ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

MONOGRÁFICO

30

ier

Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA. MONOGRÁFICO
REVISTA DE CIENCIAS.
Nº 30 (2018). Logroño (España).
P. 1-573, ISSN: 1131-5423

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26071 Logroño
publicaciones.ier@larioja.org

Suscripción anual España (1 número y monográfico): 15 €
Suscripción anual extranjero (1 número y monográfico): 20 €
Número suelto: 9 €
Número monográfico: 9 €

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

30 años de Investigación en La Rioja

Monográfico Núm. 30

Gobierno de La Rioja
Instituto de Estudios Riojanos
LOGROÑO
2018

Treinta años de investigación en La Rioja: Homenaje a Ildefonso Zubía e Icazuriaga / -- Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2018

573 p. : gráf. ; 24 cm-- (Zubía. Monográfico, ISSN 1131-5423; 30).-
D.L. LR 413-2012

1. Rioja – Política científica. 2. Zubía e Icazuriaga, Ildefonso – Homenajes I. Instituto de Estudios Riojanos. II. Serie

061.61(460.21)(091)

001.891:32(460.21)"19/20"

63:061.62(460.21)

929 Zubía e Icazuriaga, Ildefonso

ISSN 1131-5423
Depósito Legal LR 413-2012

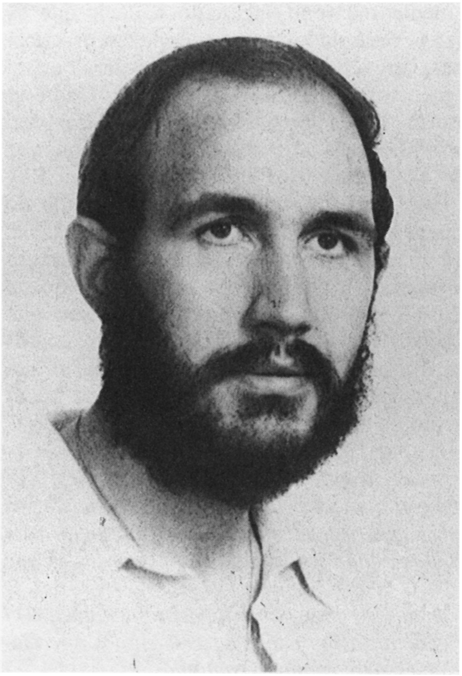
Impreso en España - Printed in Spain

ÍNDICE

ZUBIA	6	7-30	Logroño	1988

EL PROBLEMA DE DIRICHLET Y LA MEDIDA ARMONICA**

José Luis Rubio de Francia*



JOSE LUIS RUBIO DE FRANCIA (1949-1988)

Con motivo del «Curso de Metodología en Historia de la Ciencia» celebrado en Logroño entre los días 9 y 12 de diciembre de 1986, coordinado por Luis Español, y organizado por el Instituto de Estudios Riojanos, José Luis Rubio de Francia impartió una conferencia titulada «El problema de Dirichlet y la medida armónica». Debido a su enfermedad, José Luis no pudo hacer una redacción definitiva ni revisar el trabajo. El texto ha sido elaborado, con la inestimable ayuda de J. L. Varona, a partir de una grabación de su conferencia y de unas notas manuscritas por él mismo, y se ha procurado respetar en todo lo posible el estilo coloquial, su peculiar manera de enseñar y divulgar las Matemáticas.

La muerte de José Luis a la edad de 38 años ha truncado una gran carrera matemática. El fue una de las personas que más ha impulsado la Matemática en España en los

* † Catedrático Matemáticas, Dpto. Matemáticas, Universidad Autónoma, Cantoblanco, Km. 15. 28770 COLMENAR VIEJO (MADRID).

** Entregado el 11-XI-1988. Aprobado el 28-XI-1988.

últimos años. Su principal actividad se centró en el Análisis de Fourier y su contribución en esta área ha merecido un destacado reconocimiento en la comunidad matemática, publicando sus investigaciones en revistas de prestigio y siendo invitado habitual en los congresos internacionales de su especialidad. Durante los últimos años colaboró en la formación de un buen número de estudiantes en las Universidades de Zaragoza y Autónoma de Madrid, consolidando una importante escuela de Análisis de Fourier.

Su pasión por las Matemáticas y su deseo de divulgarlas hizo de él un excelente profesor. Su admirable comportamiento humano queda reflejado en su trabajo; quería transmitir sus conocimientos a los demás y somos muchos los que nos hemos beneficiado de sus ideas y de su profunda formación matemática.

Su desaparición supone una importante pérdida para la comunidad matemática y, aún más, para todos aquellos que pudimos disfrutar de su amistad.

J.J.G.H.

INTRODUCCION

Es para mí una satisfacción estar aquí entre otras razones porque ésta sigue siendo mi casa. Aquí tengo amigos y, de hecho, aquí estuve afincado profesional y físicamente durante un año. Así, por estos motivos de familiaridad, amistad y añoranza, cuando recibí la invitación para participar en esta reunión, inmediatamente me sentí inclinado a decir que sí. Realmente, yo no sabía muy bien sobre qué hablar porque de historia no conozco prácticamente nada, y desde luego no lo suficiente como para atreverme a disertar. De manera que mi única alternativa era hablar de matemáticas, sin mencionar para nada la historia. Como el nombre de Rey Pastor, aunque no fuese obligatorio, servía de núcleo alrededor del cual desarrollar el curso, yo, con una visión un tanto providencialista de mi vida, decidí comenzar por coger de mi estantería el libro de «Introducción a la Matemática Superior»[1] en el que Rey Pastor redactó sus seis conferencias del Ateneo. Este libro lo leí en primero o segundo de carrera y realmente me resultó fascinante porque descubrí muchas cosas que no sabía, contadas en un lenguaje que si bien no todo él era accesible para mí en aquel tiempo, si era bastante comprensible. Lo abrí por la mitad y examiné su contenido con la intención de hablar en función de éste. En la página en que salió abierto –bueno, no exactamente en ella, pues debo confesar que la cosa no es tan providencialista y tuve que pasar tres o cuatro páginas– aparece lo que él llama función de línea. En esos momentos no recordaba lo que Rey Pastor entendía por función de línea y busqué los párrafos que lo aclaraban. Voy a leer algunos de estos párrafos, donde se habla del concepto de función y de su importancia:

Dado el primer paso... la Matemática, que a pesar de la autonomía lograda en el siglo XIX emancipándose de las Ciencias naturales, no desdeña el contacto con éstas, antes bien, de sus aplicaciones se preocupa, y en ellas inspira con frecuencia sus generalizaciones, aspira a lograr más grande exactitud y a extender su campo de influencia, intentando servir a todas las Ciencias en que interviene la cantidad.

Propósito tan ambicioso exige una ampliación de sus recursos, abordando resueltamente el estudio de las funciones de infinitas variables; y esta generalización puede hacerse en dos direcciones, según se considere un conjunto numerable de variables, o un conjunto continuo.

1. Julio Rey Pastor: "Introducción a la Matemática Superior. Estado actual, métodos y problemas", Biblioteca Corona, Madrid, 1916, pág. 118 y ss. Reeditado en 1983 por el Instituto de Estudios Riojanos.

A continuación, empieza a hablar de lo que son funciones de línea y dice:

¿Qué es una función?... Es un número variable que depende de otro número variable. Por ejemplo, el área de un círculo depende exclusivamente del radio... Pero, ¿y el área de un recinto cualquiera? También ésta depende del contorno, mas no de su longitud, no del perímetro, sino de la forma total de la curva...

Ahora bien, dar una curva es dar todos sus puntos, cada uno de los cuales puede venir determinado por un par de números... De otro modo: la curva puede venir dada por su ecuación... $y = f(x)$; pero ésta equivale a infinitos datos; pues dar una función $f(x)$ arbitraria, es dar los infinitos valores de y correspondientes a los infinitos valores de x de un cierto intervalo. ...

Un ejemplo físico: Dado un disco metálico, para hallar la temperatura estacionaria en un punto interior, basta conocer la temperatura en el contorno; mas no en uno ni en varios puntos, sino en todo el contorno. He aquí, pues, un número que depende de los valores de una función en todo un continuo de puntos, esto es, otra función de línea.

De manera que, según este texto de Rey Pastor, lo que él llamaba función de línea es lo que hoy nosotros llamaríamos operador o, en el caso al que se refiere en concreto Rey Pastor, puesto que los valores no son otras funciones sino números, llamaríamos funcional, algo que depende de un conjunto de funciones y toma un valor numérico. Este concepto, y más aún el problema físico concreto que él menciona, el de hallar la temperatura estacionaria en el interior conocida la temperatura en el borde, es un problema sobre el cual puede ser bonito e interesante dar una pequeña visión acerca de lo que ha sido y está siendo en estos momentos. De manera que decidí, tomando esto nada más que como una excusa, hablar sobre el problema de la medida armónica, o de la solución a este problema físico que menciona Rey Pastor. Así que ahora empezamos a hablar de Matemáticas.

EL PROBLEMA DE DIRICHLET

Si tenemos un dominio abierto y acotado (nos limitaremos a R^2 por sencillez) que está rodeado por una curva de Jordan, y para cada punto s de la frontera conocemos la temperatura estacionaria $\varphi(s)$ y queremos saber cuál es la temperatura en un punto interior z del dominio (ver Fig. 1), un razonamiento físico bastante sencillo permite hallar la ecuación del calor. Que la temperatura $u(z)$ sea estacionaria quiere decir que la derivada de u respecto al tiempo es cero, lo cual se traduce en que la solución, que ha de ser continua en todo el dominio incluida la frontera, debe satisfacer en el interior la ecuación de Laplace, $\Delta u = 0$. Además, nuestra función debe acoplarse a los datos que conocemos, es decir, debe cumplir la condición de contorno $u = \varphi$ en la frontera. Este es el famoso problema de Dirichlet, que también responde a muchos otros problemas físicos. Por mencionar uno entre los más obvios, el cálculo del potencial gravitatorio o eléctrico en el interior de un dominio cuando se conocen los valores de ese potencial en la frontera es un ejemplo físico que cae dentro de este modelo matemático:

<u>Problema de Dirichlet:</u> Dado D dominio abierto acotado en R^2, $\Gamma = \partial D$ curva cerrada simple (de Jordan) y φ función continua en Γ, hallar u función continua en $\bar{D} = D \cup \Gamma$ tal que $u = \varphi$ en Γ y $\Delta u = 0$ en D.

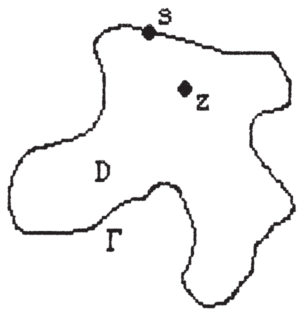


Figura 1

Supongamos que elegimos un punto z_0 del interior del dominio y queremos hallar la temperatura en ese punto z_0 olvidándonos de momento de los demás. Nos fijamos en todos los posibles datos que pueda tener la función, de manera que a cada dato que nos den –cada función continua φ en el borde– le asociamos el valor de la temperatura u en el punto interior z_0 fijado ($\varphi \longrightarrow u(z_0)$). Esa correspondencia, que sería una función de línea en la terminología de Rey Pastor, es lo que ahora se llamaría un funcional definido sobre la clase de todas las funciones continuas en Γ. Y ese funcional verifica tres propiedades: es lineal; si φ es positiva la temperatura en el interior también es positiva; y si la temperatura φ es constante en todo el borde entonces esa misma constante es la solución en el interior.

Vistas las tres propiedades que verifica esta correspondencia podemos invocar un teorema, ya conocido pero que Rey Pastor probablemente no estimó oportuno citar, que es el Teorema de Representación de Riesz, que puede aplicarse en condiciones mucho más generales cada vez que tenemos una situación de estas características. Si K es un compacto y tenemos un funcional T del conjunto de las funciones continuas sobre K en R (en este caso K es la frontera del dominio) verificando las tres propiedades anteriores (la tercera es ahora $T(1) = 1$), el Teorema de Riesz permite asociar a este funcional una única medida de probabilidad en la frontera de manera que el valor $T\varphi$ viene dado por la integral de φ respecto a esa probabilidad. En términos probabilísticos es la esperanza de φ con respecto a esa probabilidad. Más exactamente:

Teorema de Representación de F. Riesz (1909): Sea K compacto, $T: C(K) \longrightarrow R$ lineal, $T1 = 1$, $T\varphi \geq 0 \ \forall \ \varphi \geq 0$. Entonces, existe una única probabilidad p en K tal que $T\varphi = \int_K \varphi dp = E(\varphi)$.

En el caso, por ejemplo, de la temperatura, o del potencial, esto no es sorprendente ya que significa que la temperatura en el punto z_0 es, de alguna manera, un cierto promedio de las temperaturas en el contorno. La expresión «un cierto promedio» quiere decir que el peso con el cual se va a promediar dependerá del punto porque es también físicamente muy claro que, si el punto z_0 está muy cerca del borde, la temperatura en una parte cercana del contorno va a influir más que la de una parte del contorno que esté lejos. Luego debe ser un promedio ponderado en el cual influirán más los puntos más próximos. Aunque esto es bastante impreciso, sí que es importante entender la solución al problema como un promedio aplicado a los valores frontera. En nuestro caso, el Teorema de Representación de Riesz afirma que existe una única medida de probabilidad $\omega_{Z_0} = \omega_{Z_0}$, en Γ que depende de z_0 (y del dominio D), tal que la solución al problema de Dirichlet es

$$u(z_0) = \int_\Gamma \varphi(s) d\omega_{Z_0}(s) = E_{Z_0}(\varphi),$$

donde $E_{Z_0}(\varphi)$ es, en términos probabilísticos, una cierta esperanza de la función φ en la frontera influida por z_0.

Así, cada punto z_0 del interior del dominio tiene asociada una medida de probabilidad ω_{Z_0} en la frontera, que es por definición la medida armónica en la frontera correspondiente al punto interior z_0. El problema es hallarla o conocer sus propiedades tanto como sea posible.

El ejemplo más sencillo, muy elemental, es el disco unidad (por dilatación y traslación se podría tomar cualquier otro disco del plano), de manera que la frontera es la circunferencia unidad del plano complejo. Si el punto z_0 es el centro de la circunferencia, entonces es bastante obvio que no hay puntos privilegiados, no hay puntos del contorno cuya temperatura influya más porque todos están a igual distancia. De manera que si hubiera justicia, y en el mundo físico en estos sentidos suele haberla, la temperatura en el centro debería ser el promedio de las temperaturas en el borde. Y así ocurre:

$$z_0 = 0, \qquad d\omega_0 = \tfrac{1}{2\pi}\, dt, \qquad u(0) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})dt$$

Si el punto z_0 es un punto arbitrario que no tiene por que estar en el centro, el promedio aparece con respecto a un cierto núcleo que se llama núcleo de Poisson y que depende de z_0 mediante la expresión:

$$z_0 \in D, \qquad d\omega_{Z_0} = P(z_0,t)dt, \qquad u(z_0) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z_0,t)\varphi(e^{it})dt$$

donde $P(z_0,t) = (2\pi)^{-1}(1-|z_0|^2)/|z_0-e^{it}|^2$ es el núcleo de Poisson. Este es un ejemplo bien conocido en el cual la solución es muy satisfactoria.

Para dominios más generales el problema es qué se puede decir respecto de la medida armónica, de su existencia, de sus propiedades, etc. Este problema, como es bastante clásico, ha sido estudiado desde hace más de siglo y medio por métodos muy distintos. Aparte de cosas muy concretas aplicadas a modelos bastante concretos, existen seis métodos generales, por lo menos que yo conozca, para abordar el problema, de los que puede decirse que ninguno es mejor que los otros. Todos tienen sus pros y contras, unos llegan a ver más donde los otros ven menos y viceversa. Alguno de ellos es aplicable sólo en el caso del plano, pero la mayoría se aplican en todas las dimensiones con más o menos dificultades, a veces con las mismas dificultades. Estos métodos son: 1) el de la aplicación conforme, 2) el del movimiento browniano, 3) el de los operadores integrales, 4) el de las funciones de Green, 5) los métodos variacionales basados en el principio de Dirichlet, 6) el de Perron, que consiste en el uso de funciones que se llaman subarmónicas.

Mi objetivo inicial era describir un poco estos seis métodos; pero por cuestión de tiempo me limitaré a hacer una breve exposición de los tres primeros.

Los métodos en sí son clásicos, de manera que su descripción no va a aportar nada que sea excesivamente reciente; sin embargo ésta es un área muy activa en la cual hay problemas interesantes, fascinantes, todavía abiertos. Para dar una idea de su vitalidad quiero mencionar tres resultados recientes, sobre los que hablaré más adelante. Estos son el resultado de Makarov (1985), sobre la dimensión de la medida armónica, y los resultados de Dahlberg y de Calderón, sobre el potencial de capa doble y sobre la equivalencia entre medida armónica y longitud en la frontera en dominios de Lipschitz, que son del año 1977.

A continuación voy a describir brevemente algunos aspectos de los tres primeros métodos que he señalado para el estudio de este problema.

METODO DE LA APLICACION CONFORME

El primer método, el de la aplicación conforme, está basado, como su nombre indica, en el Teorema de la Aplicación Conforme de Riemann, que es algo que sólo existe en el plano y no existe, por lo menos en versión tan satisfactoria, en más variables. Si D es un dominio acotado simplemente conexo y U designa el disco unidad, entonces se puede establecer una aplicación conforme, es decir biyectiva y que ella y su inversa sean analíticas en el sentido de la variable compleja, entre U y D. Además se puede prescribir que la imagen del origen sea cualquier punto interior que nosotros fijemos. De manera que si lo que queremos estudiar es la medida armónica inducida por el punto z_0, conviene que la aplicación conforme transforme el 0, porque el 0 es el punto más sencillo del dominio U, en el punto z_0 (ver Fig. 2):

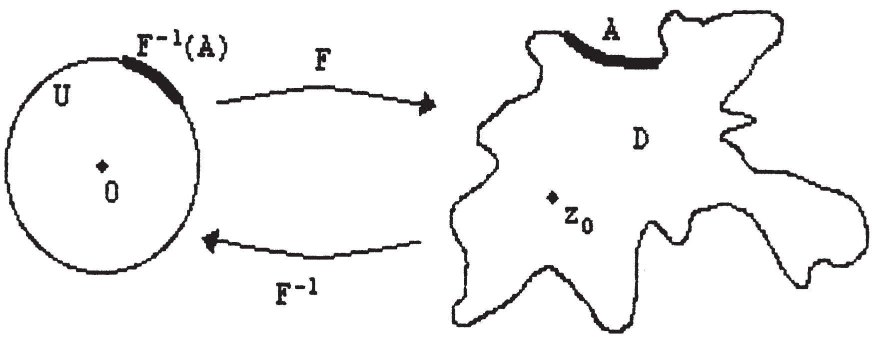


Figura 2

Teorema de la Aplicación Conforme de Riemann: Sea $D \subset C$ un abierto simplemente conexo, $D \neq C$ y $z_0 \in D$. Entonces, existe una aplicación $F : U = \{ |z| < 1\} \leftrightarrow D$ tal que $F(0) = z_0$, y F, F^{-1} son analíticas.

Pasando de un dominio a otro mediante F y F^{-1}, como la composición con aplicaciones analíticas conserva las funciones armónicas (funciones que satisfacen la ecuación $\Delta u = 0$), el teorema anterior permite convertir el problema en el dominio D en un problema en el disco unidad, en el cual ya hemos visto que la solución es conocida y sencilla. Eso nos dice que la medida armónica correspondiente a z_0 de un trozo de la frontera A (ver Fig. 2), que puede ser mucho peor que un arco aunque esté dibujado de esa manera, es la medida armónica correspondiente al punto 0 y al dominio U del trozo correspondiente en este camino de ida y vuelta mediante la aplicación conforme. Y como éste está calculado antes como su medida de Lebesgue normalizada, esto resuelve el problema en este caso. Así tenemos la medida armónica para un conjunto cualquiera. El valor de la solución del problema de Dirichlet en un punto z_0 también vendría expresado de la misma manera que para el problema de Dirichlet en el disco, sólo que componiendo la función φ. Esta estaba definida en la frontera de D y al componerla con F tenemos la función definida en la frontera del disco. De manera que sin más que escribir

$$\omega_{z_0}(A) = \frac{1}{2\pi}|F^{-1}(A)|, \qquad u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi \circ F(e^{it})dt$$

obtenemos la medida armónica correspondiente a z_0 y el valor de la solución del problema de Dirichlet en z_0, que son los mismos que en el primer ejemplo que citábamos, sólo que todo hay que componerlo con la aplicación conforme F o su inversa F^{-1}.

Este es un método elegante y sencillo de resolver el problema para un dominio simplemente conexo general. Y es bueno en cuanto a garantizar de una manera cómoda y rápida que la solución existe. Por otra parte, ya estaba escrito en el Teorema de Representación de Riesz aunque no lo hemos enfatizado, la solución cuando existe es única, por el principio del máximo de las funciones armónicas, de forma que no hay nunca problema de unicidad. Como decíamos, este método garantiza la existencia, dice muy poco o prácticamente nada sobre lo que queremos saber, sobre cómo es la medida armónica. Nos da una descripción aparentemente explícita, pero realmente no lo es ya que F no se conoce apenas, es demasiado complicada como para poner nuestras manos sobre la medida armónica y decir que le pasa a ésta. Así que éste no es un buen método en general, salvo para dominios sencillos en los que la aplicación conforme se puede manipular de una manera explícita. En esos dominios sí que da la solución de una manera muy sencilla, pero para un dominio general es un mal método para estudiar la medida armónica.

Pasemos entonces al segundo método que es probablemente el más divertido, el que consiste en el movimiento browniano.

METODO DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

Vamos a tratar de describir muy brevemente lo que es el movimiento browniano en el plano. Generalmente se suele describir el movimiento browniano empezando en el origen, pero aquí lo vamos a hacer empezando en un punto z_0 del plano, porque es el punto con respecto al cual se quiere hallar la medida armónica. El movimiento browniano viene dado por una colección de variables aleatorias $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ bidimensionales, o sea, B_t es un punto del plano que depende de un espacio de probabilidad (Ω,P) que no hace falta explicitar. Se pueden hacer construcciones muy diversas. Y que verifican las siguientes propiedades:

1) La primera variable aleatoria es constante, es el punto inicial z_0 c.s., que quiere decir «casi seguramente» o «salvo un conjunto de probabilidad cero», que podemos despreciar.

2) Si tomamos tiempos crecientes, $t_1\leq t_2\leq t_3\leq\ldots\leq t_n$, y consideramos los incrementos B_{t_2}-B_{t_1}, B_{t_3}-B_{t_2}, etc., esos incrementos son independientes, son variables aleatorias independientes. Luego explicaremos que quiere decir eso desde el punto de vista práctico o desde el punto de vista de la interpretación del movimiento browniano.

3) Si tomamos la variable aleatoria t+h menos la variable aleatoria t, es decir, según la interpretación que veremos más adelante, el vector que mide la diferencia entre donde está la partícula en el instante t+h y donde está en el instante t, fijados t y h, obtenemos una distribución normal, es decir, no hay direcciones privilegiadas; una distribución normal cuya media es 0 y cuya varianza es h, justamente el tiempo transcurrido entre los dos instantes de medición.

Esquemáticamente, podemos escribir:

<u>Movimiento browniano:</u> Es una colección de variables aleatorias bidimensionales $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ sobre (Ω, P) cumpliendo

i) $B_0 = z_0$ c.s.
ii) B_{t_2}-B_{t_1}, B_{t_3}-B_{t_2}, ..., $B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$ son independientes $(t_1\leq t_2\leq t_3\leq \ldots\leq t_n)$.
iii) $B_{t+h}-B_t$ es una distribución normal de media 0 y varianza h.

¿Cómo puede imaginarse uno el fenómeno físico que pretende describir este modelo matemático? El movimiento browniano pretende describir un camino que yo le llamaría errático y anárquico, de una partícula en el plano que hace lo siguiente (las tres propiedades que vamos a describir ahora se corresponden con las tres propiedades matemáticas mencionadas antes): Primero parte de z_0. Segundo, una vez que ese camino, de alguna manera, llega a un punto z y luego tiene que seguir a partir de allí, sigue a partir de él como si empezara de nuevo; o sea que el movimiento browniano a partir de entonces es otro movimiento browniano exactamente igual que el anterior salvo que empieza en z. De manera que la partícula sigue en cada momento sin acordarse de como y por que llegó allí. Por eso el movimiento es errático y anárquico. Eso se corresponde con el hecho de que los incrementos son independientes, lo que le pasa a la partícula a partir de t_2 no tiene nada que ver con lo que ha hecho entre t_1 y t_2, es absolutamente independiente. Y la tercera propiedad es que se mueve sin direcciones privilegiadas. Eso viene expresado por el hecho de que la distribución es normal; es decir, cuando una partícula llega a un punto no se acuerda de por donde ha venido y puede empezar a andar en cualquiera de las direcciones con igual probabilidad en todas ellas. Lo único que mide la varianza es, más o menos, cuál es la esperanza que tenemos de que después de un tiempo h la partícula esté en una determinada bola.

Entonces, B_t representa la posición de la partícula en el instante t que, repito, es una variable **aleatoria,** de manera que no se puede decir «está aquí», sino lo que dice B_t es «la partícula en el instante t está en esta zona con una cierta probabilidad». Y la correspondencia entre $[0,\infty)$ y C que lleva t a B_t es un camino, también aleatorio, claro, que es cada uno de los posibles caminos que puede seguir la partícula. Ahora bien, uno no se puede plantear cual es la probabilidad de que la partícula siga un camino concreto porque sería cero, pero se puede preguntar cual es la probabilidad de que el camino que siga la partícula sea de tal manera. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que el camino se cruce consigo mismo una vez?, ¿cuál es la probabilidad de que el camino, después de salir de z_0, vuelva al círculo de radio 1 alguna vez?, ¿cuál es la probabilidad de que el camino se vaya hacia el infinito?

A pesar de lo errático que es, el proceso es continuo, o sea que la aplicación $t \rightarrow B_t$, el camino aleatorio, es, casi con seguridad, continua en todos los puntos. Y también casi con seguridad es no derivable en ningún punto. El que sea no derivable no es raro, porque si al llegar a un punto la partícula sale de allí sin acordarse de por dónde vino y si tuviese la inmensa suerte de que el camino de llegada hubiese tenido una tangente, una derivada por la izquierda, como no se acuerda de por donde vino, puede seguir en cualquier dirección, luego mucha casualidad sería que fuese a seguir en la misma dirección por la que vino. De forma que la probabilidad de que sea derivable es cero en cada punto. Pero no sólo eso, sino que con probabilidad uno el camino no será diferenciable en ningún punto y por ello el camino es mucho peor de lo que está dibujado en la Fig. 3, el camino no se puede dibujar tan malo como es.

Existen modelos físicos, modelos de la naturaleza, que se ajustan bastante bien a este proceso, y de hecho parece ser que por eso fue por lo que Brown empezó a estudiar este fenómeno, aunque su fundamentación matemática es de este siglo. Por ejemplo, parece ser que las partículas de polvo que uno ve suspendidas experimentan un movimiento browniano. Quizá no en el espacio porque, aunque poco, la gravedad puede influir, pero sí su proyección sobre un plano. También, según dicen los biólogos, ciertos organismos unicelulares, algunos tipos de vorticelas, experimentan un movimiento tan errático y aleatorio que el movimiento browniano lo describe con bastante exactitud.

En principio, no parece que esto pudiera tener relación con la distribución de las temperaturas ni con el potencial, qué son cosas bastante bien definidas y deterministas, que no tienen nada de erráticas y anárquicas. Veamos entonces qué conexión hay con la medida armónica.

Figura 3

Dado un punto z_0 en el interior del dominio, vamos a empezar el movimiento browniano en z_0. Hay una segunda propiedad que no había citado y es que el límite superior, casi con seguridad, es infinito ($\lim \sup_{t \to \infty} |B_t| = +\infty$ c.s.). Esto traduce el hecho de que el movimiento browniano no se queda en una región acotada, sino que sale. Tampoco es que se vaya hacia el infinito, sino que va y vuelve muchas veces. Entonces, el viajero browniano que hace este movimiento alguna vez tendrá que atravesar la frontera. Y nos fijamos en el punto por el que atraviesa la frontera por primera vez, punto al que llamamos H_{Z_0} (ver Fig. 4). Naturalmente, H_{Z_0} es una vez más una variable aleatoria porque el camino que va a seguir no es un camino seguro, sino un camino con una cierta probabilidad de que sea éste o el otro. De manera que H_{Z_0}, que existe casi con seguridad por la propiedad segunda que hemos citado antes, es una variable aleatoria cuyos valores necesariamente tienen que estar en la frontera. Por tanto si tomamos un conjunto A podemos plantearnos cuál es la probabilidad de que el punto en el que el movimiento browniano toca la frontera pertenezca al conjunto A. Esto define una cierta medida en Γ.

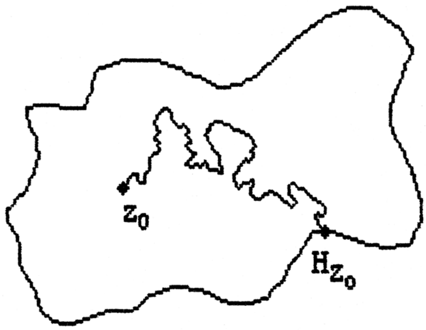


Figura 4

Por ejemplo, supongamos que estamos en el caso más sencillo que sabemos tratar: el disco unidad y z_0 el origen. Por la propiedad iii), que era el hecho de que no había direcciones privilegiadas, la probabilidad de que el movimiento browniano alcance un intervalo es la misma de que alcance ese intervalo girado. Es decir, la medida que describe la probabilidad de que H_{Z_0} pertenezca a A es una medida invariante por rotaciones. Y una probabilidad sobre la circunferencia que sea invariante por rotaciones es equivalente a su longitud normalizada para que su longitud total sea uno. De modo que, en el caso del disco empezado el movimiento browniano en el origen, la probabilidad de que el primer punto de alcance esté en el conjunto A es la medida del conjunto, su longitud, dividida por 2π para que la probabilidad total sea uno. Pero esa cantidad, si recordamos bien, era también la medida armónica de A correspondiente a z_0. Así que en este caso es muy fácil de comprobar que las dos probabilidades coinciden. Pero no es casualidad. Esto ocurre en general y es un precioso teorema, uno de los más bonitos que relacionan la probabilidad con el análisis, y fue probado en el año 1944 por Kakutani. Dice lo siguiente:

Dado cualquier dominio D, tenemos una medida definida sobre la frontera del dominio que nos dice que la medida de un conjunto va a ser la probabilidad de que el primer punto en que el movimiento browniano corte la frontera esté en ese conjunto. Por otro lado tenemos la medida armónica con base en el punto z_0 que nos da otro valor. Esos dos valores son iguales. Dicho de otra forma, la solución al problema de Dirichlet viene dada mediante la esperanza de aplicar los datos del problema de Dirichlet φ al punto que es el primer punto de alcance de la partícula. Matemáticamente,

Teorema de Kakutani (1944): Dado un dominio D acotado y Γ su frontera, su medida armónica es $\omega_{Z_0}(A) = \mathrm{Prob}(H_{Z_0} \in A)\ \forall\ A \subset \Gamma$. Por tanto, la solución en z_0 al problema de Dirichlet con valor en la frontera φ es $u(z_0) = \int_\Gamma \varphi(H_{Z_0})dP = E[\varphi(H_{Z_0})]$.

Este teorema proporciona un método práctico, pero en realidad impracticable, de solucionar el problema de Dirichlet. Consideremos el dominio D; sabemos el valor de φ en todos los puntos de su frontera y, suponiendo que φ es un potencial eléctrico por ejemplo, queremos hallar el valor del potencial en el punto z_0. Pues bien, ponemos una vorticela en el punto z_0 y dejamos que se mueva hasta que toque la frontera. En la frontera hemos puesto una solución paralizante, de manera que allí se queda parada la vorticela y muere. Entonces, en el punto en que ha muerto la vorticela calculamos el valor del potencial. Pero eso sólo lo hemos hecho una vez. Como se trata de una cuestión aleatoria tenemos que hacerlo ¡un millón de veces!, para lo cual necesitamos un millón de vorticelas. Hacemos esto un millón de veces y en cada punto en que la vorticela muere calculamos el valor del potencial. Hallamos el promedio de esos valores y ése es el valor del potencial en z_0.

Este método, aunque parezca un tanto esotérico, es muy útil para interpretar cosas, sirve para hacerse una idea de cómo funciona la medida armónica. También la interpretación en términos de la temperatura conduce a resultados parecidos, pero esta interpretación en términos del movimiento browniano es bastante ilustrativa.

Por ejemplo, supongamos que tenemos un dominio como el de la parte punteada de la Fig. 5 y tratamos de hallar la medida armónica con respecto al punto z_0. La frontera tiene cuatro partes: la parte del disco interior, la pequeña salida, la parte que rodea al disco interior y la parte de fuera. De manera que una inmensa parte de la frontera está formada por lo que en la figura se llama el conjunto A –la parte de fuera y la otra que están señaladas por las dos flechas–. Dicho conjunto A es un subconjunto de la frontera que, en términos de longitud, es enorme. Se podía haber dibujado mucho más grande, de modo que el 99% de la longitud de la frontera estuviera contenida en A. Sin embargo, la medida armónica de A, si tomamos como punto base z_0, va a ser muy pequeña. ¿Por qué? Porque, ¿cuál es la probabilidad de que un viajero browniano que empiece en z_0 alcance por primera vez la frontera en un punto de A? Tiene que pasar por el callejón, no le queda más remedio, y la probabilidad de que el movimiento browniano pase por él es muy pequeña. Concretamente, para pasar por el callejón primero tendría que llegar a la parte del disco interior que tiene amplitud ε, y ya sabemos que la probabilidad de que el movimiento browniano pase por esa parte del disco antes que por las demás es justo la medida de ese arco dividida por 2π. De modo que la probabilidad de que el movimiento browniano alcance por primera vez la frontera en un

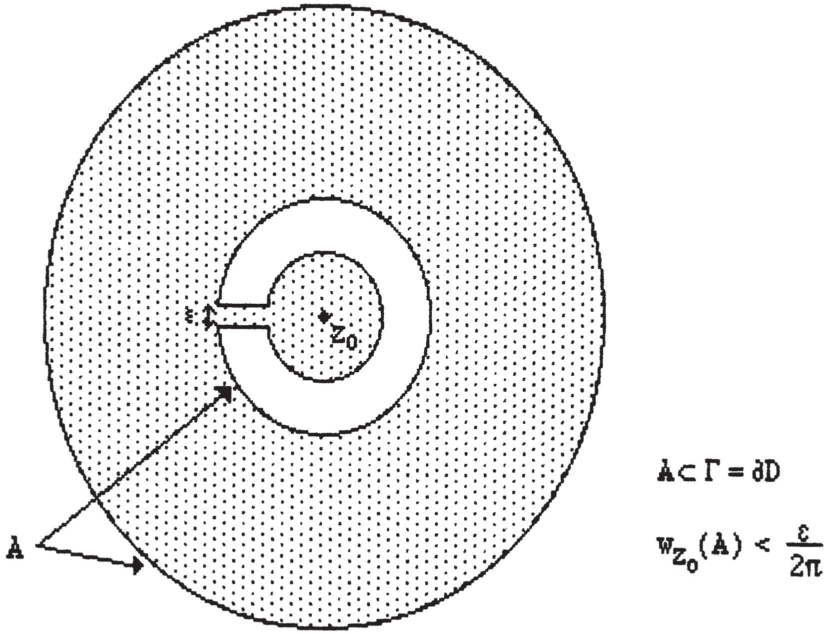


Figura 5

punto de A es menor, no igual sino menor, que $\varepsilon/2\pi$. ¿Por qué menor? Porque incluso en el caso de que haga lo más difícil que es llegar al callejón, de lo cual tiene una probabilidad de $\varepsilon/2\pi$, podría tener la mala idea de volverse por el mismo camino y alcanzar la frontera en un punto de los de la circunferencia interior. Por eso la probabilidad es estrictamente menor. Entonces, aunque la longitud de A es muy grande –hemos dicho que, por ejemplo, el 99% del total de Γ– su medida armónica respecto de z_0 es muy pequeña. Como idea general, un subconjunto de la frontera formado por puntos difícilmente accesibles desde z_0 para un viajero browniano tiene medida armónica pequeña, incluso si es un subconjunto grande.

Esto en particular quiere decir que las medidas armónicas obtenidas al tomar puntos z_0 y z_1 distintos pueden ser muy diferentes. Por ejemplo, en el dominio de la Fig. 6, que también tiene una apertura ε nada más, si tomamos como punto base z_0 y como conjuntos A y B los indicados en el dibujo, la medida armónica con respecto a z_0 de A es muy grande, es casi 1, porque el movimiento browniano tiene grandes probabilidades de tocar en un punto de A por primera vez, mientras que la medida armónica de B es muy pequeña. Ahora bien, si tomamos como punto base z_1 las cosas son al revés, la medida armónica de B es muy grande y la medida armónica de A es muy pequeña. Sin embargo, a pesar de lo que esto pueda dar a entender, luego veremos resultados en sentido contrario, en el sentido de que las medidas armónicas no son tan distintas dado un punto u otro a pesar de todo.

Esta y otras aplicaciones de la interpretación de la medida armónica en términos del movimiento browniano ayudan a intuir lo que va a pasar. Probablemente son útiles también para demostrar cosas, pero para eso hace falta saber más probabilidad de la que yo sé. Los probabilistas han obtenido de hecho resultados notables usando movimiento browniano. En resumen, la interpretación probabilística de la medida armónica es muy útil, más que como herramienta de demostración, como herramienta de intuición.

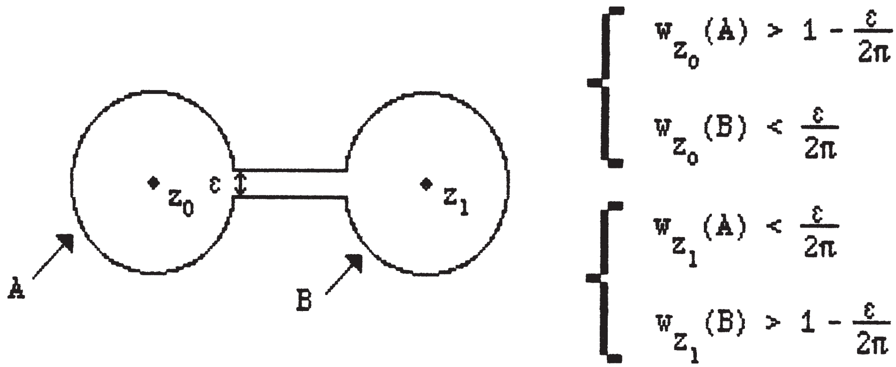


Figura 6

Con ésto paso al tercer método y último de los que voy a describir, que es el método de los potenciales y de los operadores integrales.

POTENCIALES: OPERADORES INTEGRALES

En este método las cosas cambian un poco más si uno está en R^2 o en R^n porque la solución fundamental del laplaciano en el plano es $(2\pi)^{-1}\log|z|$, mientras que en el espacio sería $1/|z|$. Esto es lo único que cambia, pero lo demás sería prácticamente igual en el espacio. ¿Qué significa que la solución fundamental es ésta? Quiere decir que el laplaciano de $(2\pi)^{-1}\log|z|$ es cero en todos los puntos fuera del origen, o sea que es una medida armónica. En el origen no lo podemos calcular en el sentido clásico porque la función $\log|z|$ no es derivable. Pero lo podemos calcular en el sentido de las distribuciones y la distribución que resulta es justamente la delta de Dirac ($\Delta(2\pi)^{-1}\log|z| = \delta$). Esto es lo que se llama solución fundamental del laplaciano o, en general, para un operador diferencial cualquiera, solución fundamental del operador diferencial.

La solución fundamental sirve para resolver ecuaciones como $\Delta u = g$, que es la ecuación que debe verificar el potencial eléctrico dado por una distribución de carga en el plano cuya densidad sea g. El tener cargas distribuidas en el plano con una densidad superficial de carga g significa que g(z) en un punto es, más o menos, la carga de un pequeño disco alrededor del punto dividido por el área del disco. Entonces, es un argumento bastante fácil de electrostática, si g ($g \in C_0(R^2)$) es la densidad superficial de carga, la ecuación que debe verificar el potencial eléctrico u es $u = g$. Y una solución de esta ecuación viene dada mediante la solución fundamental, es decir u(z) es lo que se llama la convolución en el plano del dato g con la solución fundamental, que escrito explícitamente es la integral doble:

$$u(z) = \int\int_{R^2} \tfrac{1}{2\pi} \log|z-w| g(w) dw_1 dw_2.$$

Ahora bien, nosotros estamos más interesados en el caso en que la distribución de carga no es una distribución sobre todo el plano sino sólo sobre una curva del plano, concretamente sobre la curva que rodea el dominio. Entonces, si la carga está distribuida en una curva Γ con densidad lineal g(s) (ver Fig. 7), el potencial viene dado de la misma manera que antes con la diferencia de que ahora es una integral sobre la línea Γ:

$$U_1g(z) = \int_\Gamma \tfrac{1}{2\pi} \log|z-s|g(s)ds.$$

A esto se le llama potencial de capa simple generado por g. Se le podría llamar potencial de capa generado por g, pero lo de capa simple proviene de que, como todo el mundo puede imaginar, también hay un potencial de capa doble. Este segundo es un poquito más difícil de explicar, pero ocurre que, aparte de las interpretaciones físicas, desde el punto de vista matemático, el potencial de capa simple sirve mejor para el problema de Neumann que para el problema de Dirichlet que estamos considerando. Para el problema de Dirichlet el que es realmente útil es lo que se llama el potencial de capa doble, que ahora explicamos.

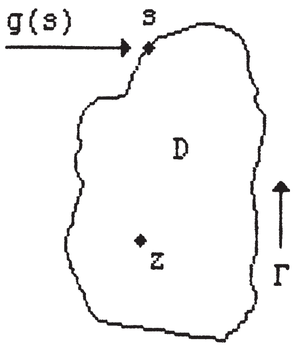


Figura 7

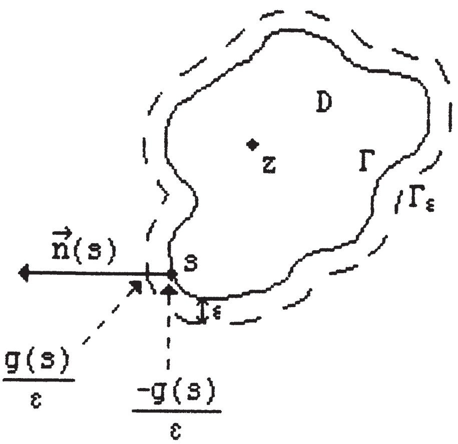


Figura 8

El potencial de capa doble físicamente se traduce en lo siguiente (ver Fig. 8): tenemos nuestro domino D con su curva Γ que lo rodea y formamos otra curva Γ_ε alejándonos de la frontera una longitud ε en la dirección normal exterior. De manera que tenemos la curva Γ y la curva Γ_ε muy pegadita a ella. Esas van a ser las dos capas. En cada una de ellas tenemos una densidad lineal de carga $g(s)/\varepsilon$, pero con signo positivo en una y negativo en la otra. Concretamente en la capa exterior tenemos una densidad lineal de carga $g(s)/\varepsilon$ y en la capa interior una densidad lineal de carga $-g(s)/\varepsilon$. Si hacemos tender ε a cero, el potencial generado en el interior por estas capas, una de distinto signo que la otra, es lo que se llama el potencial de capa doble. Un cálculo muy sencillo nos conduce a que el potencial de capa doble generado por g tiene una expresión parecida, o formalmente similar, a la del potencial de capa simple:

$$U_2g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \vec{n}(s)}\log|z-s|g(s)ds.$$

Pero la diferencia es que el término $\log|z-s|$, la solución fundamental, aparece derivado en la dirección normal exterior.

Los potenciales de capa simple y de capa doble no es que sean importantes por su interpretación física sino por el hecho de que, si tenemos una función continua u en el dominio cerrado ($u \in C(D)$ y armónica en el interior, o sea que satisface $u = 0$ en D, la solución dentro puede expresarse en términos de los valores que toma la función en la frontera y los valores que toma la derivada normal exterior en la frontera, que en realidad luego veremos que son demasiados datos. Concretamente, la solución en el interior es el potencial de capa doble aplicado a la función restringida a la frontera menos el potencial de capa simple aplicado a la derivada normal exterior de ese potencial:

$$u(z) = U_2(u|_\Gamma)(z) - U_1(\partial u/\partial \vec{n})(z).$$

Lo que ocurre es que, cuando uno conoce $u|_\Gamma$, está en el problema de Dirichlet que es el nuestro, y cuando uno conoce $\partial u/\partial \vec{n}$ está en el problema de Neumann, pero no se pueden conocer las dos cosas a la vez. Además, no se pueden prefijar: si se quiere solucionar el problema fijando los valores de $u|_\Gamma$ y de su derivada normal exterior resulta que eso es fijar demasiado y el problema en general no tiene solución pues son demasiados datos a la vez. Entonces, en particular, para el problema que nos ocupa que es el de Dirichlet, conocemos el dato $u|_\Gamma$ pero no $\partial u/\partial \vec{n}$. De manera que la fórmula que hemos encontrado para U(z) no nos sirve. Y entonces, como lo único que conocemos es $u|_\Gamma$ podemos decir: «¿Qué pasará si tachamos $U_1(\partial u/\partial \vec{n})$ y nos olvidamos de él de momento?» Pues pasará que no es la solución correcta. Pero siempre uno puede plantearse: «¿cuanto me he equivocado?, ¿qué error cometemos tomando $U_2(u|_\Gamma)$ como solución?». Lo que queríamos conseguir es una función que fuese armónica en el interior y que coincidiese con unos valores prefijados en la frontera. Si uno observa la expresión del potencial de capa doble, uno ve que ahí, derivando formalmente, y esas derivaciones se pueden justificar, lo que resulta es armónico; tanto el potencial de capa simple como el de capa doble U_1g y U_2g dan funciones armónicas en el interior. O sea que la solución de la ecuación $\Delta u = 0$ en el interior se verifica para la función $U_2(u|_\Gamma)$. Lo que ocurre es que no va a tener los valores frontera correctos. ¿Cuáles son los valores frontera que va a tener en general $U_2g(z)$? Unas cuentas sencillas permiten demostrar el siguiente lema:

Lema: $\lim_{z\to s} U_2g(z) = g(s)/2 + Tg(s)$ $(s \in \Gamma)$, donde T es un operador integral en $L^2(\Gamma)$: $Tg(s) = \int_\Gamma K(s-t)g(t)dt$.

Es decir, que si tomamos la función g en la frontera y le aplicamos el U_2, la función que obtenemos es armónica pero sus valores frontera no son g, sino que son g(s)/2 más un cierto operador integral aplicado a g en s. Aquí es donde los operadores integrales aparecen en juego y por eso hemos dicho que este tercer método estaba basado en el uso de operadores integrales.

Este método así, aplicado de una manera tan burda, falla porque no da los valores frontera correctos, pero eso ya lo podíamos esperar porque hemos eliminado el potencial de capa simple sin más, sin pagar nada a cambio. A pesar de todo, hay un proyecto para solucionar el problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ en D y $u = \varphi$ en $\Gamma = \partial D$. Tomamos $u(z) = U_2g(z)$, pero esta g no va a ser φ porque entonces no obtenemos los valores frontera correctos. Según el lema anterior, la función u va a ser armónica y sus valores frontera van a ser $g/2 + Tg$. Entonces, lo que tenemos que hacer es aplicar U_2 a una cierta g que verifique la ecuación $g/2 + Tg = \varphi$. Eso de momento no supone mucho avance porque es reducir un problema a otro. Cuando se reduce un problema a otro lo que hay que ver es si éste es más sencillo o más complicado que el que teníamos.

Teniendo en cuenta la expresión de T, la ecuación $g/2 + Tg = \varphi$ es una ecuación integral clásica de las que Fredholm y Volterra estudiaron a finales del siglo pasado y principios de éste. De manera que la teoría de ecuaciones integrales acude aquí en nuestra ayuda. Y en particular, con una nomenclatura más sofisticada, lo que se puede probar es que si Γ es una curva de clase C^2, entonces el núcleo K(s-t) que aparecía en el operador integral es de hecho acotado (si estuviésemos en dimensiones superiores no sería acotado, pero el resto de lo que sigue sería cierto). Entonces, el operador T es un operador compacto en $L^2(\Gamma)$ y por la teoría de Fredholm, la ecuación $g/2 + Tg = \varphi$, donde φ era el dato que nos daban, es resoluble. Así pues, a partir de esta φ, resolvemos la ecuación por la teoría de Fredholm, calculamos g, a esta g le aplicamos el potencial de capa doble y eso resuelve el problema de Dirichlet. Este es el método basado en la teoría de operadores integrales, y en particular en la teoría de Fredholm para operadores compactos.

Observemos que cuanto más regular es la frontera, mejor es el operador integral que aparece. Aquí necesitamos dos derivadas, de hecho en términos de derivadas fraccionarias se necesita un poquito más que una derivada, una derivada más épsilon es suficiente, pero como no quiero decir lo que es una derivada más épsilon vamos a dejarlo en clase C^2. Pero desde luego el método no funciona si la frontera es de clase C^1 o Lipschitz. ¿Qué quiere decir Lipschitz? En vez de dar la definición expliquémoslo con una figura: Lipschitz quiere decir que puede tener picos, como tiene la Fig. 9, puntos en los que la frontera no tiene tangente, pero esos picos tienen que estar en un ángulo positivo. Lo que no puede darse es una situación como por ejemplo $y = \sqrt{|x|}$, que tiene un entrante en el que las dos tangentes coinciden. Esa curva no es Lipschitz, pero cualquier otra que tenga picos con derivadas laterales que formen un cierto ángulo, que no coincidan, que no sean opuestas unas de otras, da lugar a un dominio Lipschitz.

Cuando Γ es C^1 o Lipschitz, el núcleo verifica la estimación $|K(s-t)| \leq 1/|s-t|$. Pero aunque verifique esa estimación, la integral $\int_\Gamma |K(s-t)|dt$ es infinita en general, o sea que el núcleo no es integrable. De modo que la integral que definía el operador T no es absolutamente convergente, y hay que entenderla en el sentido de valor principal. Esto es lo que se llama una integral singular. Por tanto el problema se complica cuando el dominio sólo es derivable una

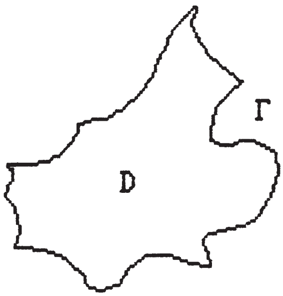


Figura 9

vez o en general es Lipschitz, y todo este proceso así tan obvio no funciona. Sin embargo, aquí viene el primer teorema nuevo –nuevo quiere decir relativamente reciente– de esta teoría, que es el Teorema de Calderón: Si Γ es una curva Lipschitz, entonces el operador que hemos llamado T, que es el operador de capa doble actuando en la frontera, resulta estar acotado en $L^2(\Gamma)$, cosa que no es en absoluto obvia (fue un objeto de deseo durante muchos años demostrar este teorema). Además, dicho operador es compacto y cumple que un medio de la identidad más T es un operador invertible en $L^2(\Gamma)$. Es decir,

Teorema de Calderón (1977): Si Γ es Lipschitz, el operador T es acotado en $L^2(\Gamma)$, es compacto y además $I/2 + T$ es invertible.

Así, el problema de Dirichlet se puede resolver para un dominio de Lipschitz D tomando no sólo datos continuos, sino algo más general: tomando datos φ que estén en $L^2(\Gamma)$ (que φ están en $L^2(\Gamma)$ quiere decir que su cuadrado es integrable respecto a la longitud de arco). Por supuesto eso lo verifica una función continua pero también lo verifican funciones más generales. Así pues, el teorema permite resolver el problema de Dirichlet para este tipo de funciones tomando el programa que hemos dicho antes: como el operador $I/2 + T$ es invertible, a la función φ le aplicamos el inverso de este operador y tenemos la función g; a ésta le aplicamos el operador de capa doble y obtenemos u. En resumen, $u = U_2[(I/2 + T)^{-1}\varphi]$. O sea, el programa es el mismo que antes, pero ahora no es en absoluto obvio el hecho de que el operador T es acotado en $L^2(\Gamma)$ si la curva Γ es Lipschitz, y probablemente es uno de los teoremas de Análisis más profundos probados en la segunda mitad de este siglo.

Debía haber advertido antes, quizá al principio para salvaguarda, que para hacer la exposición más sencilla iba a decir, probablemente he dicho y estoy diciendo ahora, mentiras pequeñitas. Voy a justificarme un poco. Realmente, aunque lo anterior es cierto, no se deduce del Teorema de Calderón de 1977: el Teorema de Calderón fue mejorado después, ligeramente mejorado. Tal como él lo probó en 1977, la curva tiene que ser de clase C^1. Pero bueno, moralmente el Teorema de Calderón da básicamente el resultado.

Con todo esto he descrito un poco, creo que someramente pero quizá lo suficiente para dar una idea, los tres primeros métodos y he hablado del primero de los tres resultados que quería mencionar. ¿Cuál es el segundo teorema? El segundo teorema es el Teorema de Dahlberg, que expongo a continuación.

EL TEOREMA DE DAHLBERG

Si recordamos cómo era la solución al problema de Dirichlet en el caso sencillo, el caso del disco, ésta venía dada por $P(z_0,t)dt$, que de hecho era una medida definida por una densidad con respecto a la longitud de arco (dt, salvo el 2π, es la longitud de arco). De manera que la medida es lo que se llama absolutamente continua respecto a la longitud de arco, y viene dada no como una medida extraña sino con una cierta función multiplicada por la longitud de arco. Y eso ocurre también en los dominios «bonitos», por ejemplo en los dominios de clase C^2. Uno puede calcular también en términos de potencial de capa doble como es la medida armónica en términos de la longitud de arco: es una cierta función multiplicada por la longitud de arco. En general, para los dominios Lipschitz no se sabía si eso era cierto, ni siquiera si podía ocurrir que una tuviese medida positiva donde la otra era cero y viceversa. Dahlberg en 1977 probó que la medida armónica y la longitud de arco son equivalentes. Más aún, si el dominio es un dominio Lipschitz acotado, entonces la medida armónica venía dada por una cierta densidad $k(z_0,s)$, que depende por supuesto de z_0, con respecto a la longitud de arco ds en Γ. O, lo que es lo mismo, la solución al problema de Dirichlet con dato φ en la frontera viene dada como la integral sobre Γ del dato multiplicado por la función de densidad. Además, esta densidad no sólo es una densidad integrable, que tendría que serlo para que la medida fuese finita, sino que es algo mejor que integrable: está en la clase $L^2(\Gamma)$ (y de hecho $L^2(\Gamma)$ no se puede mejorar).

<u>Teorema de Dahlberg (1977):</u> Sea D dominio Lipschitz acotado, $\Gamma = \partial D$. Entonces, $\forall\, z_0 \in D$, $d\omega_{z_0} = k(z_0,s)ds$ (ds = longitud de arco en Γ). Es decir, la solución al problema de Dirichlet con valor φ en Γ es $u(z_0) = \int_\Gamma K(z_0,s)\varphi(s)ds$. Además, $k(z_0,-) \in L^2(\Gamma;ds)$.

<u>Observaciones:</u>

1) Esto resuelve en primer lugar el problema de saber si la medida ω_{z_0} es absolutamente continua respecto a la longitud de arco, que es la medida de Lebesgue en la frontera. En particular, si la longitud de un trozo de curva es cero, la medida armónica de ese trozo es cero. Es decir, designando a la longitud de arco mediante la medida con barras, tendremos:

$$|A| = \int_A ds = 0 \Rightarrow \omega_{z_0}(A) = 0.$$

En vista de que con la figurita de los dos círculos (Fig. 6) hemos mostrado que la medida armónica varía mucho de un punto a otro, uno podría pensar si este problema depende del punto z_0 de base que tomemos, porque a lo mejor la medida armónica es absolutamente continua para un punto y no lo es para el otro. Pero el problema de la continuidad absoluta es independiente del punto que elijamos. Por supuesto, la expresión de la medida armónica varía si uno tiene un punto u otro, pero el problema de que ésta sea o no absolutamente continua respecto a la longitud de arco es independiente del punto elegido porque se verifican estas desigualdades:

$$\forall z_0,z_1 \in D, \exists\, C(z_0,z_1) > 0 \text{ tal que } C(z_0,z_1) \leq \omega_{z_0}(A)/\omega_{z_1}(A) \leq C(z_0,z_1)^{-1}, A \subset \Gamma.$$

Es decir, si se toman dos puntos, el cociente de las medidas armónicas respecto a esos dos puntos, para cualquier conjunto, está mayorado por arriba y por abajo por sendas constantes que sólo dependen de los puntos, pero no del conjunto. En particular, si la medida armónica de un trozo de la frontera es cero para un punto, es cero para cualquier otro punto y viceversa. Estas constantes pueden ser enormes si los puntos z_0 y z_1 están muy alejados o son difícilmente accesibles entre sí dentro del dominio, pero para cada z_0 y z_1 existen estas constantes. A este tipo de desigualdades se les llama desigualdades de Harnack, y de hecho se cumplen no sólo en estos casos, sino para cualquier función armónica: la desigualdad de Harnack dice que si tomamos una función armónica en z_0 y otra función armónica en z_1 su cociente verifica lo anterior. Y lo que sucede es que $\omega_z(A)$ depende de una manera armónica de z cuando z varía, por eso también se llama medida armónica. De manera que estas desigualdades de Harnack muestran que el problema de la continuidad absoluta no depende del punto elegido.

Este problema de la continuidad absoluta estaba planteado, se sabía que no dependía del punto elegido, y estaba sin resolver en los dominios Lipschitz. Dahlberg lo resolvió y por ello recibió el premio Salem, premio que se da cada año en honor de Salem, por una donación, por un legado suyo. Y es un asunto curioso lo que ha ocurrido después. Dahlberg es un matemático sueco que entre otras cosas ahora diseña coches para la casa Volvo, pero aparte de eso sigue haciendo matemática –vamos a decir fundamental– tremendamente dura. Además sabe un montón sobre computadores, y sin duda por ese trabajo y por los demás que ha hecho merecía el premio Salem. ¡Sin embargo el resultado era conocido! Mejor dicho, el resultado estaba escrito, pero no era conocido. Gente que trabaja en teoría de potenciales ha descubierto más adelante que un matemático del Este, oscuro y desconocido, tenía escrito este resultado esencialmente con demostración parecida. Quizá no daba tantos detalles, pero en particular probaba la continuidad de la medida armónica con respecto a la medida de Lebesgue. No sólo estaba publicado, sino escrito en un libro, libro que aparentemente nadie leyó, pero estaba allí antes de que Dahlberg probase el teorema. Eso fue un descubrimiento a posteriori que demuestra que a veces uno se puede equivocar, pero sobre todo demuestra que la comunicación entre el Este y el Oeste en materia científica no es tan buena como debía ser, por lo menos en matemáticas. Y me temo que en lo otro mucho menos porque las matemáticas es lo más inocente dentro del capítulo de las ciencias.

2) La segunda observación es que de hecho la medida armónica y la longitud de arco son equivalentes, es decir que no sólo hay una implicación de que si la longitud de arco es cero la medida es cero, sino al revés también: $|A| = 0 \Leftrightarrow \omega_{z_0}(A) = 0$.

3) Y la tercera observación es que el teorema afirma algo más: afirma que el núcleo $k(z_0,-)$ está de hecho en $L^2(\Gamma)$, con lo cual la integral $\int_\Gamma k(z_0,s)\varphi(s)ds$ no sólo está definida para funciones continuas φ, sino que, si φ está en $L^2(\Gamma)$, aplicando la desigualdad de Schwarz también está bien definida. Luego el Teorema de Dahlberg, al igual que el resultado de Calderón mencionado antes, también permite solucionar el problema de Dirichlet con datos en la frontera no sólo continuos, sino incluso con datos en $L^2(\Gamma)$ que es más general.

Este es pues el Teorema de Dahlberg, del año 1977, que es el segundo de los teoremas brillantes obtenidos en este área, un área ahora mismo bastante activa, porque el problema en general no está resuelto. Los teoremas de Calderón y Dahlberg son los dos hitos en dominios de Lipschitz que constituyeron una de las extensiones naturales de la teoría que se buscaron durante los años setenta: cuando ya se conocía desde hacía bastante tiempo que si la frontera era C^2 todo iba muy bien, uno se planteaba que pasaba cuando la frontera sólo es C^1 o Lipschitz. Y ésas fueron las respuestas.

Pero puede haber fronteras mucho peores. De hecho, el Teorema de Makarov, que es el tercer teorema que vamos a explicar, se refiere a este caso.

EL TEOREMA DE MAKAROV

Si la curva de Jordan, que es la frontera del dominio, es rectificable –rectificable no quiere decir que tenga longitud finita, lo cual puede no ser cierto aunque la curva sea acotada, sino que localmente tiene longitud finita, o sea que uno puede escribirla como unión de trozos con longitud finita, aunque la longitud total sea infinita– entonces existe en ella una medida natural, que es la longitud de arco, y con respecto a ella se compara la medida armónica. No todos los dominios tienen esa medida natural en la frontera: los dominios pueden tener una frontera muchísimo más grande en el sentido de la teoría geométrica de la medida como ahora voy a explicar.

Para no entrar en demasiados detalles, un ejemplo de dominio de éstos, con frontera muy grande en el sentido de que su medida se mide en algo más que en longitud es lo que se llama el copo de nieve de von Koch. No está dibujado con mucha precisión (ver Fig. 10), pero voy a explicar como se construye. La construcción es parecida a la del conjunto ternario de Cantor y de hecho el conjunto ternario de Cantor es otro ejemplo de conjuntos de este tipo, pero es en la recta y aquí nos vamos a ocupar de conjuntos en el plano. Esto es lo que se llama un fractal, o sea un conjunto de dimensión fraccionaria. Este modelo concreto se construye a partir de un triángulo equilátero. Empezamos quitando el tercio medio de cada lado y sobre él construimos otro triángulo equilátero con base en el trozo que se ha quitado y obtenemos una estrella. Ahora, en cada uno de los tres triángulos que acabamos de construir y en los otros tres que ya teníamos, en los seis picos que quedan ahora iguales, hacemos la misma operación que en el dibujo sólo está hecha en uno de ellos: se quita la parte del centro y se construye otro triángulo equilátero. Esto tendríamos que hacerlo en cada uno de los seis que tenemos y en cada uno de sus dos lados, o sea que me saldrían otros doce picos nuevos. Luego en cada uno de todos los que resultan quitamos la parte del medio y seguimos haciendo lo mismo. Y continuamos indefinidamente. El dominio éste va aumentando, poquito pero va aumentando. Finalmente, la unión de todo esto es el dominio D, y su frontera es la curva de von Koch.

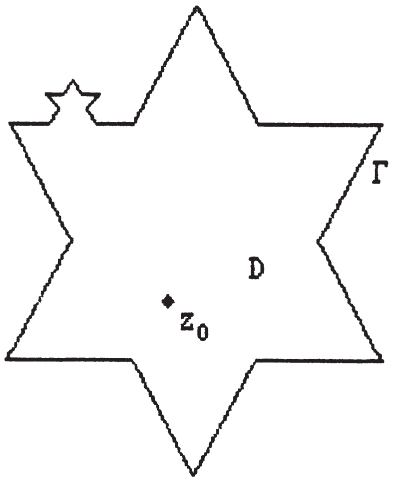


Figura 10

Esta curva no es rectificable y de hecho su dimensión es mayor que 1: es log4/log3. ¿Qué quiere decir que la curva tenga esta dimensión? Entendiendo por dimensión 1 lo que tiene longitud y por dimensión 2 lo que tiene área, dimensión α con α entre 0 y 2 es lo que tiene medida de Hausdorff finita. Vamos a explicar lo que es la medida de Hausdorff. Para que uno se haga una idea, la medida de Hausdorff en R^2, si $\alpha \leq 2$, se define de la siguiente manera:

$$|A|_\alpha \cong \inf \{\textstyle\sum_i |Q_i|^{\alpha/2} : A \subset \cup_i Q_i,\ Q_i \text{ cuadrados}\} \quad (0 < \alpha \leq 2).$$

(Esto también es una mentira, por eso en un rapto de arrepentimiento he puesto el símbolo «$\cong$» para decir que no es igual, que más o menos se define de esta manera, pero la definición es un poquito más larga).

Recordemos cómo se define el área, la medida de Lebesgue. Supongamos que α fuese 2; entonces la definición estaría bien. Se cubre el conjunto por cuadrados Q_i (el área del cuadrado está claro cual debe ser, es el lado al cuadrado), entonces tomamos el ínfimo de la suma de las áreas de los cuadrados que contienen a A, y esto da la medida de Lebesgue de A ($|A|_2=|A|$).

Si, tras hacer el cubrimiento por cuadrados, en vez de tomar aquí como medida el área del cuadrado tomamos como medida la longitud de su lado, entonces se obtendría una medida que es la medida de Hausdorff de orden 1. Y si esa medida se le aplica a una curva rectificable nos da su longitud. Esto es una manera cómoda de definir la longitud de cosas que pueden ser más generales que las curvas rectificables. Si $\alpha = 1$, $|A|_1$ es la «longitud de A», que se le llama «longitud» porque es la medida de Hausdorff 1, y en los casos en que nosotros ya conocíamos una noción de longitud, como en los casos de curvas rectificables, coincide con esa noción.

Pero esta definición vale para cualquier α, y en particular nos permite definir medidas de Hausdorff de cualquier orden α intermedio entre 0 y 2. Entonces, ¿cómo se define la dimensión? Pues se define así:

$$\dim A = \sup\{\alpha : |A|_\alpha = \infty\} = \inf\{\alpha : |A|_\alpha = 0\}$$

esto es, como el supremo de los α tales que el conjunto A tiene medida de Hausdorff α infinita o también el ínfimo de aquellos en que tiene medida cero.

Es decir, dado un conjunto, hay siempre una cortadura; se empieza desde cero con las medidas de Hausdorff de orden α muy pequeñas y esas medidas valen infinito. Si el conjunto tiene medida de Lebesgue cero, entonces se puede empezar a bajar y a lo mejor también tiene medida cero para algunos α. Pues bien, el supremo de un conjunto y el ínfimo de otro coinciden, y eso define una cortadura. Este supremo e ínfimo común es lo que llamamos dimensión, y es el α para el cual se puede hablar de la α-medida de Hausdorff de A.

Por ejemplo, si tomamos una curva rectificable, que es un caso intermedio, y calculamos su medida de Hausdorff α para $\alpha < 1$, nos da infinito, porque α es demasiado pequeña. Es similar a si queremos medir la longitud de un cuadrado: la longitud de un cuadrado es infinita, o la medida de Hausdorff uno de un cuadrado es infinita. Pero el cuadrado lo que tiene naturalmente es área, porque tiene dimensión dos; así que cualquier medida de Hausdorff α menor que dos que le apliquemos nos va a dar infinito. Entonces, la dimensión de un conjunto es el número α para el que tiene sentido hablar de la medida de Hausdorff de ese conjunto, lo cual no quiere decir que sea finita. La d-medida de Hausdorff de un conjunto de dimensión d puede ser cero, infinita o finita: pueden ocurrir los tres casos, pero es la medida natural del conjunto.

Los únicos casos en que es sencillo interpretar esto son los casos en que α es igual a dos, que da el área, y en que α es igual a uno, que da la longitud, si bien hay toda una sucesión de casos intermedios. En particular el conjunto es tanto mayor cuanto mayor es su dimensión, mayor por lo menos en el sentido de la teoría geométrica de la medida.

De modo que el conjunto que hemos llamado «copo de nieve de von Koch» tiene algo más que longitud, la medida natural de medir en la frontera no es la longitud; tampoco es el área, porque no llega a tener área –no es como la curva de Peano que llena todo un área– pero llena algo más que lo que es la medida unidimensional. Llena una medida d-dimensional donde d es log4/log3. Por ejemplo, el conjunto de Cantor tiene dimensión log2/log3, que es menor que uno como debe ser, porque está en la recta. Y así se puede definir la dimensión de conjuntos que se llaman fractales, como el de la Fig. 10; fractales porque tienen dimensión fraccionaria.

Entonces uno puede plantearse, en dominios de éstos tan «feos», ¿dónde está soportada la medida armónica? Es dedir, la frontera puede tener dimensión mayor que uno, pero ¿estará la medida armónica soportada en toda la frontera o sólo en una parte?, ¿qué dimensión tendrá la medida armónica? Para ello hay que explicar qué se entiende por dimensión de la medida armónica. Decimos que la medida armónica $\omega_{Z_0,D}$ tiene dimensión d si existe un conjunto $A \subset \Gamma = \partial D$ de dimensión d que soporta toda la medida, es decir que $\omega_{Z_0,D}(A)=1$, con lo cual en el resto vale cero. Además, si este d es el más pequeño que se puede elegir: no puede hacerse lo mismo con otro $d' < d$.

Por ejemplo, en el caso de un dominio de Lipschitz o de un dominio con una curva rectificable, ya hemos visto que la medida armónica es equivalente a la longitud de arco y entonces el conjunto soporte puede ser toda la curva sin más, y ésta tiene dimensión uno. Por consiguiente, en el conjunto de los dominios de Lipschitz o en el conjunto de los dominios cuya frontera es una curva rectificable la dimensión de la medida de Hausdorff es uno.

El Teorema de Makarov se refiere al caso en que D es un dominio simplemente conexo cualquiera (por ejemplo, el copo de nieve), y la frontera puede tener cualquier dimensión de Hausdorff. Se pueden construir ejemplos a medida, con la dimensión que uno quiera. Si uno dice «yo quiero dimensión 5/3», uno construye un ejemplo de un dominio cuya frontera tiene dimensión 5/3, hay para todos los gustos. Pues bien, incluso en estas condiciones tan generales, la dimensión de la medida armónica siempre es uno. En resumen,

<u>Teorema de Makarov (1985):</u> Sea D simplemente conexo, $\Gamma = \partial D$ y $z_0 \in D$. Entonces, $\dim \omega_{Z_0,D} = 1$.

Este es un teorema notable que asegura que, a pesar de que la frontera puede ser mucho mayor, la medida armónica siempre está soportada en un conjunto de dimensión de Hausdorff uno. Luego, la medida de Hausdorff de ese soporte de la medida puede ser finita o no, pero es de dimensión uno.

Y esto, ¿cómo se interpreta en términos del movimiento browniano? Esto quiere decir que realmente, en términos de la teoría geométrica de la medida, la medida armónica está concentrada en un conjunto relativamente pequeño. Es como si dijésemos que un conjunto del plano que tenga longitud, que tenga dimensión de Hausdorff uno, es un conjunto pequeño dentro del plano. Aquí no estamos en el plano porque la dimensión no es dos, pero en un espacio de dimensión log4/log3 algo que tenga dimensión uno es una cosa muy pequeña, algo parecido a un segmento dentro de un cuadrado. De manera que el conjunto en que la medida está soportada es pequeño. Y eso ¿por qué?, ¿cómo se puede explicar en términos del movimiento browniano? Hay una cantidad enorme de frontera, que es la que da toda la dimensión, que está perdida por aquellos recovecos del copo de nive y que es muy difícilmente accesible, el movimiento browniano casi nunca llega a ellos. Donde llega de verdad es a los puntos «buenos», a los puntos que están medianamente accesibles. Y esos puntos a los cuales el movimiento browniano llega con una cierta probabilidad positiva tienen dimensión de Hausdorff uno. Esta es la interpretación.

En resumen, si Γ por ejemplo es la curva de von Koch, la medida armónica tiene soporte en A, que es un conjunto despreciable desde el punto de vista de la medida geométrica, despreciable porque tiene dimesión inferior a la del conjunto total. Pero el conjunto $\Gamma - A$, aunque grande, es difícilmente accesible para un viajero browniano que empiece en el punto z_0.

Habría que decir quizá que este teorema de hecho ha sido ligeramente extendido: no sólo vale para dominios simplemente conexos sino prácticamente para cualquier dominio del plano. En particular para cualquier dominio acotado del plano, aunque no sea simplemente conexo. Pero esa es una extensión que ya no es debida a Makarov.

Por otra parte, los problemas correspondientes a este Teorema de Makarov en dimensión superior están abiertos. El Teorema de Dahlberg y el Teorema de Calderón son teoremas n-dimensionales; los he enunciado en el plano por sencillez pero los métodos dan lo mismo en todas las dimensiones. Pero aquí el caso n=2 es especialmente sencillo, de manera que lo que pasa con la medida armónica en dimensión superior es un problema abierto. Por ejemplo, hay una conjetura antigua de Oksendal que dice que la medida armónica debe ser de dimensión n−1, porque n−1 es lo que resulta en los casos sencillos, claro. Si tenemos una hipersuperficie en R^n, cuando la frontera es muy buena, es de clase C^2, etc., eso es lo que ocurre. La conjetura de momento no se ha podido establecer en ningún sentido, y es un problema bastante duro.

PUBLICACIONES DE JOSE L. RUBIO DE FRANCIA

1) «Un criterio de aproximación en $L^1(R)$». Actas I Jorn. Mat. Luso-Españolas (Lisboa, 1972), 197-202, Inst. «Jorge Juan», Madrid 1973.

2) «Sobre integración en grupos clásicos y abstractos y aplicaciones al Análisis de Fourier». (Tesis Doctoral) Zaragoza, 1974.

3) «Notas sobre conjuntos espectrales y factorización de ideales». Actas II Jorn. Mat. Hisp.-Lusas (Madrid, 1973), 211-222, C.S.I.C., Madrid 1977.

4) (con F. Marcellán) «Funcionales continuos para la convergencia en medida». Actas II Jorn. Mat. Hisp.-Lusas (Madrid, 1973), 140-162, C.S.I.C., Madrid 1977.

5) «Nets of subgroups in locally compact groups». Comment. Math. Prace Matematyczne 20 (1978), 453-466.

6) «Análisis de Fourier de funciones vectoriales». Seminario «Análisis de Fourier y Ecuaciones en Derivadas Parciales», Segovia (1978), 44-65.

7) «Convergencia casi segura de operadores definidos sobre funciones vectoriales». Actas V Reunión G.M.E.L. (Palma de Mallorca), (1978), 409-412.

8) «On the convergence of double Fourier series». Bull. Acad. Pol. Sci. 27 (5), (1979), 349-354.

9) «El espacio de la convergencia en medida y su dual». Rev. Acad. Ci. Madrid 74 (2), (1980), 267-282.

10) «Vector-valued inequalities for Fourier series». Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980), 525-528.

11) «Continuity and pointwise convergence of operators in vector-valued L^p-spaces». Boll. Un. Mat. Ital. (5) 17-B (1980), 650-660.

12) «Vector valued inequalities for operators in L^p spaces». Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 211-215.

13) «Convergencia de las series de Fourier de infinitas variables». Publ. Sec. Mat. U.A.B. 21 (1980), 237-242.

14) «Boundedness of maximal functions and singular integrals in weighted L^p spaces». Proc. A.M.S. 83 (1981), 673-679.

15) «Contribuciones al Análisis Funcional no-Standard II». Rev. Mat. Hisp. Amer. 41 (1-2), (1981), 31-44.

16) «La investigación actual en Análisis Armónico». Universidad, 1 (2. época), Univ. Zaragoza, 1981.

17) «Sobre inversión de la transformada de Fourier». Actas III Jorn. Mat. Hisp.-Lusas (Sevilla, 1974), vol I, 170-176, Sevilla 1982.

18) «Contribuciones al Análisis Funcional no-Standard I». Actas IV Jorn. Mat. Hisp.-Lusas, (Aveiro, 1978), 163-178, Aveiro 1982.

19) «Weighted norm inequalities and vector valued inequalities». En «Harmonic Analysis (Proceedings Minneapolis 1981)», 86-101. Lecture Notes in Math. 908, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

20) (con J.J. Guadalupe) «Some problems arising from prediction theory and a theorem of Kolmogorov». Collect. Math. 33 (1982), 249-257.

21) «Factorization and extrapolation of weights». Bull. A.M.S. 7 (1982), 393-395.

22) «Weighted norm inequalities for homogeneous families of operators». Transactions A.M.S. 275 (1983), 781-790.

23) (con J.L. Torrea) «Vector extensions of operators in L^p spaces». Pacific J. Math. 105 (1983), 227-235.

24) (con F. Ruiz y J.L. Torrea) «Les opérateurs de Calderón-Zygmund vectoriels» C.R. Acad. Sci. París, Ser. I, 297 (1983), 477-480.

25) (con R. Coifman y P. Jones) «Constructive decompositions of BMO functions and factorization of A_p weights». Proc. A.M.S. 87 (1983), 675-676.

26) «Estimates for some square functions of Littlewood-Paley type». Pub. Mat. U.A.B. 27 (1983), 81-108.

27) «A new technique in the theory of A_p weights». En «Topics in Modern Harmonic Analysis» (Turin-Milán, 1982), 571-579, Ist. F. Severi, Roma, 1983.

28) «La verdad en las Matemáticas». Actas III J.A.E.M. (Zaragoza, 1983), 35-51, I.C.E. Univ. Zaragoza, 1984.

29) «Factorization theory and A_p weights». Amer. J. Math. 106 (1984), 533-547.

30) «Sobre sumas parciales de series de Fourier». En «Contribuciones Matemáticas en honor de Luis Vigil», Zaragoza (1984), 257-268.

31) (con J. Duoandikoetxea) «Estimations indépendantes de la dimension pour les transformées de Riesz» C.R. Acad. Sc. París, Ser. I, 300 (1985), 193-196.

32) «Some maximal inequalities». En «Recent Progress in Fourier Analysis», 203-214, Mathematics Studies 111, North-Holland, 1985.

33) «Fourier series and Hilbert transforms with values in UMD Banach spaces». Studia Math. 81 (1985), 95-105.

34) «A Littlewood-Paley inequality for arbitrary intervals». Rev. Mat. Iberoamericana 1 (2), 1985, 1-14.

35) «Acotación de operadores en retículos de Banach y desigualdades con peso». Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid 18 (1985), 59 pp.

36) (con J. García-Cuerva) «Weighted norm inequalities and related topics». Mathematics Studies 116, North-Holland, 1985, x+604 pp.

37) (con F. Ruiz y J.L. Torrea) «Calderón-Zygmund theory for operator valued kernels». Advances in Math. 62 (1986), 7-48.

38) (con J. Duoandikoetxea) «Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates». Inventiones Math. 84 (1986), 541-561.

39) (con H. Carlsson, M. Christ y otros) «L^P estimates for maximal functions and Hilbert transforms along flat convex curves». Bull. Amer. Math. Soc. 14 (1986), 263-267.

40) (con M. Christ y J. Duoandikoetxea) «Maximal operators related to the Radon transform and the Calderón-Zygmund method of rotation». Duke Math. J. 53 (1986), 189-209.

41) «Maximal functions and Fourier transforms». Duke Math. J. 53 (1986), 395-404.

42) «Martingale and integral transforms of Banach space valued functions». En «Probability and Banach spaces», 195-222, Lecture Notes in Math. 1221. Springer-Verlag. 1986.

43) (con A. Córdoba) «Estimates for Wainger's singular integrals along curves». Rev. Mat. Iberoamericana 2 (1-2), (1986), 105-117.

44) «Linear operators in Banach Iattices and weighted L inequalities». Math. Nachr. 133 (1987), 197-209.

45) (con R. Coifman y S. Semmes) «Multiplicateurs de Fourier de $L^P(R)$ et estimations quadratiques». C. R. Acad. Sc. París. Ser. I, 306, (1988), 351-354.

46) «El Problema de Dirichlet y la medida armónica» (Curso de Metodología de Historia de la Ciencia. Logroño, 1986). Por aparecer en Rev. Inst. Est. Riojanos, 1990.

47) (con J.L. Torrea) «Some Banach techniques in vector valued Fourier Analysis». Colloquium Math. (por aparecer).

48) (con M. Christ) «Weak type (1,1) bounds for rough operators, II». (1987), Invent. Math., (por aparecer).

49) (con A. Carbury y L. Vega) «Almost everywhere summability of Fourier integrals». (1987), J. London Math. Soc., (por aparecer).

50) «Transference principles for radial multipliers». (1987), Duke Math. J., (por aparecer).

ZUBÍA

30

00030
9 771131 542004

Gobierno de La Rioja
www.larioja.org

Instituto
de Estudios
Riojanos