**Lecturas Matemáticas**
Volumen **38** (2) (2017), páginas 75-89
ISSN 0120-1980

# Sobre algebrización de ecuaciones diferenciales

## On the algebrization of differential equations

Primitivo Belén Acosta-Humánez[1], Norman Raúl Aya Alvarado[2] y Maximiliano Machado Higuera[3]

[1]Universidad Simón Bolívar, Colombia
[2]Universidad del Tolima, Colombia
[3]Universidad de Ibagué, Colombia

**RESUMEN.** Este trabajo está centrado en un procedimiento reciente para transformar ecuaciones diferenciales, conocido como *algebrización*. Aquí presentamos, por primera vez en castellano, un artículo con detalles y ejemplos de la *algebrización* de ecuaciones diferenciales, los cuales se pueden implementar en cursos electivos o avanzados de ecuaciones diferenciales.

***Palabras clave*:** algebrización forzosa, algebrización hamiltoniana, teoría de Galois diferencial.

**ABSTRACT.** This work delves on a recent procedure to transform differential equations, the so-called *algebrization*. We present, for the first time in a paper in Spanish, details and examples concerning the process of *algebrization* of differential equations, which can be used in elective or advanced courses of differential equations.

***Key words*:** hard algebrization, Hamiltonian algebrization, differential Galois theory.

*2010 AMS Mathematics Subject Classification. 34A05; 34A34; 34A12; 34A40*

### 1. Introducción

La *algebrización* es una parte importante de la teoría de Galois diferencial para las ecuaciones diferenciales. Esta teoría tuvo su origen en los trabajos de los matemáticos franceses CHARLES EMILE PICARD (1856 - 1941) y ERNEST VESSIOT (1865 - 1952); ver [7]. Una de las aplicaciones importantes de la teoría de Galois diferencial es la introducción de aspectos algebraicos, algorítmicos y analíticos a las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, como se puede detallar en [12]. En la actualidad, se encuentran aportes sobre la integrabilidad y no integrabilidad en sistemas hamiltonianos al igual que los grupos de Galois; ver [8, 9, 10, 11].

En este documento se hace una breve presentación de dos tipos de algebrizaciones en el marco de la teoría de Galois diferencial, con un lenguaje más accesible en relación con los textos originales, para aquellos que quieren conocer sobre el tema, pues el lenguaje utilizado en estos hace un poco díficil la interpretación y comprensión del mismo. El propósito de la algebrización es simplificar ciertas *ecuaciones diferenciales ordinarias* (EDOs) de segundo orden para su posible solución mediante métodos analíticos. En la sección 2, se introduce el *cambio de variable independiente*, el cual es la base para el proceso de algebrización ver; [1, 3, 4, 5, 6]. Aquí, además de enunciar el Teorema (Cambio de Variable Independiente), se hace una demostración en detalle, la cual no se encuentra en las referencias citadas. En la sección 3, se introduce el concepto, procedimiento y algunos ejemplos de la *algebrización forzosa* ver; [1, 4, 5]. Para la sección 4, se usa el concepto del *cambio de variable hamiltoniano* para aplicar la *algebrización hamiltoniana* a la EDO en su forma estándar o simplificada y, mediante ejemplos, se explica dicho proceso enunciado en [1, 3, 4, 5].

Ambos procesos de algebrización parten de una EDO con coeficientes de funciones no racionales, y mediante la aplicación de un cambio de variable, se transforma en otra EDO de coeficientes racionales; es decir, se hallan coeficientes que pertenecen a $\mathbb{C}$(z), de manera que al cumplir esta condición, se aplica la algebrización correspondiente. No obstante, los procesos no son iguales, debido a que para la algebrización forzosa, la función utilizada para el cambio de variable debe ser tomada de la expresión que acompaña a la variable dependiente, mientras en la algebrización hamiltoniana puede tomarse una función que hace parte o no de algún coeficiente de la EDO.

## 2. Algebrización

Este proceso tiene como objetivo realizar la transformación de una EDO con coeficientes no racionales, de la forma

$$\varphi(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

en otra EDO con coeficientes racionales

$$\varphi(z, r, r', r'', \ldots) = 0.$$

Nuestro desarrollo se basa en el teorema 1 [1, 4, 5, 6] para comprender la algebrización de algunas EDOS, las cuales deben cumplir con ciertas características específicas.

**Teorema 1 (Cambio de variable independiente).** *Sea la ecuación diferencial $\mathcal{L}_z$, con coeficientes en $\mathbb{C}(z)$ con $\mathbb{C}$ un cuerpo de constantes,*

$$\mathcal{L}_z := \partial_z^2 y + k_1(z)\partial_z y + k_2(z)y = 0, \qquad \partial_z := \frac{d}{dz} \tag{1}$$

*y $\mathbb{C}(z) \hookrightarrow L$ la correspondiente extensión de Picard - Vessiot. Además, sea $(K, \delta)$ un cuerpo diferencial y sea $z \in K$ un elemento no constante.*

*Haciendo el cambio de variable $z = z(x)$, la ecuación diferencial (1) se transforma en la siguiente ecuación diferencial:*

$$\mathcal{L}_x := \partial_x^2 r + \left(k_1(z)\,\partial_x z - \frac{\partial_x^2 z}{\partial_x z}\right)\partial_x r + k_2(z)\,(\partial_x z)^2\, r = 0, \tag{2}$$

$$\partial_x := \frac{d}{dx} \qquad \partial_x = \delta \qquad r = y \circ z.$$

*Dem.* Sea la ecuación diferencial.

$$\partial_z^2 y + k_1(z)\,\partial_z y + k_2(z)\,y = 0, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{C}(z).$$

Considere el cambio de variable

$$z = z(x) \quad \Rightarrow \quad dz = z'(x)\,dx.$$

Al sustituir lo anterior en las derivadas, se obtiene

$$\partial_z y := \frac{dy}{dz} := \frac{dy}{z'(x)\,dx} = \frac{1}{z'(x)}\,\frac{dy}{dx}$$

$$\begin{aligned}
\partial_z^2 y &:= \frac{d}{dz}(\partial_z y) := \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z'(x)}\,\frac{dy}{dx}\right) := \frac{1}{z'(x)}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z'(x)}\,\frac{dy}{dx}\right)\\
\partial_z^2 y &= \frac{1}{z'(x)}\left(-\frac{z''(x)}{(z'(x))^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{z'(x)}\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)\\
\partial_z^2 y &= \frac{1}{(z'(x))^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{z''(x)}{(z'(x))^3}\,\frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$

Y puesto que $\partial_x y := \frac{dy}{dx}$ y $\partial_x^2 y := \frac{d^2y}{dx^2}$, entonces

$$\partial_z y = \frac{1}{z'(x)}\,\partial_x y \quad ; \quad \partial_z^2 y = \frac{1}{(z'(x))^2}\,\partial_x^2 y - \frac{z''(x)}{(z'(x))^3}\,\partial_x y.$$

Ahora reemplazando estos resultados en (1),

$$\frac{1}{(z'(x))^2}\,\partial_x^2 y - \frac{z''(x)}{(z'(x))^3}\,\partial_x y + k_1(z(x))\,\frac{1}{z'(x)}\,\partial_x y + k_2(z(x))\,y = 0. \tag{3}$$

Multiplicando (3) por $(z'(x))^2$, aplicando el cambio de variable inicial, reescribiendo las derivadas $\left(z'(x) := \partial_x z \quad ; \quad z''(x) := \partial_x^2 z\right)$ y tomando $r(x) = (y \circ z)(x)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 r - \frac{\partial_x^2 z}{\partial_x z}\,\partial_x r + k_1(z)\,\partial_x z\,\partial_x r + k_2(z)\,(\partial_x z)^2\, r &= 0\\
\partial_x^2 r + \left(k_1(z)\;\partial_x z - \frac{\partial_x^2 z}{\partial_x z}\right)\partial_x r + k_2(z)\,(\partial_x z)^2\, r &= 0.
\end{aligned}$$

□

## 3. Algebrización forzosa

En esta sección, estudiaremos la algebrización que nos conduce de la ecuación (2) a la (1); es decir, el proceso contrario al indicado en el teorema 1; ver [1, 4, 5, 6]. Vale la pena resaltar que el interés no es encontrar una familia de soluciones de EDO, sino determinar al menos un caso particular; por ello, se tomará la constante de integración nula. El procedimiento se ilustra a continuación:

1. Buscar la $(\partial_x z)^2$ apropiada en el coeficiente de la variable dependiente $r$, para que de ella se obtenga $z, \partial_x z$ y $\partial_x^2 z$.
2. Dividir por $(\partial_x z)^2$ el coeficiente de variable dependiente $r$ para obtener $k_2(z)$ y comprobar si $k_2 \in \mathbb{C}(z)$.
3. Igualar los coeficientes de la derivada de la variable dependiente $\partial r$ tanto de (2) como de la EDO dada, para obtener $k_1(z)$ y finalmente comprobar si $k_1 \in \mathbb{C}(z)$.

**Ejemplo 1.**

$(a)$ Aplicaremos el procedimiento de algebrización a la siguiente EDO:

$$\partial_x^2 r - \frac{1}{x(\ln x + 1)}\, \partial_x r - (\ln x + 1)^2\, r = 0. \tag{4}$$

**Paso 1**

Sea $(\partial_x z)^2 = (\ln x + 1)^2$. Tomando la parte positiva de la raíz: $\partial_x z = \ln x + 1$, al derivar se tiene $\partial_x^2 z = \frac{1}{x}$ y al integrar se obtiene:

$$\begin{aligned} z(x) &= \int (\ln x + 1)\, dx \\ z(x) &= x(\ln x - 1) + x \\ z(x) &= x \ln x \end{aligned}$$

**Paso 2**

Al dividir por $(\partial_x z)^2$ el coeficiente de variable dependiente $r$ en (4), se tiene:

$$k_2(z) = \frac{-(\ln x + 1)^2}{(\ln x + 1)^2} = -1 \in \mathbb{C}(z).$$

**Paso 3**

Igualando los coeficientes, reemplazando las derivadas y despejando a $k_1(z)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} k_1(z)\partial_x z - \frac{\partial_x^2 z}{\partial_x z} &= -\frac{1}{x(\ln x + 1)} \\ \Rightarrow k_1(z)\,(\ln x - 1) - \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x - 1)} &= -\frac{1}{x(\ln x + 1)} \\ k_1(z)\,(\ln x - 1) - \frac{1}{x\,(\ln x - 1)} &= -\frac{1}{x(\ln x + 1)} \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} k_1(z)\,(\ln x - 1) &= 0 \qquad\qquad \text{siempre que } x > 0 \text{ y } x \neq e \\ \Rightarrow k_1(z) &= 0 \in \mathbb{C}(z). \end{aligned}$$

$(b)$ Ahora hallaremos la solución de la EDO (4). Reemplazando $k_1(z)$ y $k_2(z)$ en (1):

$$\begin{aligned} \partial_z^2 y + (0)\partial_z y + (-1)y &= 0 \\ \partial_z^2 y - y &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación auxiliar $y = e^{mx}$,

$$\begin{aligned} m^2 - 1 &= 0 \\ m^2 &= 1 \quad \begin{cases} m_1 &= 1 \\ m_2 &= -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces,

$$y_1 = e^{z} \longrightarrow y_1 = e^{x \ln x}$$

$$y_2 = e^{-z} \longrightarrow y_2 = e^{-x \ln x}$$

Llegamos a que las soluciones de la EDO son:

$$y_1 = x^x \qquad \wedge \qquad y_2 = x^{-x}$$

**Ejemplo 2.**

$(a)$ Retomando el paso 1 de la EDO (4), aplicaremos la algebrización tomando la parte negativa de la raíz.

**Paso 1**

Sea $(\partial_x z)^2 = (\ln x + 1)^2$. Tomando la parte negativa de la raíz: $\partial_x z = -(\ln x + 1)$, al derivar se tiene $\partial_x^2 z = -\frac{1}{x}$ y al integrar se obtiene:

$$\begin{aligned} z(x) &= -\int (\ln x + 1)\, dx \\ z(x) &= -x \ln x \end{aligned}$$

**Paso 2**

Al dividir por $(\partial_x z)^2$ el coeficiente de variable dependiente $r$ en (4), se tiene:

$$k_2(z) = \frac{-(\ln x + 1)^2}{(\ln x + 1)^2} = -1 \in \mathbb{C}(z).$$

**Paso 3**

Igualando los coeficientes, reemplazando las derivadas y despejando a $k_1(z)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} k_1(z)\left[-(\ln x-1)\right]-\frac{-\frac{1}{x}}{-(\ln x-1)} &= -\frac{1}{x(\ln x+1)}\\ -k_1(z)(\ln x-1)-\frac{1}{x(\ln x-1)} &= -\frac{1}{x(\ln x+1)} \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} -k_1(z)(\ln x-1) &= 0 \qquad\qquad \text{siempre que } x>0 \text{ y } x\neq e\\ \Rightarrow k_1(z) &= 0\in\mathbb{C}(z). \end{aligned}$$

$(b)$ Puesto que tenemos el mismo $k_1(z)$ y $k_2(z)$, entonces al reemplazar en (1) y realizando el mismo procedimiento del ejemplo anterior, las soluciones de la EDO son:

$$y_1 = x^x \qquad \wedge \qquad y_2 = x^{-x}$$

**Ejemplo 3.**

$(a)$ Tomemos otra EDO y realicemos su algebrización:

$$\partial_x^2 r + \frac{4x\ln x+2x}{4x^2\ln x}\partial_x r - \frac{1}{4x^2\ln x}r = 0.$$

**Paso 1**

Sea $(\partial_x z)^2 = \frac{1}{4x^2\ln x}$. Tomando la parte positiva de la raíz: $\partial_x z = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} = \frac{(\ln x)^{-1/2}}{2x}$, al derivar se tiene $\partial_x^2 z = -\frac{1}{2x^2(\ln x)^{1/2}} - \frac{1}{4x^2(\ln x)^{3/2}}$ y al integrar,

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{2}\int(\ln x)^{-1/2}\frac{dx}{x}, \quad u=\ln x \quad ; \quad du=\frac{dx}{x}\\ z(x) &= (\ln x)^{1/2}=\sqrt{\ln x} \end{aligned}$$

**Paso 2**

$$k_2(z) = \frac{-\frac{1}{4x^2\ln x}}{\frac{1}{4x^2\ln x}} = -1\in\mathbb{C}(z).$$

**Paso 3**

Igualando los coeficientes, reemplazando las derivadas y despejando a $k_1(z)$, se tiene:

$$k_1(z)\frac{1}{2x(\ln x)^{1/2}} - \frac{-\frac{1}{2x^2(\ln x)^{1/2}} - \frac{1}{4x^2(\ln x)^{3/2}}}{\frac{1}{2x(\ln x)^{1/2}}} = \frac{4x\ln x + 2x}{4x^2\ln x},$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
k_1(z)\frac{1}{2x(\ln x)^{1/2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x\ln x} &= \frac{4x\ln x + 2x}{4x^2\ln x}\\
k_1(z)\frac{1}{2x(\ln x)^{1/2}} &= \frac{4x\ln x + 2x}{4x^2\ln x} - \frac{2x\ln x + x}{2x^2\ln x}\\
k_1(z)\frac{1}{2x(\ln x)^{1/2}} &= \frac{4x\ln x + 2x - 4x\ln x - 2x}{4x^2\ln x}\\
k_1(z)\frac{1}{2x(\ln x)^{1/2}} &= 0\\
\Rightarrow k_1(z) &= 0 \in \mathbb{C}(z).
\end{aligned}$$

$(b)$ Para hallar la solución de la EDO, reemplazamos a $k_1(z)$ y $k_2(z)$ en (1),

$$\begin{aligned}
\partial_z^2 y + (0)\partial_z y + (-1)y &= 0\\
\partial_z^2 y - y &= 0.
\end{aligned}$$

Al igual que en Ejemplo 1, las soluciones de la EDO son:

$$y_1 = x^x \qquad \wedge \qquad y_2 = x^{-x}$$

**Ejemplo 4.**

$(a)$ Algebricemos la siguiente EDO:

$$x^2\ln^2 x\,\partial_x^2 r + \left(x\ln^2 x - 3x\ \ln x\right)\partial_x r + 3r = 0.$$

Como primero expresamos la EDO en términos de (2), siempre y cuando $x > 0$ y $x \neq 1$,

$$\partial_x^2 r + \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x\ \ln x}\right)\partial_x r + \frac{3}{x^2\ln^2 x}r = 0.$$

**Paso 1**

Sea $(\partial_x z)^2 = \frac{1}{x^2\ln^2 x}$. Tomando la parte positiva de la raíz $\partial_x z = \frac{1}{x\ln x}$, al derivar se tiene $\partial_x^2 z = -\frac{1}{x^2\ln\ x} - \frac{1}{x^2\ln^2 x}$ y al integrar,

$$\begin{aligned}
z(x) &= \int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x}, \quad u = \ln x \quad ; \quad du = \frac{dx}{x}\\
z(x) &= \ln(\ln x)
\end{aligned}$$

**Paso 2**

$$k_2(z) = \frac{\frac{3}{x^2 \ln^2 x}}{\frac{1}{x^2 \ln^2 x}} = 3 \in \mathbb{C}(z).$$

**Paso 3**

Igualando los coeficientes, reemplazando las derivadas y despejando $k_1(z)$, se obtiene:

$$k_1(z)\frac{1}{x\ \ln x} - \frac{-\frac{1}{x^2 \ln x} - \frac{1}{x^2 \ln^2 x}}{\frac{1}{x\ \ln x}} \quad = \quad \frac{1}{x} - \frac{3}{x\ \ln x},$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}
k_1(z)\frac{1}{x\ \ln x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ \ln x} &= \frac{1}{x} - \frac{3}{x\ \ln x} \\
k_1(z)\frac{1}{x\ \ln x} &= -\frac{3}{x\ \ln x} - \frac{1}{x\ \ln x} \\
k_1(z) &= -\frac{4}{x\ \ln x}\ (x\ \ln x) \\
\Rightarrow k_1(z) &= -4 \in \mathbb{C}(z).
\end{aligned}$$

$(b)$ Ahora reemplazando a $k_1(z)$ y $k_2(z)$ en (1) hallaremos la solución de la EDO:

$$\begin{aligned}
\partial_z^2 y + (-4)\partial_z y + (3)y &= 0 \\
\partial_z^2 y - 4\partial_z y + 3y &= 0
\end{aligned}$$

Utilizando la ecuación auxiliar $y = e^{mx}$,

$$\begin{aligned}
m^2 - 4m + 3 &= 0 \\
(m-3)\ (m-1) &= 0 \quad \begin{cases} m_1 & = 1 \\ m_2 & = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$y_1 = e^z \longrightarrow y_1 = e^{\ln(\ln x)}$$

$$y_2 = e^{3z} \longrightarrow y_2 = e^{3\ln(\ln x)}$$

Las soluciones de la EDO son:

$$y_1 = \ln x \qquad \wedge \qquad y_2 = \ln^3 x$$

**Observación 1.** Queda al lector realizar la algebrización y encontrar la posible solución de los ejemplos 3 y 4, pero tomando esta vez la parte negativa al extraer la raíz del coeficiente de la variable dependiente $r$.

## 4. Algebrización hamiltoniana

Algebrizar la EDOs de segundo orden (2) es un poco más fácil, cuando no posee en ella el término $\partial_x r$, debido a que puede expresarse de la forma $\partial_x^2 r = p(x)r$, y luego se aplica un nuevo cambio de variable llamado *hamiltoniano* ver [1, 2, 3, 4, 5, 6].

**Definición 1 (Cambio de variable hamiltoniano).** Un cambio de variable $z = z(x)$ es *hamiltoniano* si $(z(x), \partial_x z)$ es una curva solución del sistema hamiltoniano clásico autónomo con dos grados de libertad:

$$\begin{aligned} \partial_x z &= \partial_w H \\ \partial_x w &= -\partial_z H \end{aligned} \qquad \text{donde} \quad H = H(z,w) = \frac{w^2}{2} + V(z)$$

para algún $V \in K$.

Ahora, sea $w = \partial_x z$ y $h = H(z, \partial_x z)$. Entonces,

$$\begin{aligned} 2h &= w^2 + 2V(z) \\ w^2 &= \underbrace{2\,(h - V(z))} \\ \partial_x^2 z &:= \alpha(z) \\ \partial_x z &:= \sqrt{\alpha(z)} \end{aligned}$$

**Teorema 2 (Algebrización hamiltoniana).** *La EDO,*

$$\partial_x^2 r = p(x)\, r \tag{5}$$

*es algebrizable mediante el cambio de variable hamiltoniano $z = z(x)$, si y sólo si existen $f, \alpha$ tales que:*

$$\frac{\partial_z \alpha}{\alpha}, \frac{f}{\alpha} \in \mathbb{C}(z), \qquad \textit{donde} \quad f\,(z(x)) := p(x) \quad \textit{y} \quad \alpha(z) := \partial_x^2 z.$$

*Además, la forma algebraica de la ecuación* (5) *es:*

$$\partial_x^2 y + \frac{1}{2}\,\frac{\partial_z \alpha}{\alpha(z)}\,\partial_z y - \frac{f(z)}{\alpha(z)}\,y = 0, \qquad r(x) = y\,(z(x)). \tag{6}$$

La demostración del teorema 2, se encuentra en [6].

Al igual que en la algebrización forzosa, aquí presentamos los pasos para algebrizar una EDO de la forma (5) y llevarla a la forma (6):

1. Buscar un *cambio de variable hamiltoniano* apropiado $z = z(x)$ y las funciones $f(z)$ y $\alpha(z)$ tales que $f\,(z) = p(x)$ y $\alpha(z) = \partial_x^2 z$.
2. Verificar que si $\frac{\partial_z \alpha}{\alpha(z)}, \frac{f(z)}{\alpha(z)} \in \mathbb{C}(z)$, entonces (5) es algebrizable.
3. Si (5) es algebrizable, entonces está dada por (6).

**Ejemplo 5.**

Expresaremos la siguiente EDO en términos de coeficientes racionales, aplicando la algebrización hamiltoniana:

$$\partial_x^2 r = f(\tan x)\, r, \quad \text{con } f \in \mathbb{C}(\tan x). \tag{7}$$

**Paso 1**

Sea el cambio de variable hamiltoniano $z = z(x) := \tan x, \quad \Rightarrow \quad \partial_x z = \sec^2 x.$

Por hipótesis $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ y sea

$$\alpha(z) = (\partial_x z)^2 = \left(\sec^2 x\right)^2 = \left(1 + \tan^2 x\right)^2 := \left(1 + z^2\right)^2 \in \mathbb{C}(z).$$

**Paso 2**

Sea $\partial_z \alpha = 4z\left(1 + z^2\right)$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_x \alpha}{\alpha(z)} &= \frac{4z\left(1+z^2\right)}{\left(1+z^2\right)^2} = \frac{4z}{\left(1+z^2\right)} \in \mathbb{C}(z) \\ \frac{f(z)}{\alpha(z)} &= \frac{f(z)}{\left(1+z^2\right)^2} \in \mathbb{C}(z) \end{aligned}$$

**Paso 3**

Como (7) es algebrizable, entonces reemplazamos en (6):

$$\begin{aligned} \partial_x^2 y + \frac{1}{2}\,\frac{\partial_z \alpha}{\alpha(z)}\,\partial_z y - \frac{f(z)}{\alpha(z)}\,y &= 0, \qquad r(x) = y\left(z(x)\right) \\ \partial_x^2 y + \frac{1}{2}\,\frac{4z}{1+z^2}\,\partial_z y - \frac{f(z)}{\left(1+z^2\right)^2}\,y &= 0 \\ \partial_x^2 y + \frac{2z}{1+z^2}\,\partial_z y - \frac{f(z)}{\left(1+z^2\right)^2}\,y &= 0, \qquad r(x) = y\left(\tan x\right) \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.**

Apliquemos la algebrización hamiltoniana a la siguiente EDO para expresarla en términos de coeficientes racionales:

$$\partial_x^2 r = \frac{\sqrt{1+x^2} + x^2}{1+x^2}\, r. \tag{8}$$

**Paso 1**

Sea el cambio de variable hamiltoniano $z = \sqrt{1+x^2}, \quad \Rightarrow \quad \partial_x z = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, además de allí se obtiene:

$$z^2 = 1 + x^2, \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = z^2 - 1$$

Por teorema 2 $f(z) = p(x)$ y de (8) se tiene:

$$p(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+x^2}{1+x^2} := f(z) = \frac{z^2+z-1}{z^2} \in \mathbb{C}(z)$$

$$(\partial_x z)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{1+x^2} := \alpha(z) = \frac{z^2-1}{z^2} \in \mathbb{C}(z)$$

**Paso 2**

Sea $\partial_z \alpha = \frac{2z^3-2z^3+2z}{z^4} = \frac{2}{z^3}$. Para ser algebrizable debe cumplirse que los términos $\frac{\partial_x \alpha}{\alpha(z)}, \frac{f(z)}{\alpha(z)} \in \mathbb{C}(z)$. Reemplazando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_x \alpha}{\alpha(z)} &= \frac{\frac{2}{z^3}}{\frac{z^2-1}{z^2}} = \frac{2}{z\,(z^2-1)} \in \mathbb{C}(z) \\
\frac{f(z)}{\alpha(z)} &= \frac{\frac{z^2+z-1}{z^2}}{\frac{z^2-1}{z^2}} = \frac{z^2+z-1}{z^2-1} \in \mathbb{C}(z)
\end{aligned}$$

**Paso 3**

Al ser (8) algebrizable, podemos reemplazar estos resultados en (6):

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 y + \frac{1}{2}\,\frac{2}{z\,(z^2-1)}\,\partial_z y - \frac{z^2+z-1}{z^2-1}\,y &= 0 \\
\partial_x^2 y + \frac{1}{z\,(z^2-1)}\,\partial_z y - \frac{z^2+z-1}{z^2-1}\,y &= 0, \qquad r(x) = y\left(\sqrt{1+x^2}\right)
\end{aligned}$$

**Definición 2 (Un nuevo operador $\widehat{\partial}_z$).** Realizar una generalización del teorema 1 para EDOs de orden superior no resulta inmediato; sin embargo, para el teorema 2 se facilita un poco, teniendo en cuenta el cambio de variable hamiltoniano donde $z = z\,(x)$, en el cual se debe cumplir $\partial_x z = \sqrt{\alpha}$, de donde resulta conveniente utilizar el siguiente operador diferencial $\widehat{\partial}_z := \sqrt{\alpha}\,\partial_z$ [1, 3, 4, 5]. Hay que resaltar que éste operador cumple con las mismas propiedades de una derivada usual y que además ayuda a minimizar procedimientos para expresar con coeficientes racionales a las EDOs dadas.

Sea $y(x) = \widehat{y}(z(x))$ y una EDO de la forma

$$\varphi\left(x, \widehat{y}, \widehat{\partial}_x \widehat{y}, \widehat{\partial}_x^2 \widehat{y}, \ldots, \widehat{\partial}_x^{(n)} \widehat{y}\right) = 0.$$

Usando el nuevo operador se transforma la EDO dada en:

$$\varphi\left(z, \widehat{y}, \widehat{\partial}_z \widehat{y}, \widehat{\partial}_z^2 \widehat{y}, \ldots, \widehat{\partial}_z^{(n)} \widehat{y}\right) = 0.$$

Considere entonces la EDO

$$\partial_x^2 y + k_1(x)\partial_x y + k_2(x)y = 0, \qquad \partial_x := \frac{d}{dx} \tag{9}$$

Haciendo el cambio de variable hamiltoniano $z = z(x)$ y realizando la aplicación del operador $\widehat{\partial}_z$, donde $y(x) = \widehat{y}(z), k_1(x) = \widehat{k_1}(z)$ y $k_2(x) = \widehat{k_2}(z)$, la EDO (9) se transforma en la siguiente ecuación diferencial:

$$\widehat{\partial}_z^2 \widehat{y} + \widehat{k_1}(z)\widehat{\partial}_z y + \widehat{k_2}(z)\widehat{y} = 0. \tag{10}$$

La algebrización de la EDO (10) está dada por

$$\alpha(z)\ \partial_z^2 \widehat{y} + \left(\frac{\partial_z \alpha}{2} + \sqrt{\alpha(z)}\ \widehat{k_1}(z)\right)\partial_z \widehat{y} + \widehat{k_2}(z)\ \widehat{y} = 0. \tag{11}$$

Estos últimos ejemplos muestran la aplicación eficaz de la algebrización hamiltoniana para solucionar algunas EDOs de segundo orden con coeficientes no racionales; sin embargo, para otros ejemplos ver [1, 2, 4, 5].

**Ejemplo 7.**

$(a)$ Algebricemos la siguiente EDO usando el cambio al nuevo operador:

$$\partial_x^2 y + (-2e^x - 1)\,\partial_x y + e^{2x} y = 0 \tag{12}$$

Realizando el cambio de variable hamiltoniano $z = z(x) = e^x \Rightarrow \partial_x z = e^x = z := \sqrt{\alpha(z)}$, de manera que $\alpha(z) = z^2 \Rightarrow \partial_z \alpha = 2z$

Ahora aplicando el operador $\widehat{\partial}_z$ se tiene:

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -2e^x - 1 := \widehat{k_1}(z) = -2z - 1 \\ k_2(x) &= e^{2x} := \widehat{k_2}(z) = z^2 \end{aligned}$$

Reemplazando en (11),

$$\begin{aligned} z^2\ \partial_z^2 \widehat{y} + \left(\frac{2z}{2} + z\ (-2z - 1)\right)\partial_z \widehat{y} + z^2\ \widehat{y} &= 0 \\ z^2\ \partial_z^2 \widehat{y} + \left(z - 2z^2 - z\right)\partial_z \widehat{y} + z^2\ \widehat{y} &= 0 \\ \partial_z^2 \widehat{y} + \left(\frac{-2z^2}{z^2}\right)\partial_z \widehat{y} + \frac{z^2}{z^2}\ \widehat{y} &= 0, \qquad \text{con } z \neq 0 \\ \partial_z^2 \widehat{y} - 2\partial_z \widehat{y} + \widehat{y} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$(b)$ Hallemos la solución de la EDO (13), utilizando la ecuación auxiliar $y = e^{mx}$ por ser una EDO de coeficientes constantes,

$$\begin{aligned} m^2 - 2m + 1 &= 0 \\ (m-1)^2 &= 0 \quad \begin{cases} m_1 &= 1 \\ m_2 &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, las soluciones de las EDOs (13) y (12) respectivamente son:

$$y_1 = e^z \longrightarrow y_1 = e^{e^x}$$

$$y_2 = ze^z \longrightarrow y_2 = e^x\, e^{e^x}$$

**Ejemplo 8.**

$(a)$ Apliquemos el cambio de variable y de operador a la siguiente EDO y luego algebricémosla:

$$\partial_x^2 y + \left(\frac{2x^2e^{x^2} - 2x^2 - 1}{x}\right)\partial_x y + 4x^2e^{2x^2}y = 0 \tag{14}$$

Realizando el cambio de variable hamiltoniano $z = z(x) = e^{x^2} \Rightarrow \partial_x z = 2xe^{x^2} = 2z\sqrt{\ln z} := \sqrt{\alpha(z)}$, de manera que $\alpha(z) = 4z^2\ln z \Rightarrow \partial_z\alpha = 8z\ln z + 4z$.

Ahora aplicando el operador $\widehat{\partial}_z$ se tiene:

$$\begin{aligned} k_1(x) &= \frac{2x^2e^{x^2} - 2x^2 - 1}{x} := \widehat{k_1}(z) = \frac{2z\ln z - 2\ln z - 1}{\sqrt{\ln z}} \\ k_2(x) &= 4x^2e^{2x^2} := \widehat{k_2}(z) = 4z^2\ln z \end{aligned}$$

Reemplazando en (11):

$$\begin{aligned} 4z^2\ln z\,\partial_z^2\widehat{y} + \left(\frac{8z\ln z + 4z}{2} + 2z\sqrt{\ln z}\,\frac{2z\ln z - 2\ln z - 1}{\sqrt{\ln z}}\right)\partial_z\widehat{y} + 4z^2\ln z\,\widehat{y} &= 0 \\ 4z^2\ln z\,\partial_z^2\widehat{y} + \left(4z\ln z + 2z + 4z^2\ln z - 4z\ln z - 2z\right)\partial_z\widehat{y} + 4z^2\ln z\,\widehat{y} &= 0 \\ \partial_z^2\widehat{y} + \left(\frac{4z^2\ln z}{4z^2\ln z}\right)\partial_z\widehat{y} + \frac{4z^2\ln z}{4z^2\ln z}\,\widehat{y} &= 0,\ \text{como}\ z > 0 \\ \partial_z^2\widehat{y} + \partial_z\widehat{y} + \widehat{y} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

$(b)$ Ahora, para hallar la solución de la EDO (15), utilizamos la ecuación auxiliar $y = e^{mx}$ por ser una EDO de coeficientes constantes:

$$m^2 + m + 1 = 0 \quad \begin{cases} m_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ m_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Entonces, las soluciones de las EDOs (15) y (14) respectivamente son:

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}z}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \longrightarrow y_1 = e^{-\frac{1}{2}e^{x^2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{x^2}\right)$$

$$y_2 = e^{-\frac{1}{2}z}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \longrightarrow y_2 = e^{-\frac{1}{2}e^{x^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{x^2}\right)$$

## Conclusiones

En este documento se presentó la algebrización forzosa y algebrización hamiltoniana en una manera más accesible y sencilla que la expuesta en las referencias citadas. También, por primera vez, se hizo una demostración en detalle del teorema de cambio de variable independiente.

El siguiente paso es implementar la algebrización en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que modela la producción de biogás. A partir de esto, buscaremos soluciones analíticas y estudiaremos la integrabilidad del sistema en el marco de la teoría de Galois diferencial.

## Agradecimientos

Norman Raúl Aya Alvarado y Maximiliano Machado Higuera agradecen a la Universidad de Ibagué por apoyar sus investigaciones a través del proyecto con código 15-344-INT.

## Referencias

[1] P.B. Acosta-Humánez, *Métodos algebraicos en sistemas dinámicos*, Ediciones Universidad del Atlántico, EMALCA. (2014).

[2] P.B. Acosta-Humánez & E. Suazo, *Liouvillian propagators, Riccati equation and differential Galois theory*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46** (2013).

[3] P.B. Acosta-Humánez, M. Alvarez-Ramírez, D. Blázquez-Sanz & J. Delgado, *Non-integrability criterium for normal variational equations around an integrable subsystem and an example: The Wilberforce spring-pendulum*, Discrete and Continuous Dynamical Systems–Series A (DCDS–A) **33** (2013).

[4] P.B. Acosta-Humánez & D. Blázquez-Sanz, *Galoisian approach to integrability of Schrödinger equation*, Reports on Mathematical Physics **67** (2011).

[5] P.B. Acosta-Humánez, *Galoisian approach to supersymmetric quantum mechanics: The integrability analysis of the Schrödinger equation by means of differential Galois theory*, VDM Verlag Dr. Müller, 2010.

[6] P.B. Acosta-Humánez & D. Blázquez-Sanz, *Non-integrability of some hamiltonians with rational potentials*, Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B (DCDS–B), **10** (2008).

[7] P.B. Acosta-Humánez & J.H. Pérez, *Una introducción a la teoría de galois diferencial*, Boletíın de Matemáticas Nueva Serie **XI** (2004).

[8] J.J. Morales-Ruiz, *Picard-Vessiot theory and integrability*, Journal of Geometry and Physics **87** (2015).

[9] J.J. Morales-Ruiz, *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Mathematics **179** (1999).

[10] J.J. Morales-Ruiz & J.P. Ramis, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems*, Methods and Applications of Analysis **8** (2001).

[11] J.J. Morales-Ruiz, J-P. Ramis & C. Simó, *Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **40** (2007).

[12] M. van der Put & M.F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **328** (2003).

Recibido en febrero de 2017. Aceptado para publicación en junio de 2017.

PRIMITIVO ACOSTA-HUMÁNEZ
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS Y BIOMÉDICAS
UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
BARRANQUILLA, COLOMBIA
e-mail: primitivo.acosta@unisimonbolivar.edu.co

NORMAN AYA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
IBAGUÉ, COLOMBIA
e-mail: nraya@ut.edu.co

MAXIMILIANO MACHADO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE IBAGUÉ
IBAGUÉ, COLOMBIA
e-mail: maximiliano.machado@unibague.edu.co