LLULL, vol. 6, 1983, 5-36

SOBRE LOS CONOCIMIENTOS TRIGONOMETRICOS EN LOS LIBROS DEL SABER DE ASTRONOMIA DE ALFONSO X EL SABIO*

ELENA AUSEJO

ABSTRACT

This paper studies the trigonometrical chapters of the Alphonsine Libros del Saber de Astronomía *—except the ones included in the* Libro del Astrolabio Llano, *already reviewed by R. Martí and M. Viladrich (1983, pp. 9-75)—. The article is divided in two sections: the first one is devoted to foundations of Trigonometry and construction of tables and the second one to application problems. A brief glossary collects the mathematical vocabulary in these texts. The analysis in this work tries to place and value the alphonsine contribution to the development of Trigonometry in Western Europe, paying special attention to the situation in medieval Spain.*

RESUMEN

Este trabajo estudia los capítulos trigonométricos de los Libros del Saber de Astronomía *de Alfonso X el Sabio —a excepción de los incluidos en el* Libro del Astrolabio Llano, *revisados ya por R. Martí y M. Viladrich (1983, pp. 9-75)—. El artículo está dividido en dos secciones: la primera está dedicada a los fundamentos de la trigonometría y construcción de tablas y la segunda a problemas de aplicación práctica. Un breve glosario recoge el vocabulario matemático de los textos. El análisis realizado intenta situar y valorar la aportación alfonsí al desarrollo de la Trigonometría en Europa Occidental, atendiendo especialmente a la situación en la España medieval.*

Palabras clave: Trigonometría, tablas trigonométricas, Alfonso X.

* Este trabajo ha sido realizado dentro del programa de investigación en torno al tema de la Astronomía alfonsí que lleva a cabo la Universidad de Barcelona subvencionado por la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica.

I. Introducción histórica

A mediados del siglo IX se conoce en Córdoba la obra de al-Jwārizmī, incluidas sus tablas astronómicas, lo que supone el manejo de una tabla de senos y sombras (ed. SUTER, 1914; trad. NEUGEBAUER, 1962); a mediados del siglo X son conocidas las tablas astronómicas de al-Battani (VERNET, 1965).

En este período cabe citar como matemático más importante a Maslama al-Maŷrīṭī, que estudia el *Almagesto* de Tolomeo y trabaja sobre el teorema de Menelao, si bien su manejo de la trigonometría esférica se reduce a la resolución de triángulos rectángulos (VERNET, CATALÁ, 1965).

Ya en el siglo XI, además de ser conocidas las tablas de Habas al-Hasib —como demostrará M. Viladrich—, aparece como figura indiscutible Abū ᶜAbd Allāh Muḥammad b. Muᶜāḏ al-Šaᶜbānī, cuya obra *Kitāb maŷhūlāt qisī al-kura* alcanza el mayor nivel de conocimiento de la trigonometría en la España medieval. Además de ser el primer tratado de trigonometría esférica hasta ahora conocido, en él se da a la trigonometría un tratamiento teórico desde el punto de vista matemático con total independencia de las aplicaciones astronómicas, que representa un tipo de trigonometría no conocido en la tradición peninsular anterior —Maslama— o contemporánea —Azarquiel— y con claras conexiones con autores orientales como al-Bīrūnī y Abū Naṣr (VILLUENDAS, 1979; SAMSO, 1980; GARCIA DONCEL, 1982). Esta obra introduce en la península ibérica teoremas tan fundamentales como el del seno, el del coseno, el de Geber y la regla de las cuatro cantidades, así como un método de interpolación cuadrática. Sin embargo, este mismo autor cultiva en las *Tabulae Jahen* (HERMELINK, 1962-66) el tipo de trigonometría elemental para el uso de las tablas astronómicas, destinada quizá a un público de *muwaqqits* y astrólogos. Esta curiosa coexistencia de dos tipos de trigonometría se prolonga en los siglos XII y XIII. Aunque todavía está por determinar el posible influjo del *Kitāb maŷhūlāt*, la tendencia que representa aparece recogida en el siglo XII por Ŷābir b. Aflaḥ al-Isbīlī (LORCH, 1973), cuya obra fue repetidamente traducida, teniendo gran influencia en Europa y en particular en Regiomontano.

II. Fundamentos de la trigonometría. Construcción de tablas

El capítulo XXXVII del *Libro de las Tablas Alfonsíes* (RICO, IV, p. 163-167), titulado *Cuemo se a de saber el signo. et el complimiento. et la cuerda. et la saeta. cada uno dellos por ell archo. et cuemo se saurá ell archo por qualquiera dellos por cuenta et por taula*, constituye la fundamentación básica de la trigonometría.

Merece especial atención, no porque ofrezca ningún avance en el conocimiento trigonométrico desde el punto de vista interno, sino por el carácter de la exposición. Estructurado en dos partes claramente diferenciadas, la primera de ellas está basada en la tradición griega (cuerdas) y es de indudable inspiración tolemaica y la segunda recoge la tradición india (senos). Pero lo que más llama la atención es que en este capítulo se alcanzan las mayores cotas de "teorización" trigonométrica dentro de la obra, y ésta es una afirmación que hay que matizar situándola en el contexto de la obra estudiada. En este apartado, como en toda la obra, no va a aparecer ni una sola demostración, ni siquiera cuando se apoye en Tolomeo; tampoco es un brillante compendio de recopilación de la tradición trigonométrica anterior como sucede en el caso del *Libro de los fundamentos de las tablas astronómicas* de Abraham ibn ᶜEzra (MILLAS, 1947), ni se trata en modo alguno de una obra de síntesis. Sin embargo, la estructuración del capítulo y las motivaciones aducidas al introducir cada una de las partes que lo componen ofrecen una clara visión del problema trigonométrico y de sus aplicaciones, que revela un elevado grado de comprensión del tema por parte del autor. En efecto, se empieza por considerar el problema de la longitud de la circunferencia, utilizando la imposibilidad de conocer con exactitud el valor de π como argumento justificador de la introducción del concepto de cuerda como medida de relación entre la longitud de un arco de circunferencia y el diámetro de la misma. Una vez construida la tabla de cuerdas, se definen las principales funciones trigonométricas —seno, coseno, seno verso— y las fórmulas que las interrelacionan aduciendo que son estas funciones las utilizadas en *astrología*, quedando las cuerdas únicamente como base de las mencionadas funciones (huelga decir que el concepto de función no aparece para nada en el texto). Por un lado, aquí aparecen unificadas la tradición griega e hindú como partes de un todo con una perfecta estructura lógica interna. Por otro lado se expresa claramente la opción por una Trigonometría instrumental al servicio de la Astronomía, porque en definitiva de una obra astronómica se trata. Es este enfoque de la Trigonometría así expresado, junto con algunos resultados implícitos que aparecerán en otros capítulos —posible conocimiento del teorema del seno, por ejemplo—, lo que puede llevar a plantearse el tema del alcance real del saber trigonométrico alfonsí frente a su aparente rudimentareidad. Esta cuestión volverá a salir a lo largo del presente trabajo; quede así planteada por el momento y pasemos al análisis del texto.

Para la longitud de la circunferencia se da el valor $l = (3+\frac{8\frac{1}{2}}{60}) \cdot d$ siendo d el diámetro, es decir, $\pi = 3.1416$. Si bien el texto cita a Tolomeo (Alm. IX), que ciertamente da el valor de 3;08,30° —o sea, $3 + 8/60 + 1/120$, valor que se obtiene de asimilar la longitud de la cuerda de 1° dada por Tolomeo a la longitud del arco de 1°, multiplicar este valor por 360 para obtener la longitud de la circunferencia y dividir por la longitud del diámetro, que para Tolomeo es de 120 partes—, la fórmula así expresada aparece en el *Libro de Geometría* de Abraham bar Ḥiyya (ed. MILLAS, 1931, p. 74).

La construcción de la tabla de cuerdas se hace siguiendo a Tolomeo (*Alm.* IX), aunque suprimiendo las demostraciones y algunos resultados dados por éste y variando ocasionalmente el orden de exposición. Comienza dividiendo el diámetro en 120 partes y la circunferencia en 360° —la terminología *partes* y *grados* se utiliza en el texto indistintamente para designar cuerdas y arcos, por lo que aquí utilizaremos grados para los arcos y partes para las cuerdas, sin que ello signifique que aparezca así en el original[1]— y parte del resultado crd 60° = 60^p para ir dando resultados concretos aunque indicando la validez general de los procedimientos empleados:

$$\text{crd } 120° = (d^2 - \text{crd}^2 60°)^{\frac{1}{2}} = 103;55,23^p$$

$$\text{crd } 36° = (r^2 + (\tfrac{r}{2})^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{r}{2} = 67;04,55^p - \frac{r}{2} = 37;04,55^p \quad \text{donde } r = \frac{d}{2}$$

$$\text{crd } 144° = (d^2 - \text{crd}^2 36°)^{\frac{1}{2}} = 114;07,36^p \longrightarrow \text{crd } (180° - \alpha) = (d^2 - \text{crd}^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

(Error de copia o de redondeo puesto que el valor que da Tolomeo es $114;07,37^p$).

$$\text{crd } 30° = (\frac{d - \text{crd } 120°}{2} \cdot d)^{\frac{1}{2}} = 31;03,30^p \longrightarrow \text{crd } \frac{\alpha}{2} = (\frac{d - \text{crd}(180° - \alpha)}{2} \cdot d)^{\frac{1}{2}}$$

A partir de aquí y con los procedimientos expuestos puede obtenerse crd 15°, crd 7;30°, crd 18°, crd 9°, y crd 4;30°. A continuación y mediante el resultado:

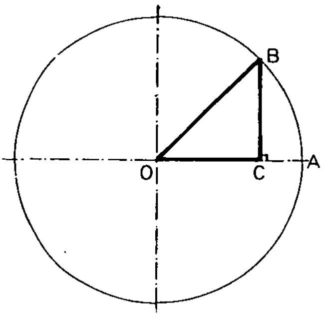
$$\text{crd}\ (180° - (\alpha + \beta)) = \frac{\text{crd}(180° - \alpha).\text{crd}(180° - \beta) - \text{crd}\ \alpha.\text{crd}\ \beta}{d}$$

obtiene a partir de crd 4;30° y crd 7;30° el valor crd 168° = 119;20,30°, error de copia, ya que el valor dado por Tolomeo es 119, 20,34^p. El proceso sigue con crd 12° = 12;32,36^p, crd 6° = 6;16,49^p, crd 3° = 3;08,28^p, crd 1; 30° = 1; 34, 15^p y crd 0;45° = 0;47,08^p. Estos valores parecen haber sido tomados de Tolomeo sin recalcular; por eso, el valor de crd 12° coincide con el de Tolomeo, que lo calcula a partir de crd 72° y crd 60° mediante la formula:

$$\text{crd}\ 12° = \text{crd}\ (72° - 60°) = \frac{\text{crd}\ 72°.\text{crd}(180° - 60°) - \text{crd}\ 60°.\text{crd}(180° - 72°)}{d}$$

sin embargo, el texto alfonsí no incluye en su exposición el procedimiento para hallar la cuerda de la diferencia de dos arcos, por lo que debería calcular crd 12° a partir de crd 168° lo que le daría crd 12° = 12;32,31^p tomando crd 168° = 119;20,34^p ó crd 12° = 12;33,09^p tomando crd 168° = 119;20,30^p. Finalmente explica la imposibilidad de conocer la cuerda de un arco que no sea mitad, suma o complementario de los anteriormente citados. Planteado así el problema de la cuerda de un grado, admite el procedimiento de Tolomeo —crd 1° = crd 0;45° + 1/3.crd 0;45°— y toma, probablmente por error de copia , el valor crd 1° = 1;02,05^p —el valor de Tolomeo es 1;02,50^p— aunque advirtiendo que el procedimiento no es exacto, por no ser la proporción entre cuerdas igual a la proporción entre arcos, pero admitiendo la pequeñez de del error cometido. Y con ésto se está en condiciones de componer una tabla de cuerdas, hallándolas por procedimientos geométricos —expresados en las fórmulas— o bien por el método de la proporción —caso de crd 1°—.

La parte dedicada a las funciones trigonométricas comienza con la definición geométrica del seno (*signo*) del arco AB de la circunferencia de centro 0 como el segmento BC de la perpendicular a OA que pasa por B. El seno verso (*saeta*) será el segmento CA (fig. 1) y, por definición coseno, α = sen (90°- α) (*signo del complimiento*). Si bien este modo de introducir el seno constituye práctica habitual en la tradición árabe, lo cierto es que en este caso concreto contribuye de manera fundamental a que la



(Fig. 1)

definición de las funciones trigonométricas se produzca de manera lógica y quede ensamblada de forma natural en la exposición de las bases de la trigonometría. La simple observación de la fig. 1 hace evidente el resultado:

$$\text{sen } \alpha = 1/2.\ \text{crd } (2\alpha) \text{ para } \alpha<90^\circ \quad (1)$$

que interrelaciona esta parte del capítulo con la anterior. Esto no ocurriría de definirse el seno mediante un triángulo rectángulo. Además se introducen las siguientes fórmulas para facilitar el manejo de tablas —que normalmente van de 0° a 90° en el caso de senos y de 0° a 180° en el caso de cuerdas—:

$\text{sen } \alpha = \text{sen}(180-\alpha)$ si $90<\alpha<180$ y aplicar (1)

$\text{sen } \alpha = \text{sen}(\alpha-180)$ si $180<\alpha<270$ y aplicar (1), fórmula correcta en valor absoluto

$\cos \alpha = \text{sen}(90-(180-\alpha))$ si $\alpha>90$, donde de nuevo ignora el signo

$\text{seno verso } \alpha = (\text{crd}^2\ \alpha-\text{sen}^2\ \alpha)^{1/2}$, evidente por construcción geométrica

$\text{crd } \alpha = \text{crd}(360-\alpha)$ si $\alpha>180$

$\text{seno verso } \alpha = \text{seno verso}(360-\alpha)$ si $\alpha>180$

Finaliza este capítulo refiriéndose al manejo de tablas trigonométricas. Fórmulas de este tipo reaparecen en los capítulos LXXVII, LXXVIII y LXXIX del *Libro de la Azafea* (RICO, III, p. 223-234) al explicar el manejo de un cuadrante de senos:

seno verso α = 60-sen(90-α), ya que r = 60

90-arcsen(60-seno verso α) = α (por supuesto no aparece el término arcsen)

seno verso α = 60-sen(90-arcsen(sen α))

sen α = sen(90-arcsen(60-seno verso α))

Y en el capítulo LXXX del mismo libro (RICO, III, p. 224):

crd α = 2.sen(α/2) si α<180

crd α = 2.sen((360-α)/2) si α>180

crd α = crd(360°-α)

$$2.\mathrm{arcsen}\,\frac{\mathrm{crd}\ \alpha}{2} = \alpha = 360° - \alpha$$

Dentro del mismo *Libro de las Tablas Alfonsíes*, el capítulo LI (RICO, IV, p. 180) completa el conocimiento de las funciones trigonométricas y de las fórmulas que las interrelacionan con los siguientes resultados:

(2) sombra espandida $\alpha = 12 \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\ \alpha}$ (= 12.cotg α)

(3) sombra minguada $\alpha = 12 \cdot \dfrac{\mathrm{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$ (= 12.tg α)

(4) sombra espandida α = 144/sombra minguada α

(5) sombra minguada α = 144/sombra espandida α

Estas definiciones tienen la peculiaridad de que, conservando el sistema usual de las tablas de sombras —altura del sol en función de la sombra proyectada por éste al incidir sus rayos sobre un gnomon de 12 *dedos*— manifiestan claramente la relación existente entre las funciones trigonométricas anteriormente definidas —seno, coseno— y las sombras, lo cual no es muy habitual en la tradición andalusí —excepción hecha de Ibn Muᶜāḏ, que calcula su tabla de tangentes para r = 1 mediante el cociente sen α /cos α [2]—. Es decir, se mantiene el uso de la vieja tradición trigonométrica aún conociendo los resultados necesarios para dar un paso significativo en la simplificación del cálculo trigonométrico y astronómico como es el uso de r = 1.

Para hallar la altura dada una de las sombras se dan los siguientes resultados:

$$(6)\quad \text{sen}\ \alpha = \frac{12}{(\text{sombra espandida}^2\ \alpha+144)^{1/2}}$$

$$(7)\quad \text{sen}\ \alpha = \frac{60.\text{sombra minguada}\ \alpha}{(\text{sombra minguada}^2\ \alpha+144)^{1/2}}$$

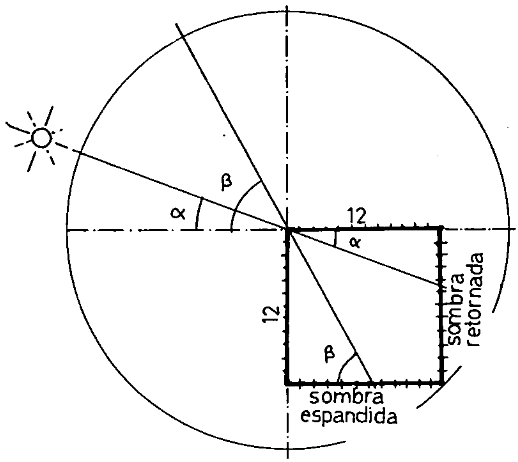
y a continuación tomar arcsen (*archéalo archeamiento de los signos*)[3]. Ambas fórmulas son correctas, sólo que (6) da el seno para r = 1 y (7) para r = 60, que es lo habitual en la época. Además el tener que tomar arco seno implica el uso de tablas o cuadrantes de senos, ambos construidos para r = 60, por lo que parece más aconsejable pensar en un error de copia que ha hecho que (6) no aparezca multiplicada por 60. De hecho, esta fórmula reaparece multiplicada por 60 —aunque utilizando el término *sombra llana* para la cotangente— en el capítulo LXXXI del *Libro de la Azafea* (RICO, III, p. 225), donde también se encuentran las fórmulas (2) y (3) y se añade:

$$\alpha = 90-\text{arcsen}(12.60/((\text{sc}\ \alpha)^2+144)^{1/2}),$$

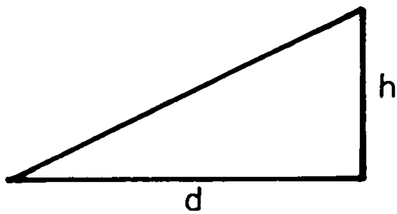
donde $\text{sc}\ \alpha = \text{sombra conversa}\ \alpha = 12.\text{tg}\ \alpha$

El hecho de que el *Libro de la Azafea* sea traducción de una obra de Azarquiel (s. XI) pone de manifiesto una vez más el apego de los textos alfonsíes a la tradición trigonométrica anterior y la falta de avances significativos. Porque si en un autor suficientemente difundido como es Azarquiel se encuentra ya documentada la relación entre las sombras y las funciones trigonométricas seno y coseno, parece natural pensar que en el siglo XIII esta noción estuviera ya asimilada como para permitir la introducción del uso de r = 1 en las tablas de tangentes, sin que ello supusiera una ruptura importante con el movimiento de inercia que parece dominar al quehacer científico alfonsí.

En el *Libro de la Lámina Universal* el tema de las sombras se trata desde un punto de vista totalmente práctico (RICO, III, p. 77, 90-91). Tras explicar que el sol alcanza su altura máxima a mediodía y que tendrá *sombra espandida* si dicha altura es menor que 90°, pasa a describir el manejo del cuadrado de sombras (fig. 2) auxiliándose de las fórmulas (4) y (5) para los casos en que una de las dos sombras sea mayor que 12 y utilizando



(Fig. 2)



(Fig. 3)

el término *sombra retornada* para la tangente. Este libro es traducción de una obra de ’Alī b. Jalaf, contemporáneo de Azarquiel; y este caso concreto sirve para ilustrar la coexistencia a partir del siglo XI de las dos corrientes trigonométricas —*práctica* y *teórica*—, y la inclinación alfonsí por la primera de ellas.

El Libro del *Cuadrante o Cuarto de Círculo de Corredera* sigue en esta misma línea ilustrando el manejo y construcción del cuadrado de sombras (RICO, III, p. 303-304, 312-315). Explica que si $\alpha > 45°$ la alidada cae sobre la *sombra espandida* y en caso contrario sobre la *sombra conversa* (tangente) para aplicarlo a problemas de altura/distancia, en los que $h > d$ en el primer caso y $h < d$ en el segundo (fig. 3). Finalmente explica el manejo del cuadrado de sombras, apoyándose en las fórmulas (4) y (5) y expone muy confusamente lo que parece querer ser un procedimiento de interpolación lineal para cuando la aliada no señala exactamente un *dedo* de altura determinado.

Finalmente, el *Libro del Relogio de la piedra de la sombra* aporta el resultado *sombra conversa* (90- α) = *sombra espandida* α (RICO, IV, p. 23).

Veamos finalmente las tablas trigonométricas que completan este apartado de conceptos y relaciones básicas.

En el *Libro del Relogio de la piedra de la sombra* aparece una tabla de senos calculada de grado en grado desde 1° hasta 90° para r = 60. Los valores del seno están calculados hasta la primera fracción sexagesimal —*grados* y *menudos*— y parecen haber sido obtenidos a partir de la tabla de al-Jwārizmī al-Battānī (Nallino, 1899-1907, II, pp. 55-56) por redondeo de la segunda fracción sexagesimal. Unos cuantos ejemplos bastan como muestra (RICO, IV, p. 10):

Grados	Seno (Alf. X)	Seno (Bat.)
1°	1;03	1;02,50
2°	2;06	2;05,38
3°	3;08	3;08,25
6°	6;16	6;16,18
10°	10;25	10;25,08
16°	16;32	16;32,18
17°	17;32	17;32,33 x
20°	20;31	20;31,16
25°	25;21	25;21,25
30°	30;00	30;00,00
35°	34;25	34;24,53
40°	38;34	38;34,02
45°	42;26	42;25,35
50°	45;58	45;57,46
60°	51;58	51;57,42
63°	53;27	53;27,38 x
70°	56;23	56;22,54
80°	59;05	59;05,19
85°	59;46	59;46,19
88°	59;57	59;57,49 x
89°	59;59	59;59,27
90°	60;00	60;00,00

Este muestreo recoge los tres únicos valores para los que no se ha efectuado el redondeo correspondiente —por exceso en los tres casos—. Sin embargo, si pensamos en una tabla escrita en números romanos —tal como aparece en la edición de Rico y Sinobas— estos errores son fácilmente atribuibles a errores de copia —el descuido de un I confunde un 2 con un 3 y un 7 con un 8—.

Más interesante resulta el caso de las tablas de tangente/cotangente. La tabla de cotangentes (RICO, IV, p. 8) está calculada hasta la primera fracción sexagesimal, de 1° a 90° para un gnomon igual a 12. La tabla de tangentes (RICO, II, p. 79) está calculada hasta la primera fracción sexagesimal, de 1° a 45° para $g = 12$. Ninguna de las dos proviene directamente de la tabla de cotangentes de al-Jwārizmī/al-Battānī como suele ser frecuente en la tradición hispánica medieval; de hecho, la tabla de tangentes parece haber sido calculada a partir de la tabla de senos de al-Battānī mediante la fórmula (3). Pero esta hipótesis no se confirma en la tabla de cotangentes para $\alpha < 45$: aunque la tabla de tangentes y la de cotangentes parecen haber sido calculadas del mismo modo y tener un origen común puesto que conservan la relación $\mathrm{tg}\ \alpha = \mathrm{ctg}\ (90 - \alpha)$, en la tabla de cotangentes no se cumple $12\ \mathrm{ctg}\ (90 - \alpha) = 12.\mathrm{sen}\ \alpha / \cos \alpha$ tomando para el seno y el coseno los valores de al-Battānī y redondeando la segunda fracción sexagesimal en el resultado obtenido, y no se cumple únicamente para $\alpha < 45°$, es decir, para los valores que no aparecen calculados en la tabla de tangentes.

Grd.	A	B	C	D	E
1°	687;26	687;29	687;25,41	x	
2°	683;29	343;38	343;38,57	x	x
3°	228;58	228;58	228;57,50		
4°	171;36	171;36	171;36,46		x
5°	137;10	137;10	137;09,31		
6°	115;10	114;10	114;10,24	x	x
7°	97;45	97;44	97;43,53	x	x
8°	85;23	85;23	85;22,58		
9°	75;46	75;46	75;45,53		
10°	68;03	68;03	68;03,20		
11°	61;45	61;44	61;44,03	x	x
12°	56;27	56;27	56;27,20		
13°	51;59	51;59	51;58,41		
14°	48;08	48;08	48;07,46		
15°	45;46	44;47	44;47,04	x	x
16°	41;51	41;51	41;50,56		
17°	39;55	39;15	39;14,59	x	x
18°	36;55	36;56	36;55,57	x	x
19°	35;51	34;51	34;51,01	x	x
20°	32;58	32;58	32;58,12		
21°	31;56	31;16	31;15,40	x	x
22°	29;42	29;42	29;42,04		
23°	28;16	28;16	28;16,13		
24°	26;57	26;57	26;57,09		
25°	25;45	25;44	25;44,03	x	x
26°	24;36	24;36	24;36,14		
27°	23;33	23;33	23;33,05		
28°	22;34	22;34	22;34,07		
29°	21;40	21;40	21;38,55		x
30°	20;47	20;47	20;47,05		
31°	19;58	19;58	19;58,07		

A) ctg según Alfonso X; B) ctg según al-Battani; C) 12.sen (90- α)/ sen α ; D) valores discordantes entre A y B; E) valores discordantes entre A y C.

Grd.	A	B	C	D	E
32°	19;12	19;12	19;12,14		
33°	18;29	18;29	18;28,42		
34°	17;47	17;47	17;47,26		
35°	17;08	17;08	17;08,16		
36°	16;28	16;31	16;30,60	x	x
37°	15;55	15;55	15;55,28		
38°	15;21	15;21	15;21,33		x
39°	14;49	14;49	14;49,07		
40°	14;48	14;18	14;18,04	x	x
41°	13;48	13;48	13;48,16		
42°	13;20	13;20	13;19,38		
43°	12;52	12;52	12;52,06		
44°	12;26	12;26	12;25,35		

A) ctg según Alfonso X; B) ctg según al-Battani; C) 12.sen (90- α)/ sen α ; D) valores discordantes entre A y B; E) valores discordantes entre A y C.

De los muchos valores discordantes, algunos son fácilmente atribuibles a errores de copia —confusión con la linea superior por ejemplo—, como en el caso de 2°, 17°, 21° y 40° o en el de 6°, 15° y 19° —no suelen producirse errores de un grado en los cálculos—. En cualquier caso, las columnas D y E dan prácticamente los mismos errores, por lo que parece más fácil pensar que esta parte de la tabla sea una mala copia de la tabla de al-Battānī. Veamos como cambia la situación en la segunda parte de la tabla:

Grd.	A	B	C	D	E
45°	12;00	12;00	12;00,00		
46°	11;34	11;35	11;35,18	x	x
47°	11;11	11;11	11;11,25		
48°	10;48	10;48	10;48,17		
49°	10;26	10;26	10;25,53		
50°	10;04	10;04	10;04,09		
51°	9;43	9;43	9;43,03		
52°	9;22	9;22	9;22,32		x
53°	9;03	9;03	9;02,34		
54°	8;43	8;43	8;43,07		
55°	8;25	8;24	8;24,09	x	x
56°	8;06	8;06	8;05,39		
57°	7;48	7;48	7;47,34		
58°	7;30	7;30	7;29,54		
59°	7;13	7;13	7;12,37		
60°	6;56	6;56	6;55,41		
61°	6;39	6;39	6;39,06		
62°	6;23	6;23	6;22,50		
63°	6;07	6;07	6;06,51		
64°	5;51	5;51	5;51,10		
65°	5;36	5;36	5;35,44		
66°	5;21	5;21	5;20,34		
67°	5;06	5;06	5;05,37		
68°	4;51	4;51	4;50,54		
69°	4;36	4;36	4;36,23		
70°	4;22	4;22	4;22,03		
71°	4;08	4;08	4;07,55		
72°	3;54	3;54	3;53,56		
73°	3;40	3;40	3;40,08		
74°	3;26	3;26	3;26,27		
75°	3;13	3;13	3;12,55		
76°	3;00	2;59	2;59,31	x	
77°	2;46	2;46	2;46,13		
78°	2;33	2;32	2;33,02	x	

Grd.	A	B	C	D	E
79°	2;20	2;19	2;19,57	x	
80°	2;07	2;06	2;06,57	x	
81°	1;54	1;54	1;54,02		
82°	1;41	1;41	1;41,11		
83°	1;28	1;28	1;28,24		
84°	1;16	1;15	1;15,40	x	
85°	1;03	1;02	1;02,60	x	
86°	0;55	0;50	0:50,21	x	x
87°	0;38	0;37	0;37,44	x	
88°	0;25	0;25	0;25,09		
89°	0;12	0;12	0;12,34		x
90°	0;00	0;00	0;00,00		

Aquí sí que puede afirmarse claramente que esta parte de la tabla ha sido computada por el método correspondiente a la columna C). La tabla de tangentes equivalente sólo se diferencia en los valores tg 90° = 1;55 (ctg 81° = 1;54), tg 35° = 8;24 (ctg 55° = 8;25) y tg 43° = 11;40 (ctg 47° = 11;11) —este último valor es un claro error de copia puesto que contradice el carácter monótono creciente de la tangente—.

En el *Libro del Astrolabio Redondo* aparece una tabla de arcostangente calculada de 0;15° en 0;15° para un gnomon igual a 12 (RICO, II, p. 145). A pesar de no ser habitual en la tradición medieval el cómputo de este tipo de tabla, en los *Libros del Saber de Astronomía* volvemos a encontrarla en el *Libro de la Azafea* (RICO, III, p. 146) y en el *Libro del Cuadrante* (RICO, III, p. 305), en este último caso calculada de 0;30° en 0;30°. Como se ve en la tabla siguiente, el cómputo no ha sido hecho ni mediante interpolación lineal ni mediante interpolación cuadrática de la tabla de tangentes o de senos alfonsí —equivalentes a la de al-Battānī, según hemos visto—. Lo cual es lógico, porque los valores del arcotangente alfonsí son aproximaciones muy malas, y por lo tanto no pueden ser el resultado de interpolar una buena tabla:

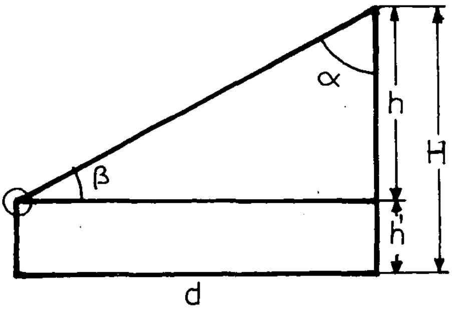
SOMBRA	ALTURA A	B	C	D	E
0;15,00	1;11,36	1;11,37	1;11,37	1;13,50	1;13,50
0;30,00	2;23,09	2;23,10	2;23,09	2;23,04	2;25,19
0;45,00	3;34,34	3;34,35	3;34,35	3;24,42	3;21,19
1;00,00	4;45,49	4;45,49	4;45,48	4;34,40	4;38,10
1;15,00	5;56,48	5;56,49	5;56,49	5;52,23	5;52,07
1;30,00	7;07,30	7;07,30	7;07,29	7;06,13	7;06,27
1;45,00	8;17,49	8;17,50	8;17,49	8;14,21	8;13,15
2;00,00	9;27,44	9;27,46	9;27,44	9;23,43	9;25,17
2;15,00	10;37,10	10;37,11	10;37,10	10;37,31	10;37,41
2;30,00	11;46,05	11;46,07	11;46,06	11;43,57	11;43,23
2;45,00	12;54,26	12;54,28	12;54,27	12;55,08	12;55,25
3;00,00	14;02,10	14;02,10	14;02,10	14;00,00	14;00,00
3;15,00	15;09,14	15;09,16	15;09,15	15;09,13	15;09,32
3;30,00	16;15,36	16;15,38	16;15,36	16;17,08	16;17,25
3;45,00	17;21,14	17;21,17	17;21,14	17;20,28	17;20,10
4;00,00	18;26,05	18;26,09	18;26,06	18;22,55	18;22,30
4;15,00	19;30,08	19;30,12	19;30,09	19;27,12	19;26,52
4;30,00	20;33,21	20;33,26	20;33,23	20;33,02	20;33,56
4;45,00	21;35,43	21;35,46	21;35,43	21;36,00	21;36,18
5;00,00	22;37,11	22;37,15	22;37,12	22;34,30	22;33,53
5;15,00	23;37,45	23;37,49	23;37,45	23;34,54	23;35,14
5;30,00	24;37,24	24;37,29	24;37,26	24;36,00	24;36,00
5;45,00	25;36,07	25;36,12	25;36,09	25;36,00	25;36,28
6;00,00	26;33,54	26;33,58	26;33,54	26;33,45	26;33,45
6;15,00	27;30,43	27;30,47	27;30,43	27;30,00	27;30,18
6;30,00	28;26,34	28;26,39	28;26,34	28;25,13	28;25,22
6;45,00	29;21,27	29;21,31	29;21,27	29;18,52	29;18,38
7;00,00	30;15,23	30;15,26	30;15,23	30;12,17	30;12,29
7;15,00	31;08,20	31;08,22	31;08,20	31;07,03	31;07,14
7;30,00	32;00,19	32;00,18	32;00,18	32;00,00	32;00,00
7;45,00	32;51,20	32;51,23	32;51,20	32;49,59	32;49,59
8;00,00	33;41,24	33;41,28	33;41,23	33;39,59	33;40,14

	ALTURA				
SOMBRA	A	B	C	D	E
8;15,00	34;30,30	34;30,35	34;30,29	34;28,57	34;28,50
8;30,00	35;18,40	35;18,44	35;18,40	35;17,29	35;18,17
8;45,00	36:05,53	36;05,56	36;05,54	36;05,48	36;05,31
9;00,00	36;52,11	36;52,14	36;52,11	36;49,23	36;48,53
9;15,00	37;37,34	37;37,40	37;37,34	37;37,06	37;38,06
9;30,00	38;22,02	38;22,08	38;22,02	38;22,51	38;23,04
9;45,00	39;05,37	39;05,40	39;05,38	39;05,32	30;05,30
10;00,00	39;48,20	39;48,25	39;48,21	39;47,06	39;47,02
10;15,00	40;30,10	40;30,17	40;30,10	40;29,05	40;29,32
10;30,00	41;11,09	41;11,13	41;11,09	41;10,35	41;10,39
10;45,00	41;51,18	41;51,21	41;51,18	41;50,19	41;50,23
11;00,00	42;30,37	42;30,44	42;30,37	42;29,36	42;29,23
11;15,00	43;09,08	43;09,12	43;09,08	43;08,59	43;09,39
11;30,00	43;46,52	43;46,58	43;46,53	43;49,15	43;49,56
11;45,00	44;23,48	44;23,57	44;23,57	44;25,23	44;25,23

(A) Solución teórica.
(B) Interpolación lineal en tabla de senos.
(C) Interpolación cuadrática en tabla de senos.
(D) Interpolación lineal en tabla de tangentes.
(E) Interpolación cuadrática en tabla de tangentes.

III. Problemas de aplicación práctica

Los capítulos relativos a la aplicación de la trigonometría a problemas prácticos de altura/distancia aparecen agrupados —y a menudo repetidos— en el *Libro de la Azafea* (RICO, III, p. 223-237) y en el *Libro del Cuadrante o Cuarto de Círculo de Corredera* (RICO, III, p. 312-316). Es importante señalar a la hora de evaluar el nivel de los conocimientos trigonométricos que aquí se exponen que el *Libro de la Azafea* es una traducción —por cierto, muy literal— de Azarquiel (1029-1100) (MILLAS VALLICROSA, 1943-1950). Teniendo presente el carácter fundamentalmente práctico de la obra de este último se explican algunas de las características que más adelante encontraremos en el texto, como por ejemplo la aproximación en la medición. Aunque esta conexión con Azarquiel pueda parecer lógica en una obra como ésta, dedicada a una ciencia aplicada, no hay que olvidar que para el siglo XIII los conocimientos de Azarquiel resultan ya rudimentarios desde el punto de vista matemático, sobre todo si tenemos en cuenta que los resultados introducidos por Ibn Muᶜāḏ y Ibn Aflaḥ en los siglos XI y XII, aunque presentados desde un punto de vista teórico, simplifican enormemente el cálculo, por lo que tienen gran aplicación en el campo de la Astronomía; y si bien en el caso de Ibn Muᶜāḏ nos faltan pruebas de la transmisión e influjo de su obra, no ocurre lo mismo con Ibn Aflaḥ, cuya obra fue traducida al latín en el siglo XII por Gerardo de Cremona.



(Fig. 4)

El primer y más sencillo tipo de problemas consiste en hallar la altura de un cuerpo conocida la distancia que de él nos separa (fig. 4):

$$\frac{\text{sombra llana } \alpha . d}{12} + h' = H \qquad \text{(RICO, III, p. 227)}$$

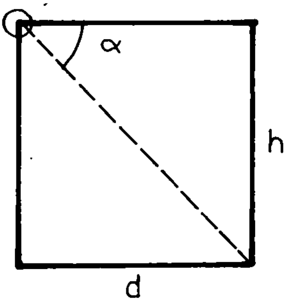
$$\frac{12}{\text{sombra espandida } \beta} = \frac{h}{d} \quad \text{luego} \quad \frac{12 . d}{\text{sombra espandida } \beta} + h' = H \quad \text{(RICO, III, p.314)}$$

$$\frac{\text{sombra conversa } \beta}{12} = \frac{h}{d} \quad \text{luego} \quad \frac{\text{sombra conversa } \beta . d}{12} + h' = H$$

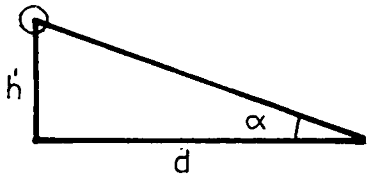
(RICO, III, p. 314)

También aparece especificado el caso $\alpha = \beta = 45°$ (RICO, III, p. 314-315), donde $h = d$ y $H = h+h' = d+d'$.

La misma contrucción geométrica es válida para hallar la profundidad o nivel de agua de un pozo (fig. 5).



(Fig. 5)



(Fig. 6)

$$h = \frac{12.d}{\text{sombra llana } \alpha} \qquad \text{(RICO, III, p. 230)}$$

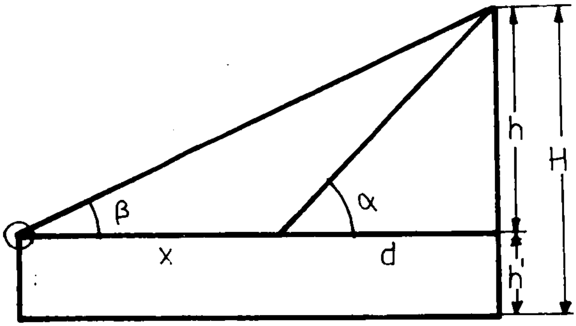
$$h = \frac{d}{\frac{\text{sombra espandida } \alpha}{12}} \qquad \text{(RICO, III, p. 315-316)}$$

Este es el único problema ilustrado con un ejemplo numérico, para d = 6 palmos y *sombra espandida* = 2 *dedos* (RICO, III, p. 315-316).

El problema inverso, es decir, hallar la distancia que nos separa de un cuerpo dada la altura del mismo, aparece al hallar la anchura de un río (fig. 6):

$$d = \frac{\text{sombra llana } \alpha . h'}{12} \qquad \text{(RICO, III, p. 227)}$$

El siguiente grado de complicación consiste en hallar la distancia *d* que nos separa de un cuerpo de altura *h* desconocida haciendo dos mediciones desde dos puntos distintos separados entre sí por una distancia *x* conocida (fig. 7):



(Fig. 7)

$$d = \frac{\text{sombra llana } \alpha}{\text{s. llana } \beta - \text{s. llana } \alpha} \cdot x \qquad \text{(RICO, III, p. 228)}$$

Esta misma situación se repite en el capítulo XCV del *Libro de la Azafea* (RICO, III, p. 232-233), aunque aquí uno de los puntos desde los que se realiza la medición corresponde al punto de caida de la sombra del sol sobre la tierra; en este caso el problema se resuelve mediante la fórmula:

$$d+x = \frac{\text{sombra llana } \beta}{\text{s. llana } \beta - \text{s. llana } \alpha} \cdot x$$

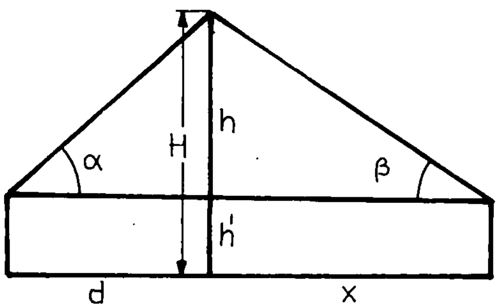
pudiéndose ya hallar *h* y H. También con la altura como incógnita, aunque con la particularidad de que los dos puntos de mira corresponden a dos personas distintas que realizan las mediciones, aparece en el capítulo XCVI del *Libro de la Azafea* (RICO, III, p. 233-234) el mismo problema resuelto mediante la fórmula errónea:

$$\frac{1}{12} \text{ (sombra llana } \beta - \text{sombra llana } \alpha) \cdot x + h' = H$$

siendo la correcta:

$$H = h' + \frac{12 \cdot x}{\text{s. llana } \beta - \text{s. llana } \alpha}$$

El error, probablemente de copia, aparece también en la versión árabe en 100 capítulos del *Libro de la Azafea*[4]. En este problema se aconseja la conveniencia de que la distancia x sea lo mayor posible, probablemente para que los ángulos α y β sean lo suficientemente distintos como para permitir el manejo de los instrumentos astronómicos y las tablas trigonométricas con un margen de error aceptable. Una variación a este esquema se presenta cuando la sombra de sol y el punto de mira están en sentidos opuestos (fig. 8):



(Fig. 8)

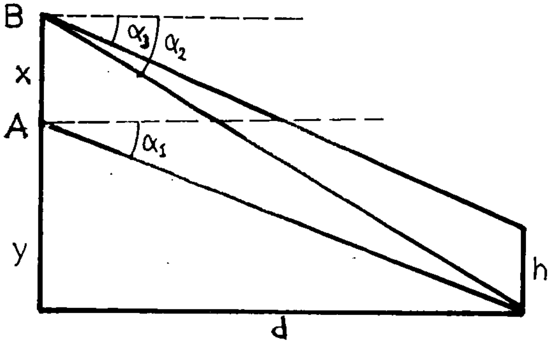
$$d = \frac{(d+x).\text{sombra llana } \alpha}{\text{s. llana } \alpha + \text{s. llana } \beta} \qquad \text{(RICO, III, p. 232-233)}$$

$$H = h' + \frac{d+x}{\text{s. llana } \alpha + \text{s. llana } \beta} \qquad \text{(RICO, III, p. 233-234)}$$

en el caso de las dos personas.

Hay que señalar que la terminología utilizada (*sombra del sol*, *sombra del cuerpo*) es a menudo confusa y dificulta la interpretación del texto, por lo que en cada caso se ha escogido la representación que siendo verosímil desde el punto de vista práctico permita el planteamiento y la resolución del problema desde el punto de vista matemático según la da el texto. En cualquier caso, la variedad de posibilidades que se ofrecen en el texto en cuanto a datos, incógnitas y posiciones revela el carácter fundamentalmente práctico al que antes aludíamos. Realmente no se está profundizando en el conocimiento trigonométrico —que se reduce al uso de tangentes y cotangentes— ni matemático —sólo se utilizan sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas— ni se está ampliando estrictamente el campo de aplicación de estas técnicas; se trata simplemente de aportar soluciones —en muchos casos verdaderamente ingeniosas— para la resolución de problemas y situaciones cotidianas. Problemas similares se encuentran también en el *Libro del Astrolabio Llano* (MARTI, VILADRICH, 1983, p. 51-62).

El problema de hallar la altura *h* de un cuerpo del que estamos alejados a una distancia *d* desconocida se complica cuando dicho cuerpo está situado a un nivel inferior al nuestro. El problema se resuelve realizando dos mediciones desde los puntos A y B separados entre sí por una altura conocida *x* (fig. 9):

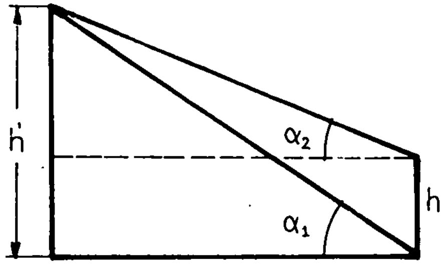


(Fig. 9)

$$h = \frac{x}{\frac{sc\ \alpha_2 - sc\ \alpha_1}{sc\ \alpha_2}} - \frac{\frac{x/(sc\ \alpha_2 - sc\ \alpha_1/sc\ \alpha_2)}{sc\ \alpha_2/12}}{s\ 11\ \alpha_3/12}$$

$$y = \frac{x}{\frac{sc\ \alpha_2 - sc\ \alpha_1}{sc\ \alpha_2}} - x$$

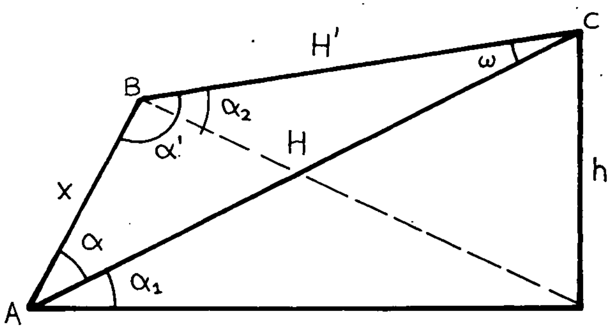
donde sc = *sombra conversa* y s11 = *sombra llana* (RICO, III, p. 228). El texto contiene dos errores, uno procedente del texto árabe al que antes ha aludido y el otro debido a una mala copia de este texto[5]. Más sencillo resulta en apariencia el siguiente procedimiento (fig. 10):



(Fig. 10)

$$h = h' \cdot \frac{\operatorname{sc}\alpha_1 - \operatorname{sc}\alpha_2}{\operatorname{sc}\alpha_1} \qquad \text{(RICO, III, p. 231-232)}$$

Sin embargo el cálculo de h' lo remite al capítulo que a continuación vamos a ver. Se trata de nuevo de hallar la altura de un cuerpo situado a distancia desconocida mediante dos mediciones realizadas desde dos puntos cualesquiera —no necesariamente formando línea recta con la base del cuerpo en cuestión como hasta ahora— A y B. (fig. 11):



(Fig. 11)

$$\alpha = 90^\circ \qquad h = \frac{x}{\dfrac{\cos\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha'/60}} \cdot \operatorname{sen}\alpha_1 \qquad \text{(RICO, III, p. 230-231)}$$

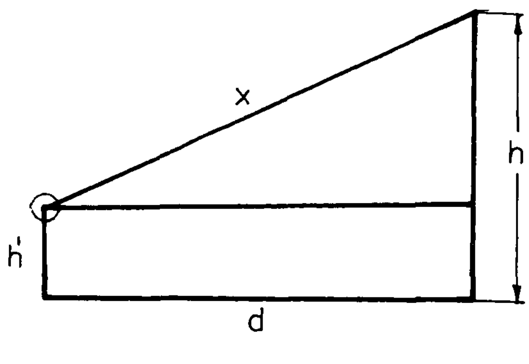
$$\alpha' = 90^\circ \qquad h = \frac{x}{\cos\alpha} \cdot \operatorname{sen}\alpha_1 \qquad \text{(RICO, III, p. 230-231)}$$

$$\alpha < 90^\circ \text{ y } \alpha' < 90^\circ \qquad h = \frac{x . \operatorname{sen}\alpha_1}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha . \cos\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha'} + \cos\alpha} \qquad \text{(RICO, III, p. 230-231)}$$

Este último caso presenta un error de copia del texto árabe[6]. Pero su interés radica en que la resolución parece implicar el conocimiento del teorema del seno; el razonamiento empleado sería, en términos actuales h = H.sen α_i, siendo H = x sen α' / sen ($\alpha + \alpha'$) como resultado de aplicar el teorema del seno al triángulo ABC; cualquier partición de este triángulo en dos rectángulos no daria H en los términos en que aparece en el texto. Además el texto trata también los casos $\alpha > 90°$ y $\alpha' > 90°$ mediante el mismo procedimiento, aunque cambian senos por cosenos del complementario —con los signos correctos— para facilitar el manejo de las tablas. Los casos $\alpha = 90°$ y $\alpha' = 90°$ no están así resueltos ya que la geometría del problema no lo precisa —son triángulos rectángulos—. Otro aspecto que parece colocar a este problema en un plano más teórico sería la dificultad práctica que entraña la medición de los ángulos α y α'.

Una vez conocidas la altura y la distancia que nos separa de un cuerpo, se considera el problema de la distancia a dicho cuerpo como la diagonal que une el punto de mira con la cima o la base del cuerpo, según los casos:

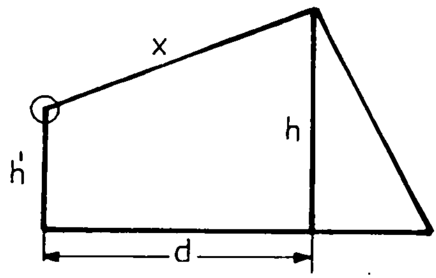
a) El observador y el cuerpo observado están en llano sobre un mismo plano (fig. 12):



(Fig. 12)

$x = ((h-h')^2 + d^2)^{½}$ (RICO, III, p. 229)

b) El cuerpo observado está inclinado, es decir, no es perpendicular al plano del horizonte (suelo) (fig. 13):

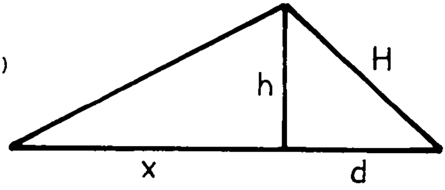


(Fig. 13)

$x = ((h-h')^2 + d^2)^{1/2}$ (RICO, III, p. 229)

La resolución de este problema pasa por la determinación del punto de caída de la perpendicular del cuerpo observado. El procedimiento para determinar dicho punto aparece explicitado en el capítulo 97 del *Libro de la Azafea* (RICO, III, p. 234) y consiste en colocar la alidada del instrumento de observación (cuadrante de senos o de tangentes) marcando el ángulo de 90°; el pie de la perpendicular será el punto desde el que se logre ver la cima del cuerpo al observar a través de las dos pínulas de la alidada. Una vez determinado este punto y tras medir *d* y *x* puede hallarse la longitud de la perpendicular por los procedimientos expuestos anteriormente para obtener (fig. 14):

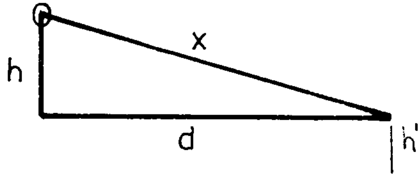
$H = (d^2+h^2)^{1/2}$ (RICO, III, p. 234)



(Fig. 14)

c) La cima del cuerpo observado y los pies del observador están en llano sobre el mismo plano (fig. 15):

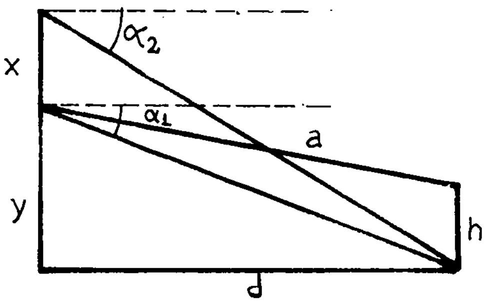
$x = (h^2+d^2)^{½}$ (RICO, III, p. 229)



(Fig. 15)

Para la resolución correcta del problema donde dice *su estadal* (RICO, III, p. 229, cap. XCI, lin. 9) debe leerse *tu estadal*, según figura en el texto árabe (Manuscrito Escorial 962, folio 73v.).

d) La cima del cuerpo está bajo el plano del horizonte (fig. 16):



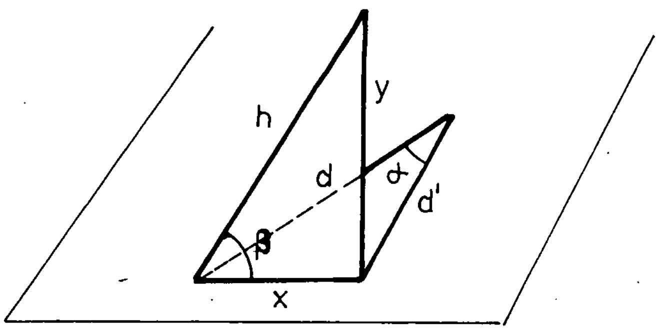
(Fig. 16)

$a = (d^2+(y+x-(h+x))^2)^{½}$ (RICO, III, p. 229)

Para la obtención de d y de $y+x$ se remite al procedimiento antes descrito de efectuar dos mediciones a la base del cuerpo desde dos puntos A y B separados entre sí por una altura conocida x, siendo:

$$d = \frac{x/((sc\ \alpha_2 - sc\ \alpha_1)/sc\ \alpha_2)}{sc\ \alpha_2/12} \quad y \quad y+x = \frac{x}{(sc\ \alpha_2 - sc\ \alpha_1)/sc\ \alpha_2}$$

El procedimiento antes señalado para la determinación del punto de caida de la perpendicular de un cuerpo aparece de nuevo descrito en los capítulos XV y XVI del *Libro del cuadrante o cuarto de círculo de corredera* (RICO, III, p. 315). También en el capítulo XCVIII del *Libro de la Azafea* hace falta conocer la base de la perpendicular, aunque en este caso no se detalle el procedimiento seguido, para hallar la altura de un cuerpo inclinado sin estar frente a él (fig. 17):



(Fig. 17)

$$x = ((d' - d.\cos\ \alpha/60)^2 + (d.\mathrm{sen}\ \alpha/60)^2)^{1/2}$$

$$h = (x^2+y^2)^{1/2} \qquad \text{(RICO, III, p. 234-245)}$$

Para la determinación de las longitudes *d* y *d'* se remite a capítulos anteriores. El interés del problema reside en que la fórmula dada para x constituye una demostración del teorema del coseno. Sin embargo, el estilo habitual de estos problemas consiste en dar como solución la fórmula final resultante de las operaciones; parece pues lógico pensar que de haber conocido el teorema del coseno hubiera dado directamente la fórmula $x = (d^2 + d')^2 - 2dd'\cos\alpha/60)^{1/2}$; en cambio, su solución se limita a dividir el triángulo de la base en dos rectángulos y aplicar el teorema de Pitágoras.

El ángulo de inclinación β se determina mediante la fórmula:

$$90\text{-arcsen}\ \frac{60.x}{h} = \beta$$

IV. Conclusiones

La primera conclusión que puede extraerse de los textos trigonométricos de los *Libros del Saber de Astronomía* es que nos encontramos ante unos rudimentos de trigonometría práctica al servicio de la Astronomía. Pero esta afirmación, que en principio puede parecer negativa, hay que matizarla y situarla en su contexto, porque el hecho de que la Historia de las Matemáticas haya acogido con júbilo *el establecimiento de la Trigonometría como rama independiente de las Matemáticas en el siglo XVI* y ensalzado a Regiomontano como padre de la nueva disciplina ha devaluado sistemáticamente cualquier otro enfoque de la trigonometría y, en particular, ha considerado signo de atraso el *estar al servicio de*. Pero ni la Historia ni la Ciencia son tan lineales. En primer lugar, a la hora de poner nombres y fechas a la emancipación de la trigonometría no puede dejarse de lado un hito tan importante como la obra de Ibn Muᶜāḏ en el siglo XI (VILLUENDAS, 1979). Sin embargo, la independencia de una rama del saber no es necesariamente signo de progreso. Basta pensar en lo fructíferas que fueron unas matemáticas tan *al servicio de* como las del XVIII, en la intranscendencia de estudios exhaustivos hasta el agotamiento como el *Catálogo General de Curvas* de Vargas y Aguirre (Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Madrid, t. XVI, Madrid, 1908) o en la absurda especialización de los que Rey Pastor llamaba *trigonómetras* (RIOS, SANTALÓ, BALANZAT, 1979, p. 323). En el caso concreto que nos ocupa, la trigonometría ni tiene ni ha tenido nunca más sentido como rama independiente de las matemáticas que el que se deriva de la conveniencia de escribir textos de síntesis y estudiar determinadas propiedades. Las necesidades que han impulsado su desarrollo han venido siempre de su condición de herramienta de ciencias y artes como la Matemática, la Astronomía o la Navegación y los dos hitos importantes en la historia de su desarrollo vienen, a grandes rasgos, de la mano, primero, de la aplicación de técnicas algebraicas más desarrolladas a la resolución de problemas trigonométricos (s. XVI y XVII) y más tarde, de la integración de su problemática en el marco de la teoría de funciones. En este contexto, la trigonometría de los *Libros del Saber de Astronomía* admite una valoración más adecuada. La mayor parte de los libros que componen esta obra están dedicados a la construcción y manejo de un instrumento astronómico concreto y la herramienta trigonométrica aparece en ellos de manera dispersa. No se trata, pues, de una obra de investigación o síntesis trigonométrica, y se ha visto que la opción consciente y voluntaria por una trigonometría al servicio de la astronomía no excluye una clara visión de su fundamentación y problemática. Conociendo el teorema del seno, como parece ser el caso, puede resolverse más o menos laboriosamente cualquier triángulo plano conocidos tres de sus elementos, por lo que quizás la obtención de fórmulas más prácticas sólo se justifica por razones de mejora en el cálculo, y en este punto sí que la obra alfonsí muestra un tradicionalismo poco encomiable. Tampoco se muestra avanzada en la excesiva e innecesaria multiplicación de casos particulares, quizá útil en la práctica cotidiana, pero que supone un empobrecimiento en cuanto a abstracción matemática, porque no se progresa en el sentido de aplicación de un esquema resolutivo a problemas con un mismo fondo. Más que la carencia de nuevos resultados, son fundamentalmente estos dos rasgos —el excesivo tradicionalismo y la falta de esquematización matemática— los que confieren a esta obra su carácter anquilosado y la sitúan en el límite inferior de la banda de modernidad (HORMIGON, 1982, p. 209-210). Pero la hipótesis que aquí se ha apuntado sobre el posible nivel de los conocimientos trigonométricos alfonsíes frente a su aparente rudimentareidad, parece confirmarse en otra obra el *Tratado del Cuadrante Sennero* (MILLAS, 1956), en la que se utiliza toda la artillería trigonométrica fundamental y se demuestra cada uno de los resultados expuestos, siendo un buen ejemplo del nivel matemático que puede alcanzar un trabajo al servicio de la astronomía. Los *Libros del Saber de Astronomía* y el *Tratado del Cuadrante Sennero* ilustran, también en la obra alfonsí, la ya mencionada convivencia de dos niveles en la trigonometría hispánica medieval a partir del siglo XI.

V. Glosario

El presente glosario, sin pretender en modo alguno ser un estudio filológico completo de la terminología matemática usada en los *Libros del Saber de Astronomía*, recoge las voces más habituales y su equivalente en el lenguaje científico actual, con el único propósito de ofrecer una primera muestra y facilitar la lectura de los textos alfonsíes editados.

alteza/altura (del sol): ángulo que forma el rayo incidente con el plano del horizonte.

arco: arco, ángulo.

archéalo archeamiento de los signos: tomar arco seno (del árabe qawwasa).

ayuntar: sumar.

cenit: 1) altura máxima del sol sobre el horizonte. 2) dirección (RICO, III, p. 232-233).

cerco: circunferencia, arco, ángulo.

corda: cuerda.

cuerda complida: cuerda.

dedo: unidad de medida, usada normalmente para referirse a una de las dos partes en que suele dividirse el gnomon.

fincar: resultado de una resta.

menudos: minutos.

minguar: restar.

partir sobre: dividir por.

poner por signo egual: tomar seno.

rectificar: medir, observar.

refracción: fracción (RICO, III, p. 313-314).

saeta: seno verso.

signo: seno.

signo converso: seno verso.

signo del complimiento: coseno.

signo egual: seno.

signo llano: seno.

sombra conversa: 12.tangente.

sombra espandida: 12.cotangente.

sombra llana: 12.cotangente.

sombra minguada: 12.tangente.

sombra retornada: 12.tangente.

Como puede apreciarse, la terminología trigonométrica no está en absoluto unificada, por lo que en otros textos alfonsíes pueden aparecer —y de hecho aparecen— expresiones distintas para designar las distintas razones trigonométricas —especialmente en el caso de las sombras—. Lo mismo ocurre con el significado de otros términos como *cenit* o *refracción*, por lo que la relación ofrecida no es extensible a todos los textos alfonsíes.

NOTAS

1 La confusión aparece ya en los autores árabes con los términos *ŷuz'* y *daraŷa*.

2 En rigor, la primera tabla de cotangentes calculada para g = 1 en la España medieval aparece en el *Calendario de Córdoba* (s. X). Sin embargo, esta tabla no está así computada con el propósito de simplificar los cálculos, sino que es el resultado de tomar como gnomon la altura de un hombre derecho. Véase SAMSO, J. (1983): *Sobre los materiales astronómicos en el "Calendario de Córdoba" y en su versión latina del siglo XIII, in* VERNET (ed.). *Nuevos estudios sobre Astronomía española en el siglo de Alfonso X*, Barcelona, C.S.I.C., p. 125-139.

3 Del árabe *qawwasa*.

4 Manuscrito Escorial 962, folio 78r.

5 Tanto en el texto árabe como en el alfonsí dice *míngualo de lo guardado segundo*, pero debe leerse *míngualo de lo guardado primero*. El final de este texto omite la frase *resta la longitud del cuerpo derecho*, que sí aparece en la versión árabe y sin la cual el párrafo carece de sentido (Manuscrito Escorial 962, folio 73r).

6 En el texto alfonsí se lee *et si cada uno de lo primero guardado et de lo segundo fuer menos de XC proporciona el signo de lo guardado segundo et lo que salier*, siendo la correcta la versión árabe, donde aparece *et si cada uno de lo primero guardado et de lo segundo fuer menos de XC proporciona el signo de lo guardado primero al signo de lo guardado segundo et lo que salier* (Manuscrito Escorial 962, folio 75v.).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

GARCIA DONCEL, M. (1982): Quadratic interpolation in Ibn Muᶜādh. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 32*, 68-77.

HERMELINK, H. (1962-66): Tabulae Jahen. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 2*, 108-112.

HORMIGON, M. (1982): *Problemas de Historia de las Matemáticas en España. Zoel García de Galdeano.* Universidad Autónoma de Madrid.

LORCH, R. (1973): *Jābir ibn Aflah in DSB*, VII, Nueva York, 37-39.

MILLÁS VALLICROSA, J.M. (1943-1950): *Estudios sobre Azarquiel.* Madrid-Granada.

MILLÁS VALLICROSA, J.M. (1947): *El libro de los fundamentos de las tablas astronómicas de R. Abraham ibn ᶜEzra.* Madrid-Barcelona.

MILLÁS VALLICROSA, J.M. (1931): *Llibre de Geometría de Abraham bar Hiyya*. Barcelona, ed. Alpha.

MILLÁS VALLICROSA, J.M. (1956): Una obra astronómica alfonsí: el tratado del cuadrante "sennero". *Al-Andalus, 21*, 221-258.

MARTI, R., VILADRICH, M. (1983): *En torno a los tratados de uso del Astrolabio hasta el siglo XIII en Al-Andalus, in* VERNET (ed.) *Nuevos estudios sobre Astronomía española en el siglo de Alfonso X*, Barcelona CSIC, 9-75.

NALLINO, C.A. (1889-1907): *Al-Battānī sive Albateni*. Milano.

NEUGEBAUER, O. (1962): *The astronomical tables of al-Khwārizmī. Translation with commentaries of the latin version by H. Suter supplemented by Corpus Christi College MS 283*. Köbenhavn.

RICO Y SINOBAS, M. (1863): *Libros del Saber de Astronomía del rey D. Alfonso X de Castilla*, 5 vols. Madrid.

RIOS, S., SANTALÓ, L., BALANZAT, M. (1979): *Julio Rey Pastor, Matemático*. Madrid.

SAMSÓ, J. (1980): Notas sobre la Trigonometría esférica de Ibn Mu^{c}āḏ. *Awraq, 3*, 60-68.

SUTER, H. (1914): *Die Astronomischen Tafeln des Muḥammed ibn Mūsā al-Khwārizmī in der Bearbeitung des Maslama ibn Aḥmad al-Madjrīṭī und der latein. Uebersetzung des Athelhard von Bath auf Grund der Vorarbeiten von A. Björno + und R. Besthorn in Kopenhagen*. Köpenhavn.

VERNET, J. (1965): La Ciencia en el Islam y Occidente. *Settimane di studio del Centro italiano di studi sull'alto medioevo, 12*, Spoleto. Reeditado en *Estudios sobre Historia de la Ciencia Medieval*, Barcelona-Bellaterra, 1979, 21-60.

VERNET, J., CATALA, M.A. (1965): Las obras matemáticas de Maslama de Madrid. *Al-Andalus, 30*, 15-45. Reeditado en *Estudios sobre Historia de la Ciencia Medieval*, Barcelona-Bellaterra, 1979, 241-271.

VILLUENDAS,M.V. (1979): *La trigonometría europea en el siglo XI. Estudio de la obra de Ibn Mu^{c}āḏ, El Kitāb maŷhūlāt*. Barcelona, Instituto de Historia de la Ciencia de la Real Academia de Buenas Letras, XLI + 187 + 47 págs. + 7 láms.