Lecturas Matemáticas
Volumen **39** (1) (2018), páginas 13-24
ISSN 0120-1980

Representaciones hipergeométricas de algunos polinomios modificados o de tipo Sobolev

Hypergeometric representations of some modified polynomials or of Sobolev type

Anier Soria Lorente, Alicia María Centurión Fajardo, Eduardo R. Moreno Roque y Ricardo Serrano Vargas

Universidad de Granma, Cuba

Resumen. En este trabajo mostramos la representación hipergeométrica de algunos polinomios modificados y otros de tipo Sobolev. Finalmente, encontramos la representación hipergeométrica de los polinomios de Laguerre de tipo Sobolev.

***Palabras clave*:** Polinomios ortogonales clásicos, representación hipergeométrica, fórmula de conexión.

Abstract. In this work we show the hypergeometric representation of some modified orthogonal polynomials and another of Sobolev type. Finally, we find the hypergeometric representation of the Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials.

***Key words*:** Orthogonal polynomials, hypergeometric representation, connection formula.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 33C20; Secondary 33C45, Third 33C47.

1. Introducción

Actualmente, es conocido que un elevado número de problemas de la Matemática-Física e Ingeniería están vinculados con la ecuación diferencial [21]

$$\tilde{\sigma}(x) y'' + \tilde{\tau}(x) y' + \lambda y = 0, \tag{1}$$

donde λ es una constante y $\tilde{\sigma}(x)$ y $\tilde{\tau}(x)$ son polinomios de grados a lo más 2 y 1, respectivamente. Entre las soluciones de la ecuación (1) se encuentran los polinomios ortogonales clásicos de Hermite H_n, Laguerre $L_n^\alpha(x)$ y Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, los cuales se pueden definir mediante su representación hipergeométrica como sigue:

$$H_{2n}(x) \equiv (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n {}_1F_1\left(\begin{array}{c} -n \\ \frac{1}{2} \end{array} \middle| \, x^2 \right),$$

$$H_{2n+1}(x) \equiv (-1)^n x \left(\frac{3}{2}\right)^n {}_1F_1\left(\begin{array}{c} -n \\ \frac{3}{2} \end{array} \middle| \, x^2 \right),$$

$$L_n^\alpha(x) \equiv \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} {}_1F_1\left(\begin{array}{c} -n \\ \alpha+1 \end{array} \middle| \, x \right), \quad \alpha > -1, \tag{2}$$

y

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) \equiv \frac{2^n (\alpha+1)_n}{(n+\alpha+\beta+1)_n} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{array} \middle| \, \frac{1-x}{2} \right), \quad \alpha, \beta > -1,$$

respectivamente, donde ${}_rF_s$ denota la serie hipergeométrica ordinaria [16, 18, 21] definida mediante

$${}_rF_s\left(\begin{array}{c} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{array} \middle| \, z \right) \equiv \sum_{k \geq 0} \frac{(a_1)_k \cdots (a_r)_k}{(b_1)_k \cdots (b_s)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{3}$$

siendo

$$\begin{aligned} (z)_k &\equiv \prod_{0 \leq j \leq k-1} (z+j), \quad k \geq 1, \\ (z)_0 &= 1, \quad (1)_k = k!, \end{aligned}$$

el símbolo de Pochhammer $(\cdot)_k$, también llamado en inglés "shifted factorial" [22]. Además, en (3), $\{a_i\}_{i=1}^r$ y $\{b_j\}_{j=1}^s$ son números complejos sujetos a la condición que $b_j \neq -n$ con $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ para $j = 1, 2, \ldots, s$.

Dentro del marco de los polinomios ortogonales clásicos, existen conjuntos de polinomios que surgen al discretizar la ecuación (1) considerando una red uniforme, aproximando las derivadas de primer y segundo orden adecuadamente, obteniéndose de este modo la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$\sigma(x) \Delta\nabla y(x) + \tau(x) \Delta y + \lambda y(x) = 0,$$

donde $\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) - \tilde{\tau}(x)/2$, $\tau(x) = \tilde{\tau}(x)$ y Δ y ∇ son los operadores *forward* $(\Delta f(x) = f(x+1) + f(x))$ y *backward* $(\nabla f(x) = f(x) + f(x-1))$, respectivamente. A la ecuación anterior se le denomina *ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico* y entre sus soluciones se tienen los conocidos polinomios ortogonales clásicos de variable discreta, los polinomios de Charlier $C_n^{\mu}(x)$, Meixner $M_n^{\gamma,\mu}(x)$, Kravchouk $K_n^{p,N}(x)$, y Hahn $h_n^{\alpha,\beta,N}(x)$, definidos en [3, 23] mediante

$$C_n^{\mu}(x) \equiv (-\mu)^n \; {}_2F_0\left(\begin{array}{c} -n, -x \\ \\ - \end{array} \middle| \, -\mu^{-1} \right), \quad \mu > 0, \tag{4}$$

$$M_n^{\gamma,\mu}(x) \equiv \frac{(\gamma)_n \, \mu^n}{(\mu - 1)^n} \, {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, -x \\ \\ \gamma \end{array} \middle| \, 1 - \mu^{-1} \right), \quad \gamma > 0, \quad 0 < \mu < 1, \tag{5}$$

$$K_n^{p,N}(x) \equiv \frac{(-p)^n \, N!}{(N - n)!} \, {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, -x \\ \\ -N \end{array} \middle| \, p^{-1} \right), \quad 0 < p < 1, \quad n \leq N - 1, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} h_n^{\alpha,\beta,N}(x) \quad &\equiv \quad \frac{(1 - N)_n \, (\beta + 1)_n}{(\alpha + \beta + n + 1)_n} \, {}_3F_2\left(\begin{array}{c} -x, \alpha + \beta + n + 1, -n \\ \\ 1 - N, \beta + 1 \end{array} \middle| \, 1 \right), \\ \alpha, \beta \quad &\geq \quad -1, \quad n \leq N - 1, \end{aligned} \tag{7}$$

respectivamente.

El propósito de este trabajo es mostrar la representación hipergeométrica de algunos polinomios modificados y otros de tipo Sobolev, resultados alcanzados por otros autores. Además, se expondrá un método ya desarrollado por Álvarez Nodarse y Francisco Marcellán en [1] para conseguir la representación hipergeométrica de los polinomios de Laguerre de tipo Sobolev conseguidos en [7] y [11].

2. Representaciones Hipergeométricas

En esta sección se van a presentar algunos resultados propuestos por algunos autores. Además, se desarrollará una demostración para obtener la representación hipergeométrica de los polinomios de Laguerre de tipo Sobolev, conseguidos en [7] y [11], teniendo en cuenta una fórmula de conexión similar a la utilizada por Bavinck en [6, eq. (2.13)] así como el método desarrollado por Álvarez Nodarse y Francisco Marcellán en [1].

2.1. Polinomios ortogonales discretos modificados y de tipo Sobolev

Del artículo [2], se conoce que los autores consideraron los polinomios ortogonales modificados de tipo Charlier $C_n^{\mu,\lambda}(x)$, de tipo Meixner $M_n^{\gamma,\mu,\lambda}(x)$ y de tipo Kravchouk $K_n^{p,N,\lambda}(x)$, los cuales son ortogonales con respecto al funcional lineal $\mathscr{U}$ sobre el espacio lineal de los polinomios con coeficientes reales, definido mediante

$$\langle \mathscr{U}, P \rangle \equiv \langle \mathscr{L}, P \rangle + \lambda P(0), \quad x \in \mathbb{N}, \quad \lambda \geq 0,$$

donde $\mathscr{L}$ es un funcional de momentos clásico asociado a los polinomios ortogonales discretos definidos en (4)-(6). Ellos demostraron que éstos polinomios se pueden escribir mediante su representación hipergeométrica como sigue,

$$C_n^{\mu,\lambda}(x) \equiv (-\mu)^n \, {}_3F_1 \left(\begin{array}{c} -n, -x, 1 + xA_n^{-1} \\ \\ xA_n^{-1} \end{array} \middle| \, -\mu^{-1} \right),$$

$$M_n^{\gamma,\mu,\lambda}(x) \equiv \frac{(\gamma)_n \, \mu^n}{(\mu-1)^n} \, {}_3F_2 \left(\begin{array}{c} -n, -x, 1 + xB_n^{-1} \\ \\ \gamma, xB_n^{-1} \end{array} \middle| \, 1-\mu^{-1} \right),$$

y

$$K_n^{p,N,\lambda}(x) \equiv \frac{(-p)^n N!}{(N-n)!} \, {}_3F_2 \left(\begin{array}{c} -n, -x, 1 + xD_n^{-1} \\ \\ -N, xD_n^{-1} \end{array} \middle| \, p^{-1} \right),$$

respectivamente, donde

$$A_n = \lambda \frac{\mu^n}{n! \left(1 + \lambda \mathrm{Ker}_{n-1}^C(0,0)\right)},$$

$$B_n = \lambda \frac{\mu^n (1-\mu)^{\gamma-1} (\gamma)_n}{n! \left(1 + \lambda \mathrm{Ker}_{n-1}^M(0,0)\right)},$$

y

$$D_n = \lambda \frac{N!}{(N-n)!} \frac{p^n (1-p)^{1-n}}{n! \left(1 + \lambda \mathrm{Ker}_{n-1}^K(0,0)\right)},$$

siendo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}_{n-1}^C(x,0) &= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \nabla C_n^{\mu}(x), \\
\mathrm{Ker}_{n-1}^M(x,0) &= \frac{(-1)^{n-1}(1-\mu)^{n+\gamma-1}}{n!} \nabla M_n^{\gamma,\mu}(x), \\
\mathrm{Ker}_{n-1}^k(x,0) &= \frac{(1-p)^{1-n}}{n!} \nabla K_n^{p,N}(x).
\end{aligned}$$

Por otro lado, los autores en [4], consideraron los polinomios ortogonales de tipo Hahn

$$\begin{aligned}
h_n^{\alpha,\beta,N,\lambda,\rho}(x) &\equiv \frac{(-1)^n (N-1)! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) \Gamma(\beta+1)}{(N-n-1)! \Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} \\
&\times \, {}_5F_4 \left(\begin{array}{c} -n, -x, \alpha+\beta+n, \gamma_0+1, \gamma_1+1 \\ \\ 1-N, \beta+1, \gamma_0, \gamma_1 \end{array} \middle| \, 1 \right), \ \gamma_n \text{ definido en [4, eq. 8]},
\end{aligned}$$

ortogonales con respecto al funcional lineal $\mathscr{U}$ soportado sobre el intervalo $[0, N)$, definido mediante

$$\langle \mathscr{U}, PQ \rangle \equiv \langle \mathscr{H}, PQ \rangle + \lambda P(0) Q(0) + \rho P(N-1) Q(N-1), \quad x \in \mathbb{N}, \quad \lambda, \rho \geq 0,$$

donde $\mathscr{H}$ es un funcional de momentos clásico asociado con (7), definido como

$$\langle \mathscr{H}, PQ\rangle \equiv \sum_{0\leq x\leq N-1} P(x)\,Q(x)\,\frac{\Gamma(\alpha+N-x)\,\Gamma(\beta+1+x)}{\Gamma(N-x)\,\Gamma(1+x)}, \quad \alpha,\beta>-1.$$

Recientemente, en [14] los autores consideraron la sucesión $\{Q_n^\lambda\}_{n\geq 0}$ de polinomios ortogonales con respecto al siguiente producto interno sobre $\mathbb{P}$

$$\langle p,q\rangle_\lambda = \int_0^\infty p(x)\,q(x)\,d\psi^{(a)}(x) + \lambda\,\Delta p(c)\Delta q(c),$$

donde $\lambda\in\mathbb{R}_+$ y $\psi^{(a)}$ con $a>0$, es la bien conocida *distribución de Poisson* de la teoría de probabilidad

$$d\psi^{(a)}(x) = \frac{e^{-a}a^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots,$$

Entre los resultados obtenidos en esta contribución científica, los autores consiguieron la representación hipergeométrica de los polinomios $Q_n^\lambda(x)$, ver [14, eq. 21].

2.2. Polinomios ortogonales continuos de tipo Sobolev

Hoy en día existen muchos resultados vinculados a estos tipos de polinomios, entre los que destacan, los que a continuación se presentan.

En [5] los autores determinaron la ecuación diferencial de segundo orden de los polinomios

$$\begin{aligned} P_n^{\alpha,\beta,A_1,B_1,A_2,B_2}(x) &\equiv \frac{2^{n-3}(\alpha+3)_{n-3}\,\pi_4(0)}{(n+\alpha+\beta+1)_n} \\ &\times\ {}_6F_5\left(\begin{array}{c} -n, n+\alpha+\beta+1, \beta_0+1, \beta_1+1, \beta_2+1, \beta_3+1 \\ \alpha+3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \end{array}\middle|\, \frac{1-x}{2}\right), \end{aligned}$$

ortogonales con respecto al producto interno

$$\begin{aligned}\langle p,q\rangle \equiv \int_{-1}^1 p(x)\,q(x)\,(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx + A_1 p(1)\,q(1) \\ + B_1 p(-1)\,q(-1) + A_2 p'(1)\,q'(1) + B_1 p'(-1)\,q'(-1),\end{aligned}$$

donde $\pi_4(0) = \nu_n\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3$, ν_n está dado en [5, eq. 50] y los coeficientes $-\beta_0$, $-\beta_1$, $-\beta_2$ y $-\beta_3$ son los ceros de un polinomio de cuarto grado en k, ver [5, eq. 49].

Por otro lado, en [11], los autores estudiaron las propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales de Laguerre de tipo Sobolev definidos mediante

$$L_n^{\alpha,\gamma,N}(x) \equiv L_n^\alpha(x) - N\frac{(L_n^\alpha)'(\gamma)}{1+N\mathscr{K}_{n-1}^{(1,1)}(\gamma,\gamma)}\mathscr{K}_{n-1}^{(0,1)}(x,\gamma). \tag{8}$$

Aquí $\alpha > -1$, $\gamma \in \mathbb{R}_{-}$, $N \in \mathbb{R}_{+}$ y

$$\mathscr{K}_{n-1}^{(i,j)}(x,y) \equiv \frac{\partial^{k+j} K_n(x,y)}{\partial x^k \partial y^j}, \quad \text{[11, eq. 12]},$$

donde

$$K_n(x,y) \equiv \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{P_k(x) P_k(y)}{\|P_k\|^2},$$

denota el n-ésimo polinomio kernel. En este caso en particular $P_n(x) = L_n^{\alpha}(x)$.

A continuación escribiremos estos polinomios en su representación hipergeométrica.

Proposición 1. *Sean $\alpha > -1$, $\gamma \in \mathbb{R}_{-}$, y $N \in \mathbb{R}_{+}$. Entonces, los polinomios ortogonales de Laguerre de tipo Sobolev (8) se pueden escribir mediante la siguiente representación hipergeométrica*

$$L_n^{\alpha,\gamma,N}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{B_n^{\alpha,\gamma,N}(x)\left(\Xi^{\alpha,\gamma,N}(x)-1\right)}{n(n+\alpha)} \times {}_2F_2\left(\left.\begin{array}{c} -n, \Xi^{\alpha,\gamma,N}(x) \\ \\ \alpha+1, \Xi^{\alpha,\gamma,N}(x)-1 \end{array}\right| x\right), \quad (9)$$

donde

$$\Xi^{\alpha,\gamma,N}(x) = \frac{n(n+\alpha) A_n^{\alpha,\gamma,N}(x)}{B_n^{\alpha,\gamma,N}(x)} - n + 1, \quad (10)$$

y $A_n^{\alpha,\gamma,N}(x)$ y $B_n^{\alpha,\gamma,N}(x)$ están definidos en (12)-(13), respectivamente.

Demostración. En efecto, a partir de (8) y

$$\mathscr{K}_{n-1}^{(0,1)}(x,\gamma) = \frac{1}{\left\|L_{n-1}^{\alpha}\right\|^2}\Big[\frac{L_n^{\alpha}(x) L_{n-1}^{\alpha}(\alpha) - L_{n-1}^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(\alpha)}{(x-\alpha)^2} \frac{L_n^{\alpha}(x)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(\alpha) - L_{n-1}^{\alpha}(x)\left(L_n^{\alpha}\right)'(\alpha)}{(x-\alpha)^2}\Big], \quad \text{(ver [11, eq. 27])},$$

deducimos la siguiente fórmula de conexión

$$L_n^{\alpha,\gamma,N}(x) = A_n^{\alpha,\gamma,N}(x) L_n^{\alpha}(x) + B_n^{\alpha,\gamma,N}(x) L_{n-1}^{\alpha}(x), \quad (11)$$

donde

$$A_n^{\alpha,\gamma,N}(x) = 1 - N \frac{\left(L_n^{\alpha}\right)'(\gamma)}{1 + N\mathscr{K}_{n-1}^{(1,1)}(\gamma,\gamma)} \frac{L_{n-1}^{\alpha}(\gamma) + (x-\gamma)\left(L_{n-1}^{\alpha}\right)'(\gamma)}{\left\|L_{n-1}^{\alpha}\right\|^2 (x-\gamma)^2}, \quad (12)$$

y

$$B_n^{\alpha,\gamma,N}(x) = N \frac{\left(L_n^{\alpha}\right)'(\gamma)}{1 + N\mathscr{K}_{n-1}^{(1,1)}(\gamma,\gamma)} \frac{L_n^{\alpha}(\gamma) + (x-\gamma)\left(L_n^{\alpha}\right)'(\gamma)}{\left\|L_{n-1}^{\alpha}\right\|^2 (x-\gamma)^2}, \quad (13)$$

siendo $\|L_n^\alpha\|^2 = n!\Gamma(n+\alpha+1)$, para $n \in \mathbb{N}$, ver [12, eq. 8]. Luego, teniendo en cuenta (11) y (2) así como

$$(-x)_k = 0, \quad \text{si} \quad x < k,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha,\gamma,N}(x) &= \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} A_n^{\alpha,\gamma,N}(x) \sum_{0\le k\le n} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1}\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} B_n^{\alpha,\gamma,N}(x) \sum_{0\le k\le n-1} \frac{(1-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la identidad

$$(1-n)_k = \frac{n-k}{n}(-n)_k,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha,\gamma,N}(x) &= \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} A_n^{\alpha,\gamma,N}(x) \sum_{0\le k\le n} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!} \\ &\quad + \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{n(n+\alpha)\Gamma(\alpha+1)} B_n^{\alpha,\gamma,N}(x) \sum_{0\le k\le n} \frac{(k-n)(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!}, \end{aligned}$$

de donde conseguimos

$$L_n^{\alpha,\gamma,N}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{0\le k\le n} \Theta^{\alpha,\gamma,N}(x) \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!},$$

siendo

$$\Theta^{\alpha,\gamma,N}(x) = \frac{B_n^{\alpha,\gamma,N}(x)}{n(n+\alpha)} \left(\Xi^{\alpha,\gamma,N}(x) + k - 1\right),$$

donde $\Xi^{\alpha,\gamma,N}(x)$ está dada en (10). Luego, realizando ciertos cálculos deducimos

$$\Theta^{\alpha,\gamma,N}(x) = \frac{B_n^{\alpha,\gamma,N}(x)\left(\Xi^{\alpha,\gamma,N}(x) - 1\right)}{n(n+\alpha)} \frac{\left(\Xi^{\alpha,\gamma,N}(x)\right)_k}{\left(\Xi^{\alpha,\gamma,N}(x) - 1\right)_k}.$$

Como consecuencia, tenemos

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha,\gamma,N}(x) &= \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{B_n^{\alpha,\gamma,N}(x)\left(\Xi^{\alpha,\gamma,N}(x) - 1\right)}{n(n+\alpha)} \\ &\quad \times \sum_{0\le k\le n} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{\left(\Xi^{\alpha,\gamma,N}(x)\right)_k}{\left(\Xi^{\alpha,\gamma,N}(x) - 1\right)_k} \frac{x^k}{k!}, \end{aligned}$$

lo cual coincide con (9). $\square$

Además de este resultado, en [12] los autores analizaron algunas propiedades de los polinomios ortogonales con respecto a un producto interno de tipo Sobolev correspondiente al caso general diagonal de los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev y obtuvieron una representación hipergeométrica de tales polinomios, ver [12, Teorema 8].

Por otro lado, en [7] los autores consideraron la sucesión de polinomios de Laguerre de tipo Sobolev $\left\{L_n^{\alpha,M,N}(x)\right\}_{n\geq 0}$, los cuales son ortogonales con respecto al producto interno

$$\langle p,q\rangle \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty p(x)\,q(x)\,x^\alpha e^{-x}dx + Mp(0)\,q(0)+Np'(0)\,q'(0)\,.$$

No obstante, fue en [17] que los autores del mismo obtuvieron la siguiente representación

$$L_n^{\alpha,M,N}(x) = A_n^{(M,N)}\tilde{L}_n^\alpha(x) + B_n^{(M,N)}\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)'(x) + C_n^{(M,N)}\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)''(x)\,, \tag{14}$$

donde

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n!}L_n^\alpha(x)\,, \tag{15}$$

y

$$\begin{aligned} A_n^{(M,N)} &= 1+M\binom{n+\alpha}{n-1}+\frac{n(\alpha+2)-(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+3)}N\binom{n+\alpha}{n-2} \\ &\qquad + \frac{MN}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\binom{n+\alpha}{n-1}\binom{n+\alpha+1}{n-2}, \\ B_n^{(M,N)} &= M\binom{n+\alpha}{n}+\frac{n-1}{\alpha+1}N\binom{n+\alpha}{n-1}+\frac{2MN}{(\alpha+1)^2}\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\alpha+1}{n-2}, \\ C_n^{(M,N)} &= \frac{N}{\alpha+1}\binom{n+\alpha}{n-1}+\frac{MN}{(\alpha+1)^2}\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\alpha+1}{n-1}. \end{aligned}$$

A continuación, teniendo en cuenta la fórmula de conexión (14) daremos el siguiente resultado.

Proposición 2. *Sean $\alpha > -1$, y $M,N \in \mathbb{R}_+$. Entonces, los polinomios ortogonales de Laguerre de tipo Sobolev* (14) *se pueden escribir mediante la siguiente representación hipergeométrica*

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha,M,N}(x) &= -\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{B_n^{\alpha,M,N}(x)\left(\Phi^{\alpha,M,N}(x)-1\right)}{n!\,(n+\alpha)} \\ &\qquad \times {}_2F_2\left(\left.\begin{array}{c} -n,\Phi^{\alpha,M,N}(x) \\ \\ \alpha+1,\Phi^{\alpha,M,N}(x)-1 \end{array}\right| x\right), \end{aligned} \tag{16}$$

donde

$$\Phi^{\alpha,M,N}(x) = -\frac{(n+\alpha)\,A_n^{\alpha,M,N}(x)}{B_n^{\alpha,M,N}(x)}-n+1,$$

y $A_n^{\alpha,M,N}(x)$ y $B_n^{\alpha,M,N}(x)$ están definidos en (19)-(20), respectivamente.

Demostración. En efecto, haciendo uso de la siguiente relación

$$x\left(\tilde{L}_n^{\alpha}\right)'(x)=n\tilde{L}_n^{\alpha}(x)-(n+\alpha)\,\tilde{L}_{n-1}^{\alpha}(x), \tag{17}$$

así como de la ecuación diferencial de segundo orden

$$x\left(\tilde{L}_n^{\alpha}\right)''(x)+(\alpha+1-x)\left(\tilde{L}_n^{\alpha}\right)'(x)+n\tilde{L}_n^{\alpha}(x)=0, \tag{18}$$

deducimos

$$L_n^{\alpha,M,N}(x)=A_n^{\alpha,M,N}(x)\,\tilde{L}_n^{\alpha}(x)+B_n^{\alpha,M,N}(x)\,\tilde{L}_{n-1}^{\alpha}(x),$$

donde

$$A_n^{\alpha,M,N}(x)=A_n^{(M,N)}+\frac{n}{x}\left(B_n^{(M,N)}+\frac{x-\alpha-1}{x}C_n^{(M,N)}-C_n^{(M,N)}\right), \tag{19}$$

y

$$B_n^{\alpha,M,N}(x)=-\frac{n+\alpha}{x}\left(B_n^{(M,N)}+\frac{x-\alpha-1}{x}C_n^{(M,N)}\right). \tag{20}$$

Luego, procediendo de forma análoga a la demostración anterior arribamos al resultado (16). □

Los autores de [8] consideraron una fórmula de conexión similar a (14) para unos polinomios Jacobi de tipo Sobolev, ver [8, eq. 1.4]. Además, los autores de [13] consideraron una fórmula de conexión similar a (11) para unos polinomios Laguerre de tipo Sobolev, ver [13, eq. 28]. Por tanto, siguiendo un procedimiento similar a lo expuesto anteriormente, se puede llegar sin problema alguno a la representación hipergeométrica de estos polinomios, lo cual dejamos al lector interesado.

Conclusiones

En este artículo se ha mostrado que la fórmula de conexión del tipo (11) es útil para determinar la representación hipergeométrica del algunos polinomios de tipo Sobolev. Además, fórmulas de conexión del tipo (14) se pueden representar sin problema alguno como (11), tan sólo con tener en cuenta relaciones de la forma (17)-(18), según el caso en que se trabaja.

Existen otros artículos donde se determina la representación hipergemétrica de polinomios ortogonales modificados y de tipo Sobolev, para más detalles consultar [5, 10], así como otros trabajos donde no aparecen, por citar [6, 9, 11, 15, 19, 20]. Lo presentado en este trabajo, es normalmente analizado y desarrollado por los investigadores que se dedican al estudio de los polinomios ortogonales, donde aún queda mucho por investigar.

Los autores de este trabajo, deseamos que lo presentado en este artículo sea de gran provecho para futuras investigaciones, así como de gran utilidad desde el punto de vista didáctico-docente.

Agradecimientos

Los autores expresan sus más sinceros agradecimientos a los árbitros por sus valoradas sugerencias, al proyecto ClaveMat, financiado por la unión Europea, www.clavemat.com y a la Universidad de Granma donde el artículo fue escrito.

Referencias

[1] R. Álvarez-Nodarse & F. Marcellán, *Difference equation for modifications of Meixner polynomials*, J. Math. Anal. Appl., **194** (1995), 250-258.

[2] R. Álvarez-Nodarse, A.G. García & F. Marcellán, *On the properties for modifications of classical orthogonal polynomials of discrete variables*, J. Comput. Appl. Math., **65** (1995), 3-18.

[3] R. Álvarez-Nodarse, *Polinomios hipergeomé tricos y q-polinomios*, Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, No. 26, Zaragoza, 2003.

[4] R. Álvarez-Nodarse & F. Marcellán, *The modifications of classical Hahn polynomials of a discrete variable*, Integral Transform. Spec. Funct., **3** (2007), 243-262.

[5] J. Arvesú, R. Álvarez-Nodarse, F. Marcellán & K. Pan, *Jacobi-Sobolev-type orthogonal polynomials: Second-order differential equation and zeros*, J. Comput. Appl. Math., **90** (1998), 135-156.

[6] H. Bavinck, *On polynomials orthogonal with respect to an inner product involving differences*, J. Comp. Appl. Math., **57** (1995), 17-27.

[7] K. Dimitrov, F. Marcellán & F. Rafaeli, *Monotonicity of zeros of Laguerre - Sobolev-type orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl., **368** (2010), 80-89.

[8] K. Dimitrov, V. Mello & F. Rafaeli, *Monotonicity of zeros of Jacobi - Sobolev type orthogonal polynomials*, Appl. Numer. Math., **60** (2010), 263-276.

[9] H. Dueñas & F. Marcellán, *The Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory, **162** (2010), 421-440.

[10] H. Dueñas, E. J. Huertas & F. Marcellán, *Analytic properties of Laguerre-type orthogonal polynomials*, Integral Transform. Spec. Funct., **22(2)** (2011), 107-122.

[11] H. Dueñas, E. J. Huertas & F. Marcellán, *Asymptotic properties of Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials*, Numer Algor., **60** (2012), 51-73.

[12] H. Dueñas, J. C. García, L. E. Garza & A. Ramírez, *The Diagonal General Case of the Laguerre-Sobolev Type Orthogonal Polynomials*, Revista Colombiana de Matemáticas, **47(1)** (2013), 39-66.

[13] E. J. Huertas, F. Marcellán, M. Francisca & Y. Quintana, *Asymptotics for Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials modified within their oscillatory regime*, Appl. Math. Comput., **236** (2014), 260-272.

[14] E. J. Huertas & A. Soria-Lorente, *New analytic properties of nonstandard Sobolev-type Charlier orthogonal polynomials*, arXiv:1706.09474v1 [math.CA] 28 Jun 2017.

[15] A. Garrido & F. Marcellán, *An electrostatic interpretation of zeros of Hermite-type orthogonal polynomials*, Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions, **(11)** (2003), 50-63.

[16] G. Gasper & M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series* , Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[17] R. Koekoek & H.G. Meijer, *A generalization of Laguerre polynomials*, A generalization of Laguerre polynomials, **(24)** (1993), 768-782.

[18] R. Koekoek & R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Report 98-17, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1998.

[19] J. Mañas, F. Marcellán & J. Moreno, *Varying discrete Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials : Asymptotic behavior and zeros*, Appl. Math. Comput., **222** (2013), 612-618.

[20] J. Mañas, F. Marcellán & J. Moreno, *Asymptotic behavior of varying discrete Jacobi - Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math., **300** (2016), 341-353.

[21] A. F. Nikiforov & V. B. Uvarov, *Special Functions in Mathematical Physics*, Birkhauser Verlag, Basel, 1988.

[22] J. Arvesú & A. Soria-Lorente, *First order non-homogeneous q-difference equation for Stieltjes function characterizing q-orthogonal polynomials*, J. Differ. Equ. Appl.,**19(5)** (2013), 814-838.

[23] A. Soria-Lorente, E. R. Moreno-Roque & J. B. Martí -Zamora, *Classical orthogonal polynomials in a discrete variable, their history, extensions and applications*, Lect. Mat., **35(1)** (2014), 05-24.

Recibido en octubre de 2017. Aceptado para publicación en marzo de 2018.

Anier Soria Lorente
Departamento de Matemática Física
Facultad de Ciencias Informáticas Naturales y Exactas
Universidad de Granma
Bayamo, Granma
e-mail: asorial@udg.co.cu
Alicia María Centurión Fajardo
Departamento de Matemática Física
Facultad de Ciencias Informáticas Naturales y Exactas
Universidad de Granma
Bayamo, Granma
e-mail: acenturionf@udg.co.cu

EDUARDO R. MORENO ROQUE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS INFORMÁTICAS NATURALES Y EXACTAS
UNIVERSIDAD DE GRANMA
BAYAMO, GRANMA
e-mail: emorenor@udg.co.cu
RICARDO SERRANO VARGAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS INFORMÁTICAS NATURALES Y EXACTAS
UNIVERSIDAD DE GRANMA
BAYAMO, GRANMA
e-mail: rserranov@udg.co.cu