dada una familia $\{T_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de teorías de L tal que toda unión $\bigcup_{\alpha\in F} T_\alpha$ con $|F| < \lambda$ tiene modelos, la unión $\bigcup_{\alpha<\kappa} T_\alpha$ tiene modelos.

(Téngase en cuenta que en la literatura de teoría abstracta de modelos se utiliza la notación invertida $[\kappa, \lambda]$).

En esta terminología, $L_{\omega\omega}$ es $[\omega, \infty]$-compacta. Otros ejemplos:
- $L_{\kappa\kappa}$ es $[\kappa, \kappa]$-compacta si κ es un cardinal medible.
- $L(Q_{\kappa^+})$ es $[\omega, \mu]$-compacta si y solamente si $\kappa^\mu = \kappa$.

Así, $L(Q_{(2^\omega)^+})$ es $[\omega, \omega]$-compacta, pero $L(Q_{\omega_1})$ no lo es (aunque es bien sabido que esta última lógica es enumerablemente compacta para familias de sentencias, si no de teorías).

En los casos arriba mencionados, y en muchos otros casos, la forma de compacidad enunciada puede demostrarse utilizando teoremas de ultraproductos adecuados. El siguiente sorprendente resultado muestra que esta relación no es accidental.

Teorema Abstracto de Compacidad. (Makowski y Shelah 1983 [Ma-Sh]). *Para cualquier lógica* L *son equivalentes:*
- L *es* $[\lambda, \kappa]$-*compacta.*
- *Existe un ultrafiltro* (λ, κ)-*regular* $\mathcal{F}$ *sobre algún conjunto* I *tal que: para toda familia de estructuras* $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ *existe una extensión* $\mathfrak{A}^* \geq \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ *tal que*

$$\mathfrak{A}^* \models \varphi[f/\mathcal{F}, g/\mathcal{F}, \ldots] \Leftrightarrow \{i :\ \mathfrak{A}_i \models \varphi[f(i), g(i) \ldots]\} \in \mathcal{F},$$

para toda $\varphi \in L$ *y elementos* $f, g, \ldots \in \prod_i A_i$.

Es decir, cualquier forma de compacidad débil de una lógica corresponde a un teorema restringido de Łoz para la lógica en cuestión, que se cumple en ciertas extensiones de los ultraproductos con respecto a un ultrafiltro particular.

Por otra parte, es bien sabido (aunque ha sido poco explotado) que la compacidad de una lógica corresponde a la compacidad de una topología natural en las colecciones de estructuras. En trabajos anteriores hemos utilizado dichas topologías para mostrar que muchos fenómenos de teoría abstracta de modelos son puramente topológicos (cf. Caicedo 1993 [C1], Caicedo 1995 [C2]). Fue precisamente la búsqueda de una prueba topológica del Teorema Abstracto de Compacidad la que nos llevó a los resultados sobre productos de espacios $[\lambda, \kappa]$-compactos que hemos expuesto en estos apuntes.

5. Demostración topológica del teorema de Makowski-Shelah

Dado un vocabulario de primer orden $\tau = \langle R, \ldots, f, \ldots, c, \ldots \rangle$, sea

$$\mathcal{E}_\tau = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ estructura de tipo } \tau\},$$

y, para una lógica L, sea L_τ la colección de sentencias de tipo τ. Cada $\mathcal{E}_\tau$ deviene un espacio topológico $(\mathcal{E}_\tau, L)$ si se toman como *cerrados* las clases:

$$Mod(T) = \{\mathfrak{A} \in E_\tau : \mathfrak{A} \models T\} \text{ con } T \subseteq L_\tau,$$

es decir, las clases axiomatizables. Por ejemplo, en los correspondientes espacios de estructuras asociados a $L_{\omega\omega}$ las siguientes clases son cerradas:

grupos,
grafos 4-coloreables,
campos algebraicamente cerrados,
etc.

Hay que tener ciertas precauciones al formular las nociones topológicas y trabajar en los espacios de estructuras $\mathcal{E}_\tau$, pues son clases propias, igual que sus abiertos y cerrados. Pero todas las dificultades técnicas pueden superarse (ver [C1], [C2]). Obsérvese que estos espacios poseen una base natural de "abiertos-cerrados" $\{Mod(\varphi) : \varphi \in L_\tau\}$, pero no son de Hausdorff. Es evidente que:

$$L \text{ es } [\lambda, \kappa]\text{-compacta} \Leftrightarrow (\mathcal{E}_\tau, L) \text{ es } [\lambda, \kappa]\text{-compacto para todo vocabulario } \tau.$$

Por otra parte, es fácil ver que en estos espacios los $\mathcal{F}$-límites se portan como "ultraproductos vituales":

Lema 3. *Son equivalentes para una familia de τ-estructuras $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ y un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I:*

- $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I} \to_{\mathcal{F}} \mathfrak{A}$

• $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \{i : \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{F}$, *para toda* $\varphi \in L_\tau$, *y* $f, g, \ldots \in \prod_i A_i$.

Por ejemplo, con la topología de $L_{\omega\omega}$:

$$\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I} \to_{\mathcal{F}} \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}.$$

La conexión con nuestro resultado topológico principal se hace evidente si observamos que, cuando L es $[\lambda,\kappa]$-compacta, no solamente los espacios $(\mathcal{E}_\tau, L)$ son $[\lambda,\kappa]$-compactos sino que sus productos también lo son. Esto resulta de la siguiente sencilla construcción. Dados espacios $\mathcal{E}_{\tau_j}$, $j \in J$, forme el vocabulario $\bigsqcup_j \tau_j \cup \{P_j\}$, donde los P_j son nuevos símbolos de predicado unario, y considere la operación:

$$\Gamma : \mathcal{E}_{\bigsqcup_j \tau_j \cup \{P_j\}} \longrightarrow \prod_j \mathcal{E}_{\tau_j}$$

$$\mathfrak{A} = (A, \ldots, S_j,) \longmapsto (\mathfrak{A} \restriction \tau_j \restriction S_j)_j.$$

Es decir, la componente j de $\Gamma(\mathfrak{A})$ es el reducto de $\mathfrak{A}$ al vocabulario τ_j, restringido a la subestructura generada por S_j (que es la interpretación de P_j en $\mathfrak{A}$). Se verifica fácilmente que esta operación es sobreyectiva y continua (para la topología producto en $\prod_j \mathcal{E}_{\tau_j}$). Como el espacio $\mathcal{E}_{\bigsqcup_j \tau_j \cup \{P_j\}}$ es $[\lambda,\kappa]$-compacto, igualmente debe serlo su imagen $\prod_j \mathcal{E}_{\tau_j}$. Tenemos entonces, por el Teorema 1, las equivalencias:

• L es $[\lambda,\kappa]$-compacta
• $\{(\mathcal{E}_\tau, L) : \tau \in$ Vocabularios$\}$ es productivamente $[\lambda,\kappa]$-compacta
• Existe un ultrafiltro (λ,κ)-regular $\mathcal{F}$ tal que todo $(\mathcal{E}_\tau, L)$ es $\mathcal{F}$-compacto.

La última afirmación dice que para cualquier familia de estructuras $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{E}_\tau$ existen $\mathcal{F}$-límites:

$$\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I} \to_{\mathcal{F}} \mathfrak{A}.$$

Tomando un límite de la familia de expansiones $\{(\mathfrak{A}_i, f(i))_{f\in\prod_i A_i}\}_{i\in I}$, en el espacio $\mathcal{E}_{\tau^*}$, donde $\tau^* = \tau \cup \{c_f\}_{f\in\prod_i A_i}$:

$$\{(\mathfrak{A}_i, \ldots)\}_{i\in I} \to_{\mathcal{F}} (\mathfrak{A}^*, a_f)_{f\in\prod_i A_i},$$

observamos que $\mathfrak{A}^*$ extiende al ultraproducto de los $\mathfrak{A}_i$:

$$\begin{array}{ccc} \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I} & \to_{\mathcal{F}} & \mathfrak{A}^* \\ & & \uparrow \\ & & \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \end{array}$$

pues se sigue inmediatamente del Lema 3 que

$$\mathfrak{A}^* \models \varphi[a_f, a_g, \ldots] \Leftrightarrow (\mathfrak{A}^*, a_f)_{f\in\prod_i A_i} \models \varphi(c_f, c_g, \ldots) \Leftrightarrow$$
$$\{i : (\mathfrak{A}_i, f(i))_{f\in\prod_i A_i} \models \varphi(c_f, c_g, \ldots)\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \{i : \mathfrak{A}_i \models \varphi[f(i), g(i) \ldots\} \in \mathcal{F},$$

para toda $\varphi \in L_\tau$ y elementos $f, g, \ldots \in \prod_i A_i$. Por lo tanto la función $f/\mathcal{F} \longmapsto a_f$ define una inyección isomorfa de $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ en $\mathfrak{A}^*$ con las propiedades requeridas por el Teorema Abstracto de Compacidad.

Referencias

[A-U] P. Alexandroff and P. Urysohn, "Mémoire sur les espaces topologiques compacts", Verhandlingen dert Konink-lijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Afdeeling Natuurkunde (Eerste Sectie) **14** (1929), 1-96.

[B-F] J. Barwise y S. Feferman (eds.), *Model-Theoretic Logics*, Springer Verlag, 1985.

[B-S] J. L. Bell and A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts*, North Holland, 1971.

[B] A. R. Bernstein, "A new kind of compactness for topological spaces", Fund. Math. **66** (1970), 185-193.

[C1] X. Caicedo, "Compactness and normality in abstract logics", Annals of Pure and Applied Logic **59** (1993), 33-43.

[C2] X. Caicedo, "Continuous operations on spaces of structures", en: *Quantifiers: models, logics and computation, II*, Editors: M. Krynicki, M. Mostowski, L. W. Szczerba, Kluwer Acad. Publ., 1995, 263-296.

[C3] X. Caicedo, "The Abstract Compactness Theorem Revisited", In Logic in Florence, Kluwer Academic Publishers. Por aparecer.

[D] H. D. Donder, "Regularity of ultrafilters and the core model", Israel J. of Math. **63** (1988), 289-322.

[vD] E. K. van Douwen, "The product of countably compact topological groups", Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1980), 417-427.

[GF] S. Garcia-Ferreira, "Some remarks on initial α-compactness, α $<$-boundedness and p-compactness", Topology Proc. **15** (1990), 11-28.

[G-S] J. Ginsburg and V. Saks, "Some applications of ultrafilters en topology", Pacific Journal of Math. **57** (1975), 403-417.

[H-M] K. P. Hart y J. van Mill, "A countably topological group H such that $H \times H$ is not countable compact", Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), no. 2, 881-821.

[Ke] H. J. Keisler,, "On cardinalities of ultraproducts", Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 644-647.

[Lin] P. Lindström,, "On extensions of elementary logic", Theoria **35** (1969), 1-11.

[L1] P. Lipparini, "Productive $[\lambda, \mu]$-compactness and regular ultrafilters", Topology Proceedings, **21** (1996).

[L2] P. Lipparini, "More on regular ultrafilters in ZCF", Journal of Symbolic Logic. Por aparecer.

[Ma-Sh] A. Makowski y S. Shelah, "Positive results in abstract model theory", Ann. of Pure and Applied Logic 25 (1983).

[M-S-T] A.C. Morel, D. Scott, A. Tarski, "Reduced products and the compactness theorem", (abstract), mathit Notices of the Amer. Math. Society **5** (1958), 674-675.

[Mu] J. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice-Hall, 1975.

[Ny] P. J. Nyikos, "Convergence in topology", en: *Recent Progress in General Topology*, Editors: M. Husek and J. van Mill. Elsevier Science Publishers, 1992.

[Sa] V. Saks, "Ultrafilter invariants in topological spaces", Trans. of the A.M.S. **241** (1978), 79-97.

[S-S] C. T. Scaraborough and A. H. Stone, "Products of nearly compact spaces", Trans. Amer. math. Soc. **124** (1966), 131-174.

[St] R.M. Stephenson, "Initially κ-compact and related spaces", In Handbook of set theoretical topology, K. Kunen and J.E. Vaughan (eds.), North Holland (1984), 603-632.

[S-V] R. M. Stephenson and J. E. Vaughan, "Products of initially m-compact spaces", Trans. Amer. Math. Soc. **196** (1974), 177-189.

[T] H. A. Tomita, "On finite powers of countably compact groups", Comment. Math. Univ. Carolinae **37** (1996), no. 3, 617-626.

[V] J.E. Vaughan, "Countably compact and sequentially compact spaces", en: *Handbook of set theoretical topology*, K. Kunen and J.E. Vaughan (eds.), North Holland, 1984, 569-602.