Revista de Estudios y Experiencias en Educación
Vol. 16 Nº 32, diciembre 2017, pp. 129 - 136

Modelo de Van Hiele Aplicado en Exploración de Propiedades Mediante Construcción

Ociel Alejandro López Jara*
Universidad de Concepción, Facultad de Educación, Concepción, Chile

Recibido: 10 diciembre 2016
Aceptado: 20 marzo 2017

RESUMEN. Quienes están en la labor de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, en especial a nivel escolar, han podido observar que muchos profesores de matemática se limitan a pedir que sus alumnos repitan y repitan definiciones y/o propiedades de conceptos geométricos, sin que los alumnos puedan llegar a conceptualizar y se tomen el tiempo para reflexionar sobre los objetos geométricos y menos aún a "resolver problemas" geométricos. Diversas investigaciones permiten afirmar que si el profesor solicitara que los alumnos construyan y hagan conjeturas sobre las bases de sus conocimientos previos de geometría, se desarrollaría el razonamiento matemático. Horacio Itzcovich en su libro "Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría: De las construcciones a las demostraciones" realiza una propuesta de actividades para que sean los propios alumnos quienes produzcan el conocimiento geométrico apoyados en las propiedades que ya conocen, propuesta que está en línea con la afirmación anterior. Este artículo presenta como la propuesta de actividades de Itzcovich tiene un sustento teórico en el *Modelo de Razonamiento de Van Hiele*, el que plantea que existen diferentes niveles de razonamiento en el aprendizaje de la geometría. Se concluye que los niveles de razonamiento definidos en el modelo están presentes en cada una de las actividades propuestas en la segunda parte de este texto.

PALABRAS CLAVE. Razonamiento, Enseñanza, Modelo de Van Hiele, Construcción Geométrica.

Van Hiele Model Applied in Exploration of Properties by Means of Construction

ABSTRACT. Those who work in Mathematics teaching and learning of Mathematics, especially at school level, have been able to observe that many math teachers limit themselves in asking their students to repeat definitions and geometrical properties or concepts, not allowing to conceptualize and take their time to think about geometrical objects or even to solve geometrical problems. Different investigations confirm that if the teacher requestes the students to develop and produce conclusions based on their previous knowledge on geometry, mathematical reasoning would be developed. In the book "The starting on the didactic study on geometry: From the construction to the demonstrations" by Horacio Itzcovich, presents a proposal on geometrical practice so the students themselves will produce the knowledge on geometry supported by the properties already known by them, which concords with the previous statement. This article presents how Itzcovich's theory proposal supports Van Hiele's reasoning model that states the existence of different levels of reasoning while learning about geometry. It concludes that the levels of reasoning defined in the model are on each one of the proposed activities found on the second part of Itzcovich's book.

* Correspondencia: Ociel López Jara. Dirección: Edmundo Larenas 335, Concepción, Chile. Correo electrónico: ociellopez@udec.cl

doi: 10.21703/rexe.2017321291368 *ISSN 0717-6945 ISSN en línea 0718-5162*

KEY WORDS. Reasoning, Teaching, Van Hiele Model, Geometrical Construction.

1. INTRODUCCIÓN

Sin duda, muchos investigadores en enseñanza y aprendizaje de la matemática han podido observar un número no menor de profesores de matemática a nivel escolar, en especial en las clases de geometría, que se ocupa de temas como perímetro, volúmenes y superficies, centrándose en las mediciones de éstas; también hay profesores que dan importancia (sino mucha) a enseñar las figuras geométricas o dibujos y que sus alumnos aprendan su nombre y puedan recitar su definición. Barrantes (como lo citó Vargas y Gamboa, 2013, p. 77) afirma que la enseñanza de la geometría se preocupa, en la actualidad, en que los estudiantes memoricen los conceptos y su aplicación, sin que se llegue a una conceptualización más elaborada.

Lo que el profesor de matemática enseñe de geometría y como lo enseñe depende mucho de las concepciones que tiene él sobre lo qué es geometría, por qué se enseña y cómo se aprende. Sin duda muchos profesores terminan replicando lo que ellos aprendieron de geometría en el colegio o en su formación profesional. Si el profesor tiene una clara idea de porqué los alumnos debe aprender geometría, entonces podrá planificar y orientar mucho mejor su enseñanza.

Por ello se hace necesario que el profesor de matemática busque y conozca nuevas estrategias didáctica que permitan que sus alumnos descubran con mayor facilidad las ventajas de aprender geometría y su importancia para la vida. Andonegui (2006), respaldándose en Guzmán (1988) y Pérez Gómez (2002), señala que el estudio de la geometría euclidiana desarrolla la intuición espacial y además integra la manipulación y experimentación con la deducción; la visualización con la conceptualización; y todo lo anterior, con la resolución de problemas y la aplicación de los conocimientos geométricos. En esta línea, la propuesta de Horacio Itzcovich en su libro "Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones", resulta coherente con lo planteado por los autores ya citados y por tanto beneficiosa para desarrollar en los alumnos su pensamiento matemático.

¿Cómo se podría respaldar lo que propone Itzcovich? ¿Existe algún marco teórico o modelo que sirva para respaldar si lo propuesto por Itzcovich permite a los alumnos mejorar sus aprendizajes en geometría?

Para responde estas interrogantes, se consideró lo expresado por Gutiérrez y Jaime (1998):

> (…) existen diversas investigaciones y se han formulado varias explicaciones sobre cómo aprenden los niños y sobre cómo va evolucionando el pensamiento cuando los niños pasan a jóvenes y luego a adultos, pero, centrado en la geometría, el modelo más específico y que se ajusta más a las situaciones que se plantean en las aulas, cuando los alumnos están aprendiendo, es el que formuló Van Hiele (p. 25).

En consideración a lo expuesto, este artículo se centra en mostrar, respaldándose en diversas investigadores (Gutiérrez y Jaime, 1998; Andonegui, 2006; Fouz, 2005; Garcia y López, 2008; Vargas y Gamboa, 2013), la consistencia existente entre las actividades propuestas por Itzcovich en la parte 2 de su libro (p. 17-31) y el modelo de razonamiento de Van Hiele, es una investigación de carácter descriptivo. En ningún modo pretende ser un estudio completo de este texto ni agota el análisis de este tipo de actividades posibles de ser trabajadas en la clase de geometría a nivel escolar.

Para este propósito, el presente artículo se ha estructurado en cinco apartados: ¿Por qué enseñar geometría?, donde se indica la importancia de estudiar geometría a nivel escolar; Exploración de propiedades mediante construcción, aquí se presenta a grandes rasgo el libro que contiene la propuesta didáctica que motiva este trabajo; *El modelo de Van Hiele* que corresponde al marco teórico que se propone como sustento a las propuesta antes mencionadas; luego tenemos Aplicar el Modelo, donde se describen cinco actividades (ejemplos) y como ellas se condicen con las fases del modelo; y se finaliza con las conclusiones.

2. DESARROLLO

2.1 ¿Por qué enseñar geometría?

En primer lugar, es necesario reflexionar sobre el nacimiento de la geometría y cómo el ser humano, según la forma que percibe su entorno, ha necesitado crear o transformar el espacio que habita y transmitir a otros usando un lenguaje común y que permita interpretar la realidad (Vargas y Gamboa, 2013). Es decir, en palabras de García y López (2008) "la geometría nos sirve para modelar el espacio que percibimos" (p. 27).

En segundo lugar, según National of Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) la Geometría permite a los estudiantes tener un encuentro con los aspectos deductivos de la Matemática, lo que es posible lograr a partir de la intuición y de la visualización.

> El estudio de la Geometría permite al alumno estar en interacción con relaciones que ya no son el espacio físico sino un espacio conceptualizado y, por lo tanto, en determinado momento, la validez de las conjeturas que haga sobre las figuras geométricas ya no se comprobarán empíricamente sino que tendrán que apoyarse en razonamientos que obedecen a las reglas de argumentación en Matemáticas, en particular, la deducción de nuevas propiedades a partir de las que ya conocen (García y López, 2008, p. 29).

2.2 Exploración de propiedades mediante construcción

Considerando lo anterior, resulta de gran interés revisar el planteamiento de Horacio Itzcovich en su libro *Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría*. De las construcciones a las demostraciones. Itzcovich (2005) comenta que al no darle la importancia a la enseñanza de la geometría se impide que los alumnos conozcan otra forma de pensar y ellos no experimentan una forma de razonamiento propio de la geometría. Es por ello que propone que se debe involucrar al estudiante en la producción del conocimiento geométricos, con tareas que le permitan "inferir, a partir de los datos y con el apoyo de las propiedades, relaciones que no están explicitadas y que llevarán a establecer el carácter necesario de los resultados de manera independiente de la experimentación" (Itzcovich, 2005, p. 12). De aquí el autor relaciona la idea del trabajo geométrico con lo que podemos llamar problema geométrico. Este se identifica según Itzcovich (2005) por:

• Para resolver el problema se ponen en juego las propiedades de los objetos geométricos.

• El problema pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico sino a un espacio conceptualizado; las figuras-dibujos trazadas por este sujeto no hacen más que representarlo.

• La función que cumplen los dibujos en la resolución del problema no es la de permitir arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.

• La validación de la respuesta dada al problema –es decir, la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de su respuesta– no se establece empíricamente, sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos. Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras producen nuevos conocimientos sobre los mismos (p. 13).

Con estas características que Itzcovich da a un problema geométrico, desarrolla su libro, y en particular en su parte 2 que se refiere a *Las construcciones como medio para explorar propiedades de las figuras*, afirmando que "(…) las construcciones con los instrumentos clásicos de la geometría permiten explorar, identificar, conjeturar y validad propiedades de las figuras" (Itzcovich, 2005, p. 13).

Además, el mismo autor resalta que lo que los alumnos ven en una figura no es necesariamente lo mismo que ve en ella el profesor porque las experiencias y conocimientos que cada uno posee son diferentes. Lo que el alumno ve en una figura está estrechamente influenciado por su experiencia previa y no por la sola observación del dibujo. Por ello, las actividades que se planteen al alumno deben apelar en forma clara a las propiedades y características de los objetos geométricos, que en definitiva son las herramientas necesarias para el proceso deductivo que se quiere desarrollar en el alumno. En definitiva, Itzcovich (2005) afirma que en la resolución de problemas geométricos:

> Se apela constantemente a la relación entre los conocimientos de los que disponen los alumnos, las actividades de construcción que se propongan, las intuiciones, los ensayo, los errores, los aciertos que se presenten, los aportes del docente, las discusiones entre los alumnos, etc. (p. 19).

El autor nos presenta una serie de ejemplos para mostrar como al plantear diferentes actividades de construcción, y acompañarlas de algunas interrogantes, llevan al alumno a argumentar sobre las características y propiedades de los objetos que se piden construir y alentándolo a entregar algunas conjeturas para resolver el desafío que se ha plateado, permitiendo que el alumno vaya avanzando el proceso deductivo.

2.3 El Modelo de Van Hiele

Según lo señala Vargas y Gamboa (2013) el *Modelo de Razonamiento de Van Hiele* sirve para explicar cómo, a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento de los alumnos pasa por *niveles de razonamiento* y que para dominar un nivel y pasar al siguiente se debe cumplir algunos procesos de logros y aprendizaje. El modelo define cinco *niveles de razonamiento*, secuenciales y ordenados. Ningún nivel es independiente y no es posible saltarse ninguno. Cada nivel considera algunas *fases de aprendizaje* que el alumno debe lograr para pasar al nivel siguiente. Pasar de un nivel a otro depende principalmente de la enseñanza recibida y no de la edad de alumno, es decir, lo importante es la organización del proceso enseñanza-aprendizaje, de las actividades y materiales a utilizar (Fouz, 2005).

En el presente estudio solo se hará mención a los cinco niveles y las fases del modelo de Van Hiele y no se describirá en detalle cada uno de ellos porque no es el propósito de este trabajo. Existen diversas publicaciones que detallan este Modelo, como por ejemplo el trabajo de Gutiérrez y Jaime (1998) o Vargas y Gamboa (2013), incluido en la referencia.

Según lo expuesto por Vargas y Gamboa (2013) los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele son:

Nivel 1: Reconocimiento o visualización

Nivel 2: Análisis

Nivel 3: Deducción informal u orden

Nivel 4: Deducción

Nivel 5: Rigor

Fouz (2005) afirma que "(…) el nivel 5º se piensa que es inalcanzable para los estudiantes y muchas veces se prescinde de él, además, trabajos realizados señalan que los estudiantes no universitarios, como mucho, alcanzan los tres primeros niveles" (p. 33).

Las cinco fases de aprendizaje nos ayudan a organizar las actividades que permiten transitar de un nivel de razonamiento al siguiente. Cada nivel comienza con actividades de la fase uno y continúa con actividades de la fase siguiente hasta llegar a la quinta, donde el alumno debe haber alcanzado el siguiente nivel de razonamiento. Las cinco fases son:

Fase 1: Información.

Fase 2: Orientación dirigida.

Fase 3: Explicitación.

Fase 4: Orientación libre.

Fase 5: Integración.

Según lo expuesto, se considera que lo planteado por Horacio Itzcovich en su libro *Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría*. De las construcciones a las demostraciones, en particular lo referente a la exploración de propiedades mediante construcción, resulta consistente con el *Modelo de Razonamiento de Van Hiele* y como justificación se propone el siguiente análisis:

Itzcovich entrega cinco ejemplos de actividades de construcción que se pueden plantear a los alumnos para desarrollar en ellos el proceso deductivo. Las construcciones propuestas y las diferentes interrogantes que el profesor va planteando son fundamentales para generar una discusión con los alumnos y llevarlos al desarrollo de argumentos. Es decir, el tipo de construcciones y de interrogantes propuestas permiten llevar al alumno de un nivel al siguiente, en particular del nivel 2 al nivel 3.

Cuando los alumnos se encuentran en el nivel 2 de razonamiento significa que:

Los estudiantes reconocen que las figuras geométricas están dotadas de propiedades matemáticas. Pueden deducir y demostrar nuevas propiedades empíricamente. Las clasificaciones que hacen de familias de figuras pueden ser de tipo inclusivo si solo intervienen propiedades con estructura lógica simple o de tipo exclusivo en caso contrario. (Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016, p. 110).

Cowley (como se citó en Fouz, 2005, p. 74), en relación al estudio de cuadriláteros y triángulos, señala lo que logra y lo que no logra el alumno en cada nivel. Esta descripción puede ser usada para el caso del estudio de los paralelogramos y que a continuación indico para el caso del nivel 2.

En este nivel los alumnos pueden:

- Señala que la figura tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

- Comprueba que en un paralelogramo los lados opuestos son paralelos.

- Inventa un criterio para clasificar cuadriláteros (dos rectos, pares de lados paralelos, etc.).

- Dan información basada en propiedades para dibujar la figura.

- Resuelve problemas sencillos identificando figuras en combinación con otras

- Identifica propiedades en paralelogramos pero "*no identifica el conjunto de propiedades necesarias para definirlo*".

El profesor a partir de su observación e indagación, por ejemplo por medio de entrevistas o test que aplica a los alumnos, los ubica (en este caso) en el nivel 2 y solo entonces podrá diseñar y planificar una secuencia didáctica con actividades que permitirán a los alumnos alcanzar el nivel 3, él que se caracteriza por:

> El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas. Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado. Sin embargo, su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Sigue demostraciones pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones. Al no poder realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, el individuo no comprende el sistema axiomático de las Matemáticas. El individuo ubicado en el nivel 2 no era capaz de entender que unas propiedades se deducían de otras, lo cual sí es posible al alcanzar el nivel 3. Ahora puede entender, por ejemplo, que en un cuadrilátero la congruencia entre ángulos opuestos implica el paralelismo de los lados opuestos (Vargas y Gamboa, 2013, p. 83).

Lo que en términos concretos, según Cowley (como se citó en Louz, 2005, p. 74), puede significar que el alumno:

- Selecciona propiedades que caracterizan una serie de formas y prueba, mediante dibujos o construcciones, que son suficientes.

- Contesta razonadamente a preguntas como: ¿un rectángulo es un paralelogramo?

- Justifica la igualdad de los ángulos opuestos de un paralelogramo.

- Reconoce el papel de las explicaciones lógicas o argumentos deductivos en la justificación de hechos.

- *No comprende el significado de la deducción en un sentido axiomático (no ve la necesidad de las definiciones y supuestos básicos).*

- *No distingue formalmente entre una afirmación y su contraria.*

- *No establece relaciones entre redes de teoremas.*

Como ya se ha señalado, las *fases* de aprendizaje del *Modelo de Razonamiento de Van Hiele* se componen de una serie de actividades que el profesor diseña para permitir que el alumno pase de un nivel al siguiente. Las construcciones propuestas por Itzcovich en su libro, acompañadas de las interrogantes que se le hacen a los alumnos, son actividades que puede emplear el profesor para lograr los aprendizajes en su alumnos, y por tanto vienen a conformar las *fases de aprendizaje* del Modelo de Van Hiele, permitiendo que los alumnos puedan transitar, en este caso, del nivel 2 al nivel 3.

Se debe resaltar que Itzcovich en su libro no menciona que sus propuestas de actividades o ejemplos (como él lo llama) se relacionen con el Modelo de Van Hiele, es decir, las actividades no están basadas en el Modelo ni son una propuesta para ser trabajadas bajo éste. Usar el Modelo de Van Hiele para respaldar la propuesta de actividades de la parte 2 del texto "*Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*" es la hipótesis que se desea probar.

2.4 Aplicar el Modelo

Se pasa ahora a mencionar las actividades que propone Itzcovich (2005), las cuales solo se comentan en términos generales. Para su detalle se pude remitir al texto ya descrito.

Considerando como objetivo de aprendizaje que el alumno pueda caracterizar un paralelogramo y reconocer los datos mínimos que se necesitan para una construcción única, y habiendo ya confirmado que los estudiantes se encuentran en el nivel 2 de razonamiento, se puede comentar:

El ejemplo 1 solicita: Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 6 cm y otro lado mida 4 cm. ¿habrá un solo paralelogramo que cumpla estas condiciones? Con esta construcción y la conversación que se provoque con la pregunta, es posible identificar el grado de conocimiento que el alumno tiene sobre el tema; es decir, correspondería a la **Fase 1: información.**

Ejemplo 2: Construir un paralelogramo en el cual uno de los lados mida 7 cm, otro lado mida 4 cm y la diagonal mida 11 cm. Aquí la intención es que los alumnos reconozcan la relación triangular entre dos lados consecutivos y una diagonal y lleve al alumno a reflexionar sobre la condición que deben cumplir la medida de la diagonal y la medida de los lados que la forman. En esta actividad ya se está llenando al alumno a descubrir y en definitiva aprenda sobre propiedades y condiciones que tiene los paralelogramos, en este caso que para construir un paralelogramo debe existir una relación entre los lados y su diagonal, en este caso la propiedad triangular. En este caso el profesor guía al alumno a reconocer una propiedad necesaria en todo paralelogramo, es decir, **Fase 2: orientación dirigida.**

Ejemplo 3: a) Construir un paralelogramo en el cual uno de sus lados mide 6 cm y los ángulos adyacentes a dicho lado miden 30° y 150°. b) Construir un paralelogramo en el cual uno de sus lados mide 7 cm y los ángulos adyacentes miden 40° y 120°. Con esta actividad el autor intenta generar un debate entre los alumnos donde entreguen sus argumentos de los diferentes dibujos obtenidos y confrontarlos con sus compañeros. Es decir, los estudiantes entregan en un lenguaje formal sus argumentos lo que les permite revisar y validar sus conocimientos previos y fortalecer los nuevos. Esto conforma la **Fase 3: explicitación**.

Ejemplo 4: a) Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 8 cm, otro lado mida 4 cm y la altura correspondiente al lado de 8 cm sea 3 cm. ¿la construcción es la única posible? b) Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 7 cm, otro lado mida 3 cm y la altura correspondiente al lado de 7 cm sea 4 cm. ¿la construcción es la única posible? Para esta actividad se espera que los alumnos establezcan relaciones entre el lado de un paralelogramo y la altura del otro lado, es decir, se espera que el alumno aplique y combine lo aprendido en las fases anteriores a nuevas situaciones. El profesor interviene lo menos posible. **Fase 4: Orientación libre**.

Ejemplo 5: ¿Será cierto que si se conocen tres datos de un paralelogramo, la construcción que se puede realizar es única? Con esta actividad se espera que los alumnos explorando las construcciones anteriores y otras nuevas que puedan realizar, logren establecer condiciones más generales. Aquí se espera que el alumno sea capaz de identificar que conociendo la medida de dos lados y el ángulo que forman, la construcción es única. Es decir, son capaces de tener una visión más global de lo aprendido, integran los nuevos conocimientos a los que tenían anteriormente. El profesor podría proponer interrogantes complementarias, como ternas de datos para que los alumnos puedan discutir sin ellos son suficiente o no para construir un paralelogramo único. En este caso los estudiantes han alcanzado la **Fase 5: Integración**.

3. CONCLUSIÓN

Para aumentar el interés de los alumnos por la geometría y mejorar los resultados de aprendizaje en este eje, es necesario que los profesores sean capaces de diseñar y planificar actividades didácticas atrayentes para los alumnos, que consideren sus conocimientos previos y resulten significativos para ellos. El profesor debe tener una sólida base de conocimientos que le permitan guiar de mejor forma a sus alumnos (Vargas y Gamboa, 2013). Las construcciones geométricas junto al hecho de no entregar un producto ya terminado, permiten que los alumnos sean mucho más protagonistas de su aprendizaje.

Es en esta línea que lo propuesto por Horacio Itzcovich en su libro *"Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones"*, debe ser considerado por todo profesor de matemática para su clase de geometría. De igual forma resulta relevante incluir este tipo de propuestas en la formación inicial de los profesores de matemática.

Respaldarse de un modelo ya estudiado por muchos investigados desde la década de los cincuenta como es el *Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele*, permite confirmar que la secuencia didáctica propuesta por Itzcovich sobre exploración de propiedades mediante construcción para el contenido de propiedades del paralelogramos, es adecuada para llevar al alumno del nivel de razonamiento 2 al 3.

REFERENCIAS

Andonegui, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento matemático. Cuaderno Nro 12 Geometría: Conceptos y construcciones elementales*. Caracas, Venezuela: Federación Internacional Fe y Alegría.

Aravena, M., Gutiérrez, A., y Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(1), 107-128.

Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. En R. Ibalez y M. Macho (Ed.), *Un paseo por la Geometría* (2004-2005) (pp. 67-82) Bilbao, España: UPV-EHU.

Garcia, S., y López, O. (2008). *La enseñanza de la Geometría.* Mexico D.F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1998). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Bogota: Una empresa docente.

Guzmán, M. d. (1988). *Aventuras Matemáticas*. Barcelona: Labor.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

National of Council of Teacher of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. (M. F. Reyes, Trad.) España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

Pérez Gómez, R. (2002). *Construir la Geometría. En F. López (Ed.), La geeometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas*. Caracas: Laboratorio Educativo.

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la goemetría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.