LLULL, Vol. 3, Octubre 1980, 3-38

EL PENSAMIENTO MATEMATICO DE ANTONIO EXIMENO

MIGUEL DE GUZMAN OZAMIZ
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid, España

SANTIAGO GARMA PONS
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid, España

SUMMARY

During the seventeenth century, Mathematics began to be taught both in private Institutions and finally in the Universities.
The military and the Jesuits were part of the most advanced socials groups that were determined to include mathematics in school and University curricula. Since Antonio Eximeno was one of them, his personality, both as philosopher and mathematician, is analysed here. Through this analysis we can acquire a good idea of the influence that the sensist philosophers and French materialists had on this group of Jesuit intellectuals.
Eximeno was one of those expelled Jesuits who returned to Spain from Italy and continued to work.

RESUMEN

Durante el siglo XVIII, las matemáticas en España comenzaron a implantarse en las Escuelas y Colegios y finalmente en las Universidades.
Entre los grupos sociales más avanzados a la hora de imponerlas en la enseñanza estuvieron los militares y los jesuitas. Antonio Eximeno fue uno de éstos, y aquí se analiza tanto su personalidad filosófica como matemática.
A través del examen de su pensamiento pdemos adquirir una buena idea acerca de la influencia que tuvieron los filósofos sensistas y materialistas franceses en el grupo de intelectuales jesuitas. De los jesuitas expulsados, Eximeno fue uno de los que volvió a España desde Italia y continuó trabajando.

0. INTRODUCCION

Uno de los tópicos que más han perjudicado el conocimiento de la Historia de las Ciencias en España ha sido el admitido, a partir del siglo XIX, por la mayor parte de los científicos e historiadores españoles, y por los matemáticos especialmente, de la no existencia de actividad científica, de científicos ni de descubridores de grandes teorías en la vida cultural de la sociedad española anteriormente a aquel siglo (1). De esta forma se logró mantener en el ostracismo más absoluto en la Historia de España a la Historia de las Ciencias. Los argumentos usados principalmente para conseguir este destierro fueron en su mayor parte ideológicos, cuando no peyorativos (2).

Dejando de lado este tópico polémico y centrándonos en una época concreta de la Historia Científica de España, vamos a examinar algunos de sus aspectos a través de uno de sus protagonistas, el jesuita Antonio Eximeno, que desarrolló su actividad a lo largo del siglo XVIII. Este siglo y los primeros años del siguiente fueron polémicos, durante ellos se formaron y llevaron a cabo una labor considerable un nutrido grupo de científicos españoles.

Desde hace algunos años para acá varios estudiosos e investigadores han venido dedicando su esfuerzo a revisar y descubrir lo que hicieron aquel grupo de científicos, lo que ha permitido una visión distinta de este aspecto de la Historia de España en este siglo. De entre ellos y por estar relacionados en alguna manera su trabajo con el nuestro, vamos a destacar a Víctor Navarro, Antonio Echarri, Ramón Gago y a Francisco Aragón. A la hora de hacer la Historia Científica del XVIII español será necesario contar con sus investigaciones, aun cuando, en algún caso, no estemos de acuerdo con los presupuestos bajo los que las han realizado.

En el campo de las matemáticas, quizás el más abandonado desde el punto de vista histórico, nos encontramos con un panorama en el que si bien las dificultades, amenazas, persecuciones por parte de unos sectores sociales fueron corrientes, consiguió ser uno de los más brillantes o, por lo menos, de los más notables en los últimos trescientos años de nuestra historia. Con respecto a las condiciones sociales y políticas en que los matemáticos tuvieron que desarrollar su trabajo repetiremos lo ya descrito en otros trabajos dedicados a este tema (3). La mayor parte de los matemáticos españoles que estudiaron, enseñaron o investigaron en matemáticas ejercieron su actividad en instituciones regentadas por los jesuitas, por el ejército y la marina o por particulares. Las Universidades, principalmente las tres grandes de Castilla, sólo dedicaron a la enseñanza de las matemáticas un pequeño esfuerzo. Como ejemplo de su lamentable estado en las Universidades de Castilla podemos citar el caso de los catedráticos de Matemáticas de Salamanca Diego Torres de Villarroel y su sobrino Isidoro Ortiz Gallardo de Villarroel, y el conflicto que tuvieron en relación con una propuesta de creación de Academia de Matemáticas (4).

Diego Torres fue elegido catedrático de matemática, de la Universidad de Salamanca, en un claustro pleno y, como el mismo cuenta, por aclamación en 1726. Lo único que parecía conocer del tema, también según confesión propia, era algo de astrología y quizás algo de geometría. Los autores que cita en sus obras y biografía, los más modernos, son del siglo XVII. Pero no sólo no conocía nada de lo que se hacía de matemáticas en el resto de Europa, sino que ignoraba lo que se hacía de matemáticas en España. Le bastó con mirar a las Universidades para asegurar "Todas las cátedras de las Universidades estaban vacías antes, y se padecía en ellas una infame ignorancia. Una figura geométrica se miraba en ese tiempo como las brujerías y las tentaciones de San Antonio, y en cada círculo se les antojaba una caldera donde hervían a borbollones los pactos, y los comercios con el demonio. Esta rudeza, mis vicios y mis extraordinarias libertades hicieron infelices mis trabajos y aborrecidas con desventura mis primeras tareas" (5).

Expresiones como ésta repite Torres frecuentemente en la narración de su vida. Hace afirmaciones grandilocuentes y subjetivas sobre el estado de la enseñanza de las matemáticas y de ninguna de ellas parece que pueda deducirse que conocía algo de las investigaciones de los matemáticos contemporáneos, a pesar de tener la información bien a mano, en la Biblioteca de la Universidad.

Al hacerse cargo de la cátedra en 1732, ya existían el Real Seminario de Nobles de Madrid y la Escuela de Guardias Marinas de Cádiz donde las actividades científicas experimentales se practicaban con intensidad. Si bien es cierto que en aquellos años el desconocimiento de las matemáticas era lo que dominaba en todas las universidades, y por ello hay que darle buena parte de la razón a Diego Torres, también es cierto que algunos teólogos y filósofos en las universidades o en los colegios conocían el grado de desarrollo de esta materia en Europa (6). Por otro lado, es muy reveladora la información que da Cuesta, en su libro, sobre las revistas y libros que llegaban a Salamanca, la biblioteca de la Universidad contaba no sólo con las publicaciones de los matemáticos más importantes del momento, sino además con las primeras revistas científicas publicadas en Europa desde el siglo XVII. Es decir que no está tan claro, como dice Torres, que no hubiese nadie que supiese de matemáticas en el país, por lo menos hubo alguien que supo seleccionar libros y revistas y que conocía, cuando menos, la importancia del tema. Diego Torres y su sobrino que le sucedió en el puesto, trataron en 1758 que se les aprobara la constitución de una Academia de Matemáticas, levantando con ello las protestas de los doctores salmanticenses y abriéndose una polémica sobre ella. Uno de los polemistas y opositor al proyecto, fue el teólogo Ribera quien, en su discurso ante el claustro, ponía en evidencia las intenciones de tío y sobrino de ganar simplemente más dinero y además dice haberse leído varios libros de matemáticas, indica que del nuevo **Cálculo Diferencial** los promotores del proyecto no sabían nada.

Torres parecía querer justificar su desconocimiento de las matemáticas, escandalizándose de la ignorancia de los demás y lo que se hacía evidente es que una cosa era que, en las universidades, nadie supiese matemáticas y otra muy distinta que no se conociesen los progresos que se habían hecho, es así como fr. Bernardo se podía permitir recordarle que quien no sabía matemáticas era él.

Esta historia de Diego Torres de Villarroel con oposición a la cátedra, sus aventuras académicas, sus llamativas opiniones sobre la situación universitaria, sus publicaciones ha dado motivo a varios historiadores de la cultura de los españoles del XVIII para que, sin más datos ni más análisis se sintiesen justificados de un modo u otro para defender las mismas ideas de Torres. Las ciencias y dentro de ellas las matemáticas no han tenido una historia que se pueda considerar evidente y menos en España, al alcance de cualquiera sino que ha estado y está, en muchos casos, todavía, oculta. Los acontecimientos en los que participaron Torres y sus sobrinos pertenecían a una guerra entre defensores de la práctica científica como método para el conocimiento del mundo frente a los que por único método tenían el argumento de autoridad. Los enfrentamientos que se produjeron más adelante en la Universidad de Salamanca fueron buena muestra de ella. De lo que sucedió tanto en tiempo de Torres como después se puede deducir que su papel fue el del oportunista que convenía, por muy diversas razones, a aquellos que se servían de la universidad. Así no tiene nada de extraño que la misma se opusiese a la enseñanza de la ciencia moderna después de haber tenido un catedrático como Torres y sus sobrinos. La Universidad de Salamanca más adelante, tuvo buen cuidado de elegir un sucesor que fuese mejor conocedor del tema y no la dejase tan en ridículo como el anterior.

La cátedra de Diego Torres había pasado, una vez jubilado éste, a su sobrino Isidoro Ortiz Gallardo en 1752, hasta 1767 en que murió. La regencia salió a oposición y estuvo a punto de ocuparla el hermano del anterior Judas Thadeo Ortiz Gallardo, pero intervino el Consejo de Castilla y suspendió el concurso ante las denuncias de un grupo de catedráticos de la Universidad, por el desconocimiento y la incompetencia del candidato. Sin embargo solicitó la sustitución que le fue concedida hasta 1771, en que salió el nuevo plan de estudios (en el que se suprimía la propiedad de las cátedras). Se inició entonces una oposición a la que concurrieron Judas Thadeo y Francisco Guerra que terminó favorablemente para Judas e impugnada ante el Consejo de Castilla por Guerra. La impugnación no se aceptó y lo único positivo que salió de esta discusión fue que el Fiscal del Consejo propusiese que en adelante se modernizase el procedimiento para proveer las cátedras, que se usasen los libros de Newton y Wolfio y se considerase la falta de competencia de los candidatos en las puntuaciones.

En 1773 se llevó a cabo la oposición para cubrir la cátedra de Aritmética, Geometría y Algebra y que antes fue de Sumulas, considerada anterior a la de Matemáticas. Fue ganada por Juan Justo García en competencia con otros tres candidatos, después de muchas discusiones e impugnaciones. El nuevo catedrático resultó, esta vez, con excelentes condiciones para las matemáticas y publicó unos años más adelante un valioso texto "Elementos de Matemáticas" que contenía la materia que se enseñaba ordinariamente en los cursos de matemáticas, con un nivel equivalente al de las Escuelas Europeas en donde se practicaba esta enseñanza (7).

Durante la primera mitad del siglo XVIII el estudio de las matemáticas en España se practicó en los Colegios dirigidos por los Jesuitas y en las escuelas que el ejército y la marina mantenían para la formación de sus oficiales. Aproximadamente a partir de la mitad del siglo se fundaron nuevas escuelas, se tradujeron libros modernos y a pesar de la resistencia de sectores influyentes en la monarquía, muchos de los que habían adquirido una sólida formación matemática accedieron a los puestos docentes que había en las escuelas. Poco a poco, fueron apareciendo, en los centros donde se enseñaban matemáticas, grupos interesados en la actividad científica llegaron a polemizar sobre temas de matemáticas o relacionados con las mismas, resultando de aquella situación el progreso de la comunidad científica que se había estado formando desde los comienzos del siglo y que sería evidente en los años finales del siglo y durante el primer tercio del XIX.

Del período citado en último lugar nos interesa señalar que uno de los efectos, indicador de la actividad matemática, entonces, fue la impresión de varias memorias, interesantes trabajos de investigación. A pesar de ser corto el número de estas publicaciones que se hicieron antes de la llegada de Fernando VII, tuvieron más importancia por su significado en el contexto científico español que por su contenido. Aunque tampoco fuese despreciable la aportación que suponían como contribución a la creación de un ambiente científico español que por su contenido. Aunque tampoco fuese despreciable la aportación que suponían como contribución a la creación de un ambiente científico y al esclarecimiento de algunas cuestiones matemáticas.

Uno de los problemas históricos abiertos es el estudio de las relaciones que existieron entre los matemáticos franceses y españoles antes de la guerra con las tropas napoleónicas, y que todo parece indicar que fueron muy intensas y cordiales. Los pocos datos que tenemos de ellas son de que hubo una amplia correspondencia epistolar y que unos y otros científicos viajaron con frecuencia al país vecino, los franceses fueron la conexión con la ciencia europea para los españoles.

El ambiente matemático en esta etapa se vio enriquecido, como antes hemos dicho, con la impresión de Memorias de investigación productos de la discusión del numeroso grupo de matemáticos (la lista de personas dedicadas a las matemáticas, más o menos profesionalizadas, era bastante larga). Los campos cubiertos por este tipo de trabajos fueron el álgebra, el cálculo infinitesimal aplicado a la geometría, las ecuaciones diferenciales y bastantes trabajos dedicados a desarrollos en serie de funciones. La mayor parte de los autores de estas memorias estuvieron al tanto de las publicaciones más recientes en sus campos, mantuvieron correspondencia con matemáticos o personas muy ligadas a los matemáticos europeos y en algunos casos publicaron sus trabajos en revistas de estos países.

Algunos de los trabajos más destacados fueron los siguientes: sobre Algebra y en relación con la resolución de ecuaciones tenemos la Memoria de Miguel de Alvear (fl. 1972) sobre "Ecuaciones superiores o método general de resolverlas". (San Fernando, 1814). Los únicos datos biográficos con que contamos de este autor son que fue profesor de la Academia de Guardias Marinas de Cádiz y Coronel de Infantería, que publicó muy tardíamente esta Memoria en la que recoge una investigación sobre la solución numérica de las ecuaciones de grados 4, 5 y 6, y que la discusión que planteó Alvear, mejorando la solución que se usaba habitualmente y que estaba desarrollada en el texto de Bezout, le llevó de forma automática a considerar la multiplicidad de los términos que aumentaba al crecer el grado de la ecuación, descartando la posibilidad de encontrar soluciones exactas para estas ecuaciones.

Otro de los trabajos interesantes fue el de José Chaix (1766–1811) acerca de "Un nuevo método para transformar en series las funciones transcendentes precedido por otro método particular para las funciones logarítmicas y exponenciales". Como del anterior sabemos poco de su biografía, fue Vice-director del cuerpo de ingenieros cosmógrafos, comisario y profesor de los estudios de la inspección general de caminos y comisario de guerra, mantuvo buenas relaciones y activa colaboración, en la realización de trabajos de observación astronómica, con Agustín de Betancourt, y con José Mariano Vallejo. Junto con José Rodríguez González recibió el encargo del gobierno para formar equipo con los franceses Biot y Arago para efectuar la medición de un arco de meridiano. En la Memoria publicada en Madrid en 1807, Chaix exponía en primer lugar el método propuesto por Halley, y que ya era conocido desde 1695 en que fue publicado en las Phylosophycal Transactions de la Royal Society, para obtener el desarrollo en serie de log $(1 + x)$ y de a^x. Después y señalando sus diferencias con los métodos de los matemáticos franceses, busca *un método que fuese puramente algebraico, esto es libre de toda consideración sobre el infinito o lo infinitamente pequeño*, que le permitiese desarrollar en serie cualquier función transcendente. El método consistía en usar una propiedad que cumpliesen las funciones que diese lugar a una igualdad en la que se podía substituir la función por una expresión polinómica con coeficientes indeterminados y después por el procedimiento de igualar los términos correspondientes se calculaban los coeficientes.

Sobre este mismo tema también publicó varios artículos José Sánchez Cerquero (1784–1850) (8) quien comenzó su carrera como meritorio en el arsenal de la carraca, llegando a ser ingeniero naval en 1805, primer maestro de la Academia de Guardias Marinas de Cartagena hasta 1816 y Director del Observatorio de San Fernando desde 1816 a 1846. Su relación con los ingleses fue bastante estrecha, fue miembro de la Royal Astronomical Society of London y de la Metereological Society desde que estuvo en Londres en 1829 trabajando en el Observatorio de Greenwich. Entre otros muchos artículos, se encuentran en la *Correspondence Mathematique de Quetelet*, 10, 1838, "Sur le developpement des functions exponentielles et logarithmiques" y "Sur une demostration nouvelle du developpement du binome". En el *Periódico mensual de Ciencias de Cádiz*, 1, 1848, se publicaron "Observaciones sobre el desarrollo de las funciones en serie, empleando la diferenciación" y "Continuación de las investigaciones sobre el desarrollo de las funciones analíticas".

Las aplicaciones del Cálculo infinitesimal a la geometría fueron tratadas por José Mariano Vallejo (1779–1846) en su Memoria sobre "La curvatura de las líneas en sus diferentes puntos" sobre el radio de curvatura y sobre sus evolutas", publicada en Madrid en 1807. Vallejo fue profesor de matemáticas en el Real Seminario de Nobles de Madrid, ocupó altos cargos en la administración, dentro del Ministerio de la Gobernación, recorrió varios países europeos después del trienio liberal, haciendo amistad con Laplace, colaboró a la fundación de importantes Instituciones como el Ateneo de Madrid y la Academia de Ciencias y fue autor de varios textos de matemáticas que influyeron decididamente en la enseñanza de las matemáticas en España. La materia desarrollada en su trabajo comienza con un estudio del contacto de una curva y un círculo para acabar demostrando que un círculo que tenga un punto común con una curva y su centro no esté en la normal correspondiente a ese punto, cortará a la tangente a la curva y todos los círculos cuyos centros estén en dicha normal.

Finalmente, otra de las Memorias necesitada de una lectura que permita situarla debidamente en la historia de las matemáticas en España es la escrita por Agustín de Pedrayes y Foyo (1744–1815) sobre un "Nuevo y universal método de quadraturas determinadas" que posteriormente fue acompañada del enunciado de dos problemas, enunciados muy parecidos en 1788 y 1796. Pedrayes fue profesor de matemáticas en la Casa de Caballeros de Pages, después se retiró enfermo a su pueblo natal en Asturias, volviendo a Madrid en 1796 y siendo comisionado por el gobierno junto con Gabriel Ciscar para participar en la reunión internacional que iba a testificar el depósito de los patrones del metro y del kilogramo en el Instituto Nacional de París. A partir de 1810 tuvo muchas dificultades económicas, dejó de percibir las ayudas que recibía del gobierno, y aunque parece ser que éstas se reanudaron en 1812 ya no sirvieron más que para prolongar su mal estado de salud hasta 1815.

La relación de otros trabajos de investigación no estrictamente matemáticos pero relativos a otras ciencias con contenido teórico próximo, haría esta introducción bastante más larga. Un ejemplo último sería el caso de José Joaquín de Ferrer, dedicado principalmente a la astronomía, y que planteó la ecuación diferencial de Ferrer-Legendre, que publicó numerosos trabajos dedicados a la enseñanza. Así pues, es preciso entender que el período correspondiente a los años que van desde la mitad del siglo XVIII hasta el primer tercio del XIX fue fecundo y prometedor para la ciencia de los científicos e ingenieros españoles.

Corresponde con la primera parte del período señalado la época más activa y valiosa de los Jesuitas españoles, en sus Colegios y Universidades. Para poder llegar a conocer el proceso de desarrollo iniciado en el terreno de la ciencia es imprescindible estudiar la actividad docente, investigadora y filosófica de las comunidades de los Seminarios de Nobles de Madrid y Valencia así como de la Universidad de Cervere, principalmente. Uno de los Jesuitas cuya obra científica tuvo más publicidad, principalmente a través de la Gazeta de Madrid (9), fue Antonio Eximeno, el análisis de su pensamiento tanto filosófico como matemático puede contribuir al conocimiento de algunos aspectos, de una época, todavía inéditos.

1. LA OBRA DE ANTONIO EXIMENO

En la segunda mitad del siglo XVIII, agitado el campo de las ideas filosóficas en España por las corrientes revolucionarias, antiaristotélicas y antiescolásticas procedentes sobre todo del sensualismo francés, surge la figura polifacética de Antonio Eximeno, humanista, matemático, esteta musical, filósofo y hasta novelista sucesivamente.

El renonbre internacional alcanzado por Eximeno radica principalmente en sus trabajos en el campo de la teoría de la música, especialmente en el titulado *Dell'origine e delle Regole della Música, colla Storia del suo progreso, decadenza e rinuovazione* (Roma, 1774), que le valió el título de "Newton de la Música" entre los italianos. El aspecto estético-musical de Eximeno ha sido suficientemente estudiado por diversos autores, entre otros por MENENDEZ Y PELAYO, M. *Historia de las ideas estéticas en España 2* (Santander, 1947), T. III, pp. 622–640, y Otaño, N. *El P. Antonio Eximeno. Estudio de su personalidad a la luz de nuevos documentos* (Madrid, 1943). El mismo MENENDEZ Y PELAYO examinará también los valores de la novela de Eximeno, *D. Lazarillo Vizcardi* (Madrid, 1872–1873) así como algunos puntos sueltos de su pensamiento filosófico expresado en *De studiis philosophicis et mathematicis instituendis* (Madrid, 1789), y en *Institutiones philosophicae et mathematicae* (Madrid, 1796), obra está última inacabada. Es posible que el pensar filosófico de Eximeno no merezca mucho más que estos rápidos trazos desde el punto de vista de su contenido, pero creemos que tal vez sería interesante conocerlo algo más a fondo, para estudiar sus posibles resonancias en la historia del pensamiento filosófico en España. La tendencia sensualista de Eximeno, siempre en actitud crítica, no es una mera copia del sensualismo de Condillac y de Bonet. Es probable que su personal aportación, sobre todo en las *Institutiones philosophicae et mathematicae* (El pensamiento de Eximeno se suele corrientemente caracterizar por su obra propedéutica *De studiis philosophicis et mathematicis instituendis)*, sea más rica de lo que comúnmente se afirma.

Pero no son estos aspectos los que nos van a ocupar en las páginas que siguen. La faceta más olvidada del pensamiento de Eximeno, de la que ningún autor se hace eco, salvo en alguna nota para hacer señalar su ausencia pretendida en su teoría musical, es la matemática. El pensamiento matemático de Eximeno es sin embargo interesante por diversos aspectos. Eximeno llegó a adquirir una amplia cultura matemática que le llevó a ocupar un puesto destacado en el panorama matemático contemporáneo en España. Con este bagaje se propuso en sus *Instituciones* realizar una discusión de tipo fundamental de los problemas especulativos que la matemática de su tiempo se planteaba y, si bien no nos ha llegado el desarrollo completo de esta discusión, por los motivos que expondremos, sí nos ha quedado lo que hubiera constituido probablemente el núcleo básico de la obra, a través del avance que de ella presenta en *De studiis.*

Mediante este opúsculo podemos asegurar conocer el pensamiento matemático de Eximeno en sus rasgos esenciales, y a través de Eximeno, el de una buena parte de quienes se ocupaban del tema de España durante fines del siglo XVIII y comienzos del XIX, pues hay constancia de la influencia de este opúsculo en el ambiente intelectual español en este período. Por otra parte, Eximeno es resonador del ambiente matemático europeo contemporáneo y el estudio de su pensamiento matemático puede iluminar tal vez el estado contemporáneo de la doctrina sobre los conceptos y principios fundamentales de la matemática.

Con todo, sobre este punto hay que notar que Eximeno no está, en muchos aspectos, a la altura de los conocimientos ya alcanzados por los mejores matemáticos europeos de su tiempo y por eso la luz que tal estudio arroja sobre el pensar matemático contemporáneo no puede menos de ser un tanto apagada. Por fin, el estudio de este aspecto de la actividad intelectual de Eximeno pone más en claro, a nuestro parecer, otros rasgos de su personalidad tanto intelectual como temperamental, como tendremos ocasión de observar.

2. LA PERSONALIDAD DE EXIMENO

La personalidad de Eximeno ha sido objeto de especial estudio en la obra de OTAÑO ya citada y por ello presentaremos aquí solamente las notas esenciales para encuadrar más cabalmente su actividad matemática. En dicha obra se puede encontrar la documentación referente a estos datos.

Antonio Eximeno nace en Valencia el 26 de abril de 1729. Su educación hasta los 16 años tiene lugar en el Seminario de Nobles de San Ignacio de Valencia. Posee un talento despejado y no le faltan rasgos de humor. Entra en la Compañía de Jesús el 15 de octubre de 1745, a sus 16 años. Tras un largo período de formación humanística, filosófica y teológica, emite su profesión religiosa solemne el 2 de octubre de 1763. Esta formación amplia y variada determina radicalmente el perfil intelectual de Eximeno, transfundiéndose en su abigarrada actividad y en su obra. Antes de 1762 ya empieza a enseñar Retórica en el Seminario de Nobles de Valencia. Del estilo de su oratoria pueden dar idea algunos sermones impresos que de él se conservan. Eximeno, poseedor de un agudo sentido crítico, supo evitar en gran parte las ridiculeces del gerundismo y del estilo hiperbólico imperante en su época. Hacia los años 60, Eximeno manifiesta su profundo interés por la matemática, interés que tiene probablemente su origen en el estudio de las obras matemáticas clásicas en su período de formación, entre otras, casi con toda seguridad del comentario a EUCLIDES de Christophorus CLAVIUS, *Euclides elementorun libri XV* (Romae 1603), libro de texto de geometría universalmente impuesto en los siglos XVII y XVIII, o la edición de los Elementos que hizo Roberto SIMSON sobre la de COMANDINO y de la que se hizo una traducción castellana en 1774. Pero Eximeno no se contentaba con lo tradicional. Su temperamento inquieto le lleva a la búsqueda de innovaciones en todos los campos. Su interés le conduce al estudio de los grandes matemáticos de su siglo, sobre todo de Leonhard EULER (1707-1783) cuya *Introductio in analysim infinitorum* había sido publicada en 1748 y sus *Instituciones calculi differentialis* en 1755.

En su introducción en el campo matemático le debió de ayudar bastante el interés que el General de la Compañía de Jesus P. RICCI ponía en aquellos años por el fomento de la matemática en los Colegios de la Compañía. Asimismo, el contacto epistolar de Eximeno con el P. Jesús Martínez, profesor del Colegio Imperial de Madrid, nos presenta a éste como confidente, consejero y apadrinador de los afanes de Eximeno. En 1762 comienza Eximeno a explicar matemáticas en el Colegio de San Pablo, contiguo al Seminario de Nobles, donde en un principio sigue explicando Retórica. El Colegio de San Pablo era una institución de estudios superiores para estudiantes jesuitas y seglares. En 1763 ya tenía Eximeno preparado para la imprenta todo un *Tratado de matemáticas,* dividido en seis partes: Algebra y Geometría Sintética, Cálculo aplicado a la Geometría, Cálculo diferencial, integral y Mecánica abstracta, Mecánica aplicada y Astronomía... La obra se había de imprimir en seis tomos en 8.°

Su competencia en el terreno matemático era plenamente reconocida por todos y por algunos indeseada. Se pensó, en efecto, en fundar una cátedra para Eximeno en la Universidad de Valencia, cosa sin precedente tratándose de un religioso y más difícil aún de realizar tratándose de un Jesuíta, por los tiempos que corrían tan desfavorables para la Compañía. Se planeó en crear una para un mercenario y así tendría Eximeno más fácil entrada. El plan fracasó, pero el 9 de noviembre de 1763 recibe Eximeno una carta del Conde de Gazola con el nombramiento de Profesor de la Nueva Academia de Caballeros Cadetes y Oficiales del Real Cuerpo de Artillería que se va a instalar en el Alcázar de Segovia. Desde entonces es llamado Padre Maestro Eximeno, con el título de Profesor Primario, autoridad máxima en materia de estudios.

En el intercambio epistolar con el P. Jesús Martínez procedente de este período se manifiestan los rasgos más acusados de la personalidad de Eximeno durante esta época un tanto inestable. Extraordinariamente dotado, sobresale por su cultura humanística. Su temperamento vivo le lleva a la independencia intelectual y a la búsqueda afanosa de novedades en Filosofía y en Ciencias. Ante las contrariedades que encuentra por parte de los espíritus conservadores para introducir en el Colegio de San Pablo y en la Universidad la Nueva Matemática se manifiesta impetuoso, tajante en sus juicios, crudo en sus mismas palabras. Su pasión dominante es la atracción a las alturas y el afán de novedades. Su talento, tendremos ocasión de comprobarlo, es eminentemente crítico y destructivo, flaqueando en la construcción. Su elemento es la polémica y en ella se muestra autosuficiente y de un desmedido amor propio.

Sólo tres años duró la estancia de Eximeno en Segovia. La expulsión decretada por Carlos III en los primeros días de abril de 1767 de todos los Jesuitas de los dominios de su corona también alcanzó a Eximeno, quien embarcando en Santander el 7 de mayo llega a Roma el 18 de octubre después de tres meses de penosa estancia en Córcega. En Noviembre del mismo año se seculariza, separándose de la Compañía y estableciéndose en Roma. Parece que durante su estancia en la Academia escribió un tratado de Física y tal vez sea también obra suya una *Historia Militar de España* (Segovia 1769) y un *Manual de Artillero* (Segovia 1772) como le atribuye la *Biographie Universelle*, pero es probable que la confunda con la obra del P. Cerdá que, también, estuvo en Segovia coincidiendo con Eximeno.

El ambiente intelectual de Roma constituye un marco magnífico para el talento de Eximeno, Roma ejerce sobre él una profunda influencia. Su ocupación es el estudio de la música en la escuela del P. Massi, adquiriendo pronto los conocimientos fundamentales de la técnica, estética e historia musical. Su dedicación a esta materia es una consecuencia más de su temperamento ávido de gloria y de popularidad. Así lo confiesa él mismo implícitamente en el anuncio de la obra que va a suscitar una encarnizada polímica: "..., annojato cramai di filosofare inútilmente in altre materie, a preso per oggeto delle sue riflessioni la musica, che è al presente el capriccio regante nell'Europa.'. Pronto su brillantez le proporciona un puesto preminente en la sociedad intelectual romana, siendo admitido en la "Academia de los Arcades" en 1773 con el nombre de Aritógenes Megareo y más tarde, en la de los "Oculti". Como en todos los campos, Eximeno busca en música romper las teorías rutinarias, polemizar sobre lo impuesto autoritariamente. En 1771 ya tiene terminada su obra más famosa y en 1774 sale publicada con el título *Dell'origine e delle Regole della Musica, colla Storia del suo progreso, decadenza e rinuovazione* (Roma, 1774). La obra, que no es necesario analizar aquí, tuvo una resonancia notable. En ella se manifiesta una vez más la originalidad del espíritu de Eximeno y su buen sentido para romper, aquí con buena razón, con trabas tecnicistas mediante las que se pretendía normar y criticar la producción musical. La revolución propuesta y su arremetida contra la teoría musical de EULER le dieron gran renombre entre los italianos, quienes llegaron a llamarle el "Newton de la música".

Roma avivó en Eximeno asimismo, el interés por la Filosofía. Como correspondía a su complexión mental, Eximeno se lanzó por el camino de los espíritus fuertes de su época, llevados por la corriente sensualista, despreciadores de la filosofía escolástica. Fruto de su estudio filosófico es la obra que analizaremos en su parte matemática *De studiis philosophicis et mathematicis instituendis* (Madrid, 1789) que constituye tan solo un avance de las *Instituciones philosophicae et mathematicae* (Madrid, 1796). En la primera presenta, a instancia de su amigo Juan ANDRES, las ideas fundamentales y el espíritu que ha de informar la segunda. Esta no llegó a publicarse entera. En 1796 aparecieron los dos volúmenes primeros de 7 u 8 de que había de constar la obra. (Así opina URIARTE-LECINA, *De la biblioteca de escritores de la Compañía de Jesús* *pertenecientes a la Antigua Asistencia de España* (Madrid 1929-1930, t. II, pp. 543-548). MENENDEZ Y PELAYO es del parecer de que hubieran sido tres tomos lo cual parece menos probable, si se tiene en cuenta el programa propuesto en *De studiis* y el realizado en los dos volúmenes aparecidos de *Institutiones).* Los 5 ó 6 volúmenes restantes corrieron peor suerte. Así escribe OTAÑO (op. cit. p. 63): "Declarada la república en Roma, en febrero de 1798, Eximeno, que ya tenía sesenta y ocho años y estaba achacoso, pidió y consiguió poder volver a España. Quiso hacerse a la mar en Génova y tenía ya en el barco su bagaje de libros y papeles y los manuscritos restantes de sus Institutiones, cuando unas calenturas le obligaron a quedarse en el puerto. El barco zarpó y apresado por piratas moros, en él se perdieron sus preciados tesoros, fruto de tantos desvelos."

Las *Institutiones* están aún por analizar en detalle, como al principio he expuesto. Comparando someramente el programa del *De studiis* con el de las Institutiones parece que ha habido cambios fundamentales y que del carácter innovador y revolucionario que pretendía Eximeno que tuviesen, ha quedado bastante poco, resultando reducidas a un texto más de los entonces en boga.

Eximeno se repatrió en 1798, en febrero. Se estableció en Valencia y permaneció allí tres años, en los cuales escribió su novela *D. Lazarillo Vizcardi*, editada en 1872-1873, en la que con cierta gracia va presentando sus ideas musicales y atacando las ajenas. En 1801 vuelve de nuevo a Roma, donde muere el 9 de julio de 1808.

En el perfil intelectual de Eximeno se destaca su afán polemista preponderante en casi todas sus obras, determinando profundamente su estilo agudo, a veces hiriente, tajante y demoledor. De todas formas, aunque como afirma MENENDEZ Y PELAYO (Historia de las Ideas Estéticas, 1940, t. III, p. 663), no debe "buscarse casi nunca justicia ni exactitud completa..., indica y sugiere más que prueba,..., acierta y desbarra en una misma página", el pensamiento de Eximeno es agudo, hasta cierto punto personal, sobre todo en su vertiente crítica y merece cierta consideración como exponente de la filosofía del final de nuestro siglo XVIII. Lo que su filosofía posee de sistemático y constructivo es ciertamente menos original, siguiendo sobre todo la corriente de LOCKE, CONDILLAC y BONNET, sin perjuicio de integrar en su pensamiento muchos de los elementos del pensamiento racionalista. Así expresa sus preferencias entre los pensadores: nadie me pareció más perspicaz que Descartes, Locke y leibniz a los cuales suelo llamar triunviros de los asuntos metafísicos, y Malebranche, Condillac y Bonnet. *(De studiss...* p. 35. En lo sucesivo citaremos esta obra mediante D.S.). Su crítica se exacerba cuando se dirige contra los aristotélicos. Así afirma jocosamente al tratar de los axiomas de la matemática y los principios de otras ciencias: sería mejor, por consiguiente, derogar este tipo de proposiciones y en su lugar escribir, al comienzo de todas las ciencias, esta sola: de las proposiciones aristotélicas nada se deduce (D.s.p. 36). Asimismo, cuando propone su plan de renovación de estudios en España escribe: Las proposiciones de los Aristotélicos bien ordenadas están compuestas al revés o partidas transversalmente: a saber para nuevas escuelas deber proponerse nuevos maestros, que sepan, y que dada a ellos la libertad de enseñar que conviene, se juzguen a salvo y protegidos de las insidias de los aristotélicos. (D.s. p. 293).

La cultura filosófica de Eximeno parece amplia, actual, y de primera mano. Por sus páginas desfilan filósofos clásicos y contemporáneos a los que debió de manejar bastante. El mismo, como afirma en D.s. (p. 33), hubiera querido hacer una recopilación de textos de los grandes filósofos para fomentar el conocimiento directo de su pensamiento, pero las dificultades de edición le hicieron desistir.

No trataré de presentar el lugar del pensamiento de Eximeno en el panorama filosófico español, pero para dar una idea de su influencia en España bastará saber que su opúsculo *De studiis* era leído con interés en el tiempo de la formación de BALMES. de Balmes mismo nos informa SADURNI *Balmes, apuntaments biografics* (Vich, 1910, p. 28) que en los años 1833-1834 se entretenía en pasar y repasar las páginas del libro de Eximeno. De él tomó Balmes la expresión de los "triunviros de la metafísica" que hemos leído antes en D.s. para designar a DESCARTES, LOCKE y LEIBNIZ. Debió de hacer bastante mella en el pensamiento de BALMES dicha obra. De ella afirma ponderativamente más tarde, hablando de las oscuridades existentes en los fundamentos de toda ciencia, aún de la matemática: "Entretanto puede recomendarse a los lectores la preciosa carta dirigida por el Jesuíta español a su amigo Juan Andrés, donde se hallan observaciones muy oportunas sobre la materia, hechas por un hombre a quien de seguro no se puede recusar por incompetente. Esta carta está en latín y su título es: Epistola ad clarissimun virum Ioannem Adresium" *(El protestantismo comparado con el catolicismo en sus relaciones con la civilización Europea* Barcelona 1925, t. I, c. VI, p. 110). La influencia sobre su doctrina se manifiesta especialmente en las consideraciones que en la *Filosofía fundamental* hace BALMES sobre la extensión, semejantes a las que presenta Eximeno y que tendremos ocasión de analizar.

3. LOCALIZACION DEL PENSAMIENTO MATEMATICO DE EXIMENO

La actividad matemática de Eximeno se desarrolla en la segunda mitad del siglo XVIII que es, en Matemática, el siglo del Análisis, con preponderancia absoluta de los métodos y la línea de pensamiento de Leonhar EULER (1707-1783). Los nuevos métodos introducidos por NEWTON y LEIBNIZ, aún con cierta oscuridad y vaguedad, van clarificándose parcialmente durante este siglo. Pero aún con estas penumbras que rodean los principios del Análisis, la mayor parte de los matemáticos del siglo, con la confianza en la razón propia del siglo de la Ilustración, no dejan de trabajar y utilizar los instrumentos recién estrenados aún allí donde parecen perder su sentido. Así es como en el campo del Análisis especialmente van apareciendo multitud de paradojas que ocasionan encendidas polémicas entre las figuras del tiempo, EULER, los BERNOULLI, etc... Este aspecto controvertido es el que atrae poderosamente a Eximeno quien se introduce con su espíritu eminentemente crítico en el terreno. Para comprender las tinieblas que rodeaban algunos de los temas con los que vamos a ver ocupado a Eximeno hasta oir a LEIBNIZ (1646-1716) llamar a la raíz imaginaria "un milagro del Análisis, un monstruo del mundo ideal, casi un anfibio entre el ser y el no ser" *(Mathematische Schriften* (ed. Gerhardt) V. 537). Estas oscuridades sirvieron asimismo de ocasión al agudo George BERKELEY (1685-1753) para hacer una crítica de los principios newtonianos del cálculo de fluxiones en su *The Analyst*, subtitulado "Discurso dirigido a un matemático incrédulo". Donde se examina si el objeto principios y modos de conclusión del Análisis moderno se conciben más claramente o se deducen más evidentemente que los misterios de la religión y los asuntos de fe". El matemático incrédulo no era sino el astrónomo Edmund HALLEY (1656-1742) y el tratado está lleno de atinadas observaciones.

En la obra de Eximeno van siendo citados los principales matemáticos de su tiempo, lo que demuestra que Eximeno estaba bastante a tono con el movimiento científico europeo (10). La figura preponderante es sin duda EULER con sus obras geniales: *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differencialis* (1755), *Institutiones calculi integralis*, (1768-1770), *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (1744).También figuran entre los matemáticos más sobresalientes: Colin MAC LAURIN (1698-1746), Jacopo RICCATI (1676-1754), Jacob BERNOULLI (1654-1705), su hermano Johann BERNOULLI (1667-1748) y el hijo de éste, contemporáneo de eximeno, Daniel BERNOULLI (1700-1782). Asimismo aparecen citados por Eximeno en D.s. CLAVIO, VIETA, TACQUET, CAVALIERI, WOLFF, DE LA CAILLE, D'ALAMBERT, ..., además de las figuras clásicas EUCLIDES, ARQUI-

MEDES, DIOFANTO, conocidos probablemente a través de los comentarios de la época.

En general, se puede afirmar que la cultura metemática de Eximeno fue bastante aceptable, capacitándole para seguir el movimiento de esta disciplina, aunque probablemente su labor matemática original no fue apreciable.

4. EL PENSAMIENTO MATEMATICO DE EXIMENO EN *DE STUDIIS PHILOSOPHICIS ET MATHEMATICIS INSTITUENDIS*

La obra D.s., es, como ha quedado dicho, la presentación de un proyecto, en parte ya realizado. Según afirma eximeno en la introducción, Juan ANDRES le había animado a que realizase, mediante sus conocimientos, un tratado de naturaleza matemática: ... "Cum pro illo meo veteri curriculo postulari a me diceres, ut, quos hae disciplinae progressus fecerint, qui exinde capiantur fructus in physicis, quid per eas huc usque inventun, quid in posterum sperandum sit, inquirerem; rectamque signarem viam adolescentibus, qua ad veram solidamque rerum cognitionem perveniant: est enim, uti aiebas, modus in rebus, atque in ipsis mathematicis disciplinis, apprime est utile ne quid nimis" (p. 3) Eximeno escribe entonces un programa de lo que había de ser esa obra, que él concibe filosófica y matemática, las *Institutiones,* para someterlo al juicio de su amigo, acompañando tal programa con razones y comentarios que prestan a D.s. una agilidad y soltura notables. El opúsculo, como la obra, irán escritas en latín, que Eximeno defiende contra las tendencias entonces dominantes. Las *Institutiones* serán divididas en cuatro tratados:

> "primus est *de humanea mentis facultatibus, et cognitionum natura:*
> secundus *de mathematicis disciplinis:*
> tertius *de rebus physicis quae mathematicis rationibus tractari possunt:*
> quartus *de rebus physicis in quibus mathematicae disciplinae locum non habent" (p. 9).*

> (Primero *sobre las facultades de la inteligencia humana y de la naturaleza de los conocimientos.*
> Segundo *sobre la disciplina matemática.*
> Tercero *sobre la física que puede ser tratada por razonamientos matemáticos.*
> Cuarto *sobre la física en la que las disciplinas matemáticas no tienen lugar.)*

Eximeno expone que no pretende introducirse en el manejo de la matemática, sino aclarar sus fundamentos y establecer una consideración filosófica de la ciencia, tomando los datos necesarios para ello de quienes la manejan (p. 10). Todo el opúsculo lo divide en dos partes, de las cuales la primera corresponde al desarrollo del programa de la primera de las partes de las *Institutiones* y la segunda a la presentación de los aspectos matemáticos que piensa tratar en esta obra. Es esta segunda parte la que nos va a ocupar en lo que sigue.

1) La concepción de la matemática

Como hemos hecho notar ya, el interés de Eximeno por la matemática está muy condicionado por el estado de la matemática contemporánea. Su espíritu polémico y crítico encuentra pábulo en las oscuridades y paradojas que aparecen en el desarrollo del nuevo análisis. Su dedicación a la matemática se presentará por eso coloreada con su interés de tipo filosófico. El mismo distingue tres tipos distintos de matemáticos: "Sunt qui partim purissimae veritatis pulchritudine capti..., totosque se ingurgitant in sublinioris geometricae at analyseos investigationes" (P. 113); (unos son los que cautivados por la belleza de la verdad purísima... se sumergen por entero en lo más sublime de la geometría y en las investigaciones del análisis). Estos son los enamorados del formalismo matemático, entre los que incluye a su compatriota BAILS; "Partim crassiore quodam modo leviterque iis disciplinis student, ut praecipuas figurarum proprietates,... discant, vel oblectationis causa, vel ut iis cognitionibus utantur" ...(p. 113); (Otros son los que se dedican a estas disciplinas de modo un tanto burdo y a la ligera para aprender las principales propiedades de las figuras,... bien para simple deleite, bien para usar estos conocimientos...) éstos son más prácticos, entre los que se encuentra el gran matemático, paisano suyo, Vicente TOSCA; pero Eximeno se coloca como ejemplar un tercer tipo: "Praeter duplex hoc mathematicorum genus tertium, rarum istud quidem, sed doubus illis nobilius, exstitit, qui subtilite inquirentes in extensionis, numerorum, finiti et infiniti ideas, quonam ex his ordine, et nexu mathematicae disciplinae exoriantur, cuius generis earum evidentia sit, quibus ipsae cautionibus rebus physicis applicandae, hisque simila accuratius, quam vulgo fit, investigare et scire desiderant. Hos praesertim prae oculis habui in scribendo secundo tractatu *de mathematicis disciplinis*" (p. 114); (Además de este doble tipo existe un tercero, más infrecuente ciertamente, pero más noble de aquellos dos, que sutilmente se pregunta sobre las ideas de extensión, de los números, de lo finito, y de lo infinito, puesto que en este orden y relación de ideas tiene origen las disciplinas matemáticas, también se pregunta de qué naturaleza es el conocimiento de las mismas, con qué precauciones han de ser aplicadas éstas a los temas de física, y desean investigar y conocer, con más cuidado del que pone la mayoría, las materias similares a las anteriores. Esto tendré, principalmente, delante al redactar un segundo tratado sobre la *Disciplinas Matemáticas).* El interés de Eximeno por la matemática es profundamente filosófico, resultando así un avanzado de su propio siglo en el que un personaje tan representativo como Jean Le Rond D'ALAMBERT (1717-1783), soslayando las dificultades que el análisis presentaba a sus discípulos, les solía decir: "Allez en avant et la foi vous viendra". A Eximeno no le resulta suficiente el progreso continuo de la matemática a través de las oscuridades que envuelven sus puntos fundamentales y prefiere examinarlos detenidamente. Sus puntos de vista no siempre resultan acertados y hoy nos es fácil criticarles, pero no se le puede negar en otros, gran tino a la vez que originalidad e independencia, que lo sitúan cerca de la concepción moderna de la matemática.

Eximeno considera la matemática como la elaboración racional de un substrato mental inicial que, si bien posee en la experiencia un fundamento, es transformado por la mente misma hasta tal punto que no se puede afirmar sin más que los resultados mismos de esa elaboración sean aplicables a las cosas que han proporcionado dicho fundamento. Será necesario el criterio de la experiencia para contrastar tal aplicabilidad. Así se expresa Eximeno al tratar en particular de la extensión matemática y de la extensión corpórea: "Daturus igitur operam mathematicis disciplinis firmiter apud se statuat, non de vera corporum extensione, sed de extensione qualem nos concipimus, illas agere; et quod demonstrant, ex. gr. de linea recta tangente circulum, id de circulo et de linea recta mente ductis, vel quibus mente modificamur extensionis ideam, intelligendum et. Quid? reclamabitur, falsane erunt quea geometrae demonstrant, si verae corporum extensioni applicentur? Neque vera, neque falsa per se dici possunt: sed experimentis inequirendum est, quid in natura respondeat modis et proprietatibus, quas mathematici de extensione demonstrant, sive quam proxime extensionis idea ad veram corporum extensionem accedat; atque eatenus ad res physicas mathematicas disciplinas transferre licet, quatenus istae experimentis congruunt: neque aliter de mathematica veritate, quam de rerum perceptione sensuum ministerio receptis (sic) censendum est" (pp. 116 s.); (Quien se dedique a trabajar las disciplinas matemáticas y determine firmemente, para sí, construirlas no a partir de la verdadera extensión de los cuerpos, sino de la extensión tal como la concebimos nosotros; y lo que demuestren, entendidas así estas disciplinas se ha de entender, por ejemplo la recta tangente a un círculo, como un círculo y una recta trazados en la mente, con lo que modificamos en la mente la idea de extensión. ¿Y entonces? se podría objetar, ¿acaso es falso lo que demuestran los geómetras si se aplica a la verdadera extensión de los cuerpos? No se puede decir que sean verdaderos ni falsos por sí mismos; sino que se ha de investigar, con experimentos, que responde en la naturaleza a las medidas y propiedades que los matemáticos demuestran sobre la extensión o cuanto se aproxima la idea de extensión a la verdadera extensión de los cuerpos; y en esa medida, hasta ahí, se podrían aplicar las disciplinas matemáticas a la física, justo hasta donde son congruentes con los experimentos: se ha de juzgar sobre la verdad matemática del mismo modo que sobre las cosas percibidas a través de los sentidos). Aquí queda bien destacado el carácter ideal de la matemática concepción no muy original por cierto (el mismo ejemplo de la tangente para expresar la misma idea es utilizado ya por PLATON en Teeteto). Pero sí notable en un sensualista como Eximeno. Asi mismo, de modo sorprendente, la creatividad y espontaneidad de la inteligencia quedan aún más de relieve en el siguiente párrafo: "Quapropter qui de vera corporum extensione disserunt, inepte huic applicant demonstrationes mathematicas, in quibus extensio in infinitum dividitur et quasi rebus inesse debeant idearum modi, inde arguunt, divisibilem in infinitum esse veram corporum extensionem. Parum habent isti perspectum, quid mens, sumto e rebus fundamento, valeat cogitando intra ipsos veritatis cancellos efficere. Haurit illa quidem e rebus extensionis divisionem, sed cum semel hauserit, eam rerum natura non cohibet quominus per se ipsa divisionem promoveat quousque libuerit, sicut dissero in primo tractatu agens de infinito. Cum autem mens referre vult ad res ipsas extensionis divisionem cogitando effectam, intra experimentorum limites sese ipsa contineat necesse est, neque corpora in particulas minutiores dividat, quam experientia concedit" (p. 118). (Por que quienes disertan sobre la verdadera extensión de los cuerpos aplican inadecuadamente a esto las demostraciones matemáticas, en las cuales la extensión se divide hasta el infinito, y como si la medida de las ideas debieran estar en las cosas, de donde argumentan que la verdadera extensión de los cuerpos es divisible hasta el infinito. Poco han estudiado estos que puede obtener la mente, tomando el fundamento de las cosas, pensando dentro de los límites de la verdad. Esto agota ciertamente la división de las cosas, pero habiéndola agotado una vez, la naturaleza de las cosas no impide que ésta repita por sí misma la división hasta donde quiera, según digo en el primer tratado que versa sobre lo infinito. Pero cuando la mente quiere referirse a las cosas mismas pensando que se ha efectuado la división de la extensión, es necesario, que ella misma se contenga dentro de los límites de los experimentos y que no divide los cuerpos en partículas más pequeñas de lo que concede la experiencia.)

Sobre el origen de la idea misma de la extensión, que en estos dos párrafos nos aparece explícito, parece haber vacilado Eximeno. Así, en 1774, en su obra musical *Dell'origine...* afirma: ... "La matemática no es, como se cree vulgarmente, un depósito de verdades infalibles... El objeto de la Matemática es aquella idea de la extensión quasi innata a nuestra fantasía que aplicamos a el mismo Dios: Por esta razón las demostraciones matemáticas solamente son verdaderas respecto a esta extensión imaginaria, que acaso no es conforme con la verdadera extensión de los cuerpos..." (Cfr. OTAÑO, N. Op. cit., p.45). Mientras aquí habla de una idea *quasi innata*, en D.s. se refiere a los cuerpos naturales, "quae nobis ingerunt extensionis ideam" (p. 115). (Los que nos lleva a la idea de extensión). Lo que queda bien claro de las citas anteriores es el énfasis que Eximeno pone en el carácter relativo de la verdad matemática. Sino mas bien a la aplicabilidad de lo que para él constituye el edificio matemático a los cuerpos naturales. Parece deducirse que para Eximeno, al menos en lo que se refiere a su pensamiento matemático, existen dos mundos, el corpóreo, perceptible por los sentidos, y el ideal, con leyes propias no adecuadas tal vez al mundo de los cuerpos. Por eso, la armonía de las construcciones de ese mundo ideal con el corpóreo, o al menos su grado de proximidad, precisan un contraste experimental. Las construcciones del mundo ideal pueden poseer una doble verdad, la aplicabilidad necesario al substrato a partir del cual han sido elaboradas, y la aplicabilidad contingente al mundo corpóreo, origen de ese substrato, al menos en su exposición de D.s. Ambas verdades se darán simultáneamente en una construcción matemática cuando las leyes de ese mundo ideal se restrinjan a las que la experiencia misma garantiza. Esta actitud parece manifestar una cierta desconfianza de la razón, originada por la disociación del mundo sensible y del ideal, y por la preponderancia concedida al sensible. Actitud que llevada al extremo podría conducir a un empobrecimiento de la matemática aplicada, si llegase a ignorar su carácter heurístico, posibilitador de nuevas experiencias que vengan a confirmar su valor. Esta actitud radical parece manifestarse a veces en algunas expresiones de Eximeno. Así: "Verum praeterquam quod multa nobis natura genuit quae mathematicas omnes investigationes praetervolant, nihil rei est in natura, quod istae disciplinae per sese ipsae invenire valeanti"... (p. 110). (Pero exceptuando que la naturaleza ha producido muchas cosas que todas las investigaciones matemáticas pasan inadvertidas, nada hay en la naturaleza, que estas disciplinas sirvan para encontrar por sí mismas). Sin embargo, hay que tener en cuenta que Eximeno pretende provocar una reacción contra los extremistas que pretendían introducir las matemáticas casi como único criterio, o al menos sí el más valioso, en terrenos como el de la crítica musical, etc...

Como es natural, la matemática no es para Eximeno un puro juego formal, como para nadie en su época. Ya hemos visto como afirma que "el objeto de la Matemática es aquella idea de la extensión quasi innata a nuestra fantasía". Se trata, como hemos dicho, de una elaboración racional de este substrato inicial. Así se venía considerando desde EUCLIDES, pero en Eximeno parece presentarse en peculiar descuido de lo que de formal tiene la Matemática, descuido tal vez proveniente de su desprecio por la lógica, que le lleva a falsas interpretaciones de EUCLIDES mucho más coonsciente de este aspecto formal de la matemática. Eximeno considerará una construcción matemática verdadera en cuanto a su parecer resulte evidente al tomar conciencia del substrato, por ejemplo la idea de extensión, a que se refiere. Así afirma: "Quare operam et oleum perdent, rebusque per se evidentibus tenebras effendunt, qui quatuor arithmetices regulas demonstrare contendunt" (p. 125). (Pierden su tiempo y el aceite de las velas y producen la obscuridad, cuando son las cosas evidentes por sí mismas, quienes pretenden demostrar las cuatro reglas de la aritmética.) Sin embargo, su postura se explica perfectamente cuando se abren ciertos tratados contemporáneos matemáticos en boga, procedentes de los racionalistas sobre todo, en los que se pretende demostrar aún las mismas tautologías. A esta luz, la actitud de Eximeno aparece llena de buen sentido. He aquí como ironiza sobre uno de tales tratados, el de Christian WOLFF, *Elementa matheseos universae* (Genevae 1743):

"Sed pergamus ad subtiliorem aliam demonstrationem:
Theor. *Totum maius est sua parte.*
Demonst. *Cuius pars alteri toti aequalis est, id ipsum altero maius: sed quaelibet pars totius parti totius, id est, sibimetipsi aequalis est: ergo totum qualibet sui parte maius est.*

Qui vel unam ideam in hac demonstratione monstret, praeter quas contiet ipsum theorema seu axioma, *totum part maius est*, erit mihi magnus Apollo" (p. 139).

(Pero pasemos a otra demostración más sutil:
Teorema: El todo es mayor que una de sus partes.
Demostración: *Una parte es igual a otra del todo, esa es mayor que otra: pero cualquier parte del todo es parte del todo, esto es, es igual a sí misma: por consiguiente el todo es mayor que cualquier parte de sus partes.*

Quien encuentre una sola idea en esta demostración excepto las que contine el mismo teorema o axioma, *el todo el mayor que la parte*, será para mí el gran Apolo.)

Como reacción contra esta corriente, de pedante y falso formalismo reacciona Eximeno con una concepción bastante más amplia de lo que es la evidencia última a la que se reduce el pensamiento matemático.

En cuanto al método propugnado por Eximeno está plenamente en la corriente de su siglo. Lo que impera entre todos sus contemporáneos es el análisis, el álgebra desarrollada en el Renacimiento, y el cálculo diferencial e integral de creación más reciente, por NEWTON (1643-1727) y LEIBNIZ (1646-1716) y con gran desarrollo en el siglo XVIII por obra especialmente de EULER (1707-1783). Eximeno aboga por la síntesis de los métodos sintéticos y analíticos, del álgebra y análisis con la geometría, con el fin de llegar más sencillamente y con mayor economía mental a los resultados que se buscan. Así procede en la teoría de cónicas utilizando los instrumentos potentes proporcionados por el nuevo análisis.

El orden que expone Eximeno para su tratado, conforme con esta orientación metódica es el siguiente. Al contrario que Euclides comienza por la aritmética, según afirma, por la mayor facilidad para tratar los números y porque éstos se comparan mejor (122). En el segundo libro trata *de pura et prima geometría,* colocando por base el axioma: "*extensiones, quae, si altera superimponatur alteri, undique congruunt, sunt omnino aequales: et contra, extensiones omnino aequales si altera alteri superimponatur, perfecte congruunt*" (. 128). *(Las extensiones que superpuestas una a otra, por todas partes coinciden, son completamente iguales: y recíprocamente, las extensiones completamente iguales, si se superponen una a la otra coinciden perfectamente (congruentes)).* Como se ve un principio mucho más amplio que los de EUCLIDES quien posee un sentido más rigurosamente operacional en sus primeros postulados y principios. El tercer libro introduce el álgebra, con las soluciones de las ecuaciones de primero y segundo grado, tratando asimismo algo de los imaginarios. En el cuarto libro se presenta la aplicación a la *primera geometría* de la aritmética y álgebra, en el quinto la teoría de razones y proporciones y de las series. El sexto trata de aplicar a la geometría la teoría desarrollada de las razones y proporciones. De estos dos últimos libros resulta interesante la crítica de la introducción del irracional de EUCLIDES, originaria probablemente de EUDOXO, que más adelante presentaremos. En el libro séptimo se ocupa de la trigonometría, desarrollada ampliamente por EULER, en el octavo de las cónicas y en el noveno de lo que llama *álgebra imperfecta,* que comprende aquello que viene a tener un cierto aspecto patológico en el panorama matemático contemporáneo: imaginarios, series de cualquier orden, ecuaciones de tercer grado.

Eximeno se enfrenta con su tarea con gran entusiasmo y con espíritu de renovación de su nación. Así se expresa al final de su pequeño tratado: ..."Dare operam mathematicis disciplinis, omnibus perquam utile, cupientibus vero in rebus philosophicis excellere, prorsus necessarium est. Neque ulla gens, ulla natio, in qua mathematicae disciplinae non excolantur, efferet unquam caput de tenebris ignorantiae" (p. 289). (Dedicarse a las disciplinas matemáticas es muy útil para todos, pero es enteramente necesario aventajar a los conocedores de los temas filosóficos. Ningún pueblo, ninguna nación, en la que no descollen las disciplinas matemáticas levantará nunca la cabeza de las tinieblas de la ignorancia.) El mismo propone un programa concreto de renovación del espíritu científico de España. Después de haber expuesto la necesidad de una ordenación de las escuelas, prosigue: "Sed hoc parum est, a scholis enim frustra exspectes scientiarum progressum. Conquistis e tota Europa mathematicis et physicis magni nominis, constituendae sunt regiae academiae, in quibus, sine impensarum compendio, res mathematicae et physicae excolantur et promoveantur" (p. 293). (Pero esto es poco, en vano esperarás el progreso de las ciencias desde las escuelas. Reunidos los matemáticos y físicos de gran renombre de toda Europa se han de constituir las Reales Academias, en las cuales, sin escatimar gastos se cultiven y promuevan los temas matemáticos y físicos.)

Esta es la concepción de la matemática de Eximeno, de amplia visión en lo que se refiere a su influencia en el ambiente intelectual de un país.

2) La extensión y el continuo

El pensamiento del continuo, con las oscuridades y paradojas que lo envuelven, ha sido desde los tiempos de los pitagóricos y de ZENON (siglo V a.d. J.C.) una de las invevitables *cruces mathematicorum*, y al mismo tiempo uno de los catalizadores más potentes en el desarrollo del pensar matemático. ARISTOTELES (384-322) y EUXODO (siglo IV a.d. J.C.) son tal vez los más agudos pensadores de la antigüedad sobre el tema, el primero con su concepción de la potencialidad del continuo y el segundo con su teoría de las proporciones, esencialmente la de los *Elementos* de EUCLIDES (siglos IV, III a.d. J.C.) en el libro V. Ningún avance esencial se presenta en los siglos posteriores, sino más bien incomprensión de sus teorías en muchos autores hasta el siglo XVII cuando se comenzó a emplear prácticamente el infinito actual y que desemboca en los resultados de Georg CANTOR (1845-1918) que instaura una nueva concepción del continuo actual y J. W. Richard DEDEKIND (1831-1916) que pone en claro la teoría de los irracionales con su *Stetigkeit un irrationale Zahlen* (1872). En el intervalo la continuidad y los irracionales son los temas obligados en todos los que se ocupan de la fundamentación de los conceptos matemáticos, y aún después de CANTOR y DEDEKIND el tema no cesa de ocupar a los matemáticos, siendo el punto de partida para los modernos desarrollos de las diferentes escuelas matemáticas.

El primer problema que se plantea Eximeno en D.s. es el del continuo que él relaciona íntimamente con la naturaleza de la extensión acerca de la cual ya se han citado algunos párrafos bastantes característicos. Su planteo e intentos de solución de las dificultades del continuo son bastante originales. La extensión, "Prout se nobis sistit in mente", aparece, al menos en D.s., como una forma del entendimiento, no a priori, sino originada por la experiencia (p. 115). Tal extensión ideal presenta los caracteres de divisibilidad indefinida y de continuidad. Sin embargo, y esto es lo que aparece de original en el pensamiento de Eximeno, tal divisibilidad indefinida no viene a engendrar la superficie a partir del espacio, ni la línea a partir de la superficie, ni el punto a partir de la línea. El entendimiento adquiere de las cosas la idea de la extensión y juntamente la posibilidad de realizar en ella la operación de división, pero a esta posibilidad añade la de la repetición indefinida de tal operación, si bien ésta no está dada en la experiencia. Los entes geométricos se originan, según Eximeno, no como resultado de esa operación indefinidamente repetible, sino por abstracción a partir del concepto adquirido de extensión. Así, la superficie se origina a partir de este concepto mediante abstracción del espesor, la línea a partir de la superficie por abstracción de la anchura y el punto a partir de la línea por abstracción de la longitud. Esta concepción de la génesis de los elementos geométricos corresponde plenamente a la concepción potencial del infinito. Hoy podríamos decir que el punto A del segmento AB viene definido como la intersección de *todos* los conjuntos de puntos AA_1, AA_2... siendo A_1 el punto medio de AB, A_2 el medio de AA_1 etc..., pero la consideración de *todos* esos conjuntos es algo no permitido por quienes consideran solamente el infinito potencial. También cabría notar que si bien los conceptos de los elementos geométricos pueden considerarse, desde la perspectiva de Eximeno, engendrados por abstracción, sin embargo no se puede afirmar que los elementos con que se trabaja en geometría sean esos conceptos sino sus diversas concreciones. De otro modo no se podría explicar que pudiésemos habar de la superficie α y la superficie β pues si tales superficies se originan de los mismo por la misma operación habrían de resultar siempre idénticas.

La distinción de Eximeno le sirve para proponer una solución al problema de la continuidad. El carácter continuo de la extensión se puede expresar diciendo que si se consideran dos puntos distintos, entre ellos, en el segmento que determinan, existen más puntos. Ahora bien, consideremos un segmento. Este, ¿está compuesto por puntos? Parece que la respuesta obvia habría de ser que así es, puesto que en él hay puntos y sólo puntos. Pero si es así, puesto que el segmento está completamente determinado constará de un conjunto bien determinado de puntos. Tal conjunto, en la concepción potencial del infinito, sólo puede ser finito. Ahora bien, entre los puntos se puede establecer un orden, uno es anterior a otro recorriendo el segmento en un sentido determinado. Tomamos dos puntos sucesivos. Puesto que son distintos, entre ellos habría de existir más puntos y así ni serían ya sucesivos ni el segmento constaría de los puntos de que se ha supuesto. La solución aristotélica dirigida contra las paradojas de ZENON viene a consistir en afirmar que los puntos no están en el segmento sino potencialmente, en cuanto que se pueden originar idealmente en él mediante una operación de la mente, la división, seguida de la consideración del extremo común de los segmentos resultantes. Sólo cuando se realiza ésta, están ahí actualmente. Así, el conjunto de puntos del segmento no es finito, pues la posibilidad de división nunca cesa, no pueden considerarse en el segmento dos puntos sucesivos. La solución de Eximeno va por otro camino, y es menos delicada. Afirma que la división del segmento no da lugar a puntos Estos se engendran a partir del segmento no por división, sino por abstracción, y es natural que operaciones mentales distintas den lugar a distintos entes. Por división aparecen únicamente segmentos y así se puede decir que el segmento está compuesto de segmentos. Por abstracción aparecen puntos pero no se puede decir que los puntos compongan el segmento, como no se puede afirmar que el hombre se compone de un animal y de la razón. Tal respuesta no parece muy satisfactoria. Aparte de la observación hecha anteriomente sobre el origen del concepto y el origen de los elementos concretos de la geometría, parece dejar descuidada la existencia de puntos en un segmento olvidando que la relación de inclusión no es una relación lógica y dejando así como en departamentos estancos los diversos elementos geométricos.

Respecto de la aplicabilidad de las construcciones realizadas a partir de la extensión mental a la extensión corpórea ya hemos señalado antes cómo Eximeno se remite a la experiencia como piedra de toque.

3) El infinito y el infinitésimo

Con lo dicho hasta aquí sobre el concepto de la matemática propuesto por Eximeno se puede comprender fácilmente la forma de considerar el problema del infinito y del infinitésimo. Eximeno concibe el infinito a modo de una cantidad variable que se puede suponer tan grande como quiera, "eiusmodi quantitas, quam auctam et sine certo limite multiplicatam licet supponere, maior erit quavis alia data in eo genere, licebitque eam *infinite magnam* dicere, nempe maiorem quavis alia data eiusdem generis" (p. 192); ("La cantidad de esta especie, que se puede suponer aumentada y multiplicada sin límite, será mayor que cualquier otra dada de su mismo género y será lícito denominarla *infinitamente grande*, es decir mayor que cualquier otra del mismo género"). El infinito es un ente mental, una cantidad que más que infinita se debe llamar indefinida porque tiene como característica su inconclusión, su indeterminación. Se podría decir que si bien el pensamiento de Eximeno no es explícito en este punto, el infinito se concibe en él como un ente de razón caracterizado por la única afirmación de que es una actitud mayor que cualquier otra que se pueda presentar mentalmente acercándose así, tal vez, a la definición implícita de los entes matemáticos utilizada modernamente.

Asimismo se concibe el infinitésimo: "Si in aliquo genere quantitas sumi potest quavis alia data minor, neque tamen illius generis proprietates deficiant, ea erit in eo genere quantitas infinite parva: unde sicut quantitas infinite magna in magnitudine, ita infinite parva in parvitate nihil habet absoluti, nihil determinati, aut circumscripti" (p. 194). ("Si en alguna especie puede tomarse alguna cantidad menor que cualquier otra dada y no le faltan las propiedades de aquella especie, será en esa especie la cantidad infinitamente pequeña: de donde la cantidad infinitamente grande en la grandeza como la infinitamente pequeña en la pequeñez, nada tiene absoluto, nada determinado y nada delimitado.") Como se observa se recalca el carácter de indeterminación con lo que se pone más de manifiesto el carácter puramente mental de estos entes matemáticos. Con ello Eximeno se acerca a la concepción de la diferencial como una verdadera función que depende de la curva o de la función de la que se ha extraido. Discute e intenta aclarar a la luz de esta consideración la diferencia entre el 0 y el dx que aparecen en el cálculo diferencial y que tan a menudo conducen a absurdos y paradojas. La diferenciales no son meras cantidades evanescentes que se puedan indentificar a 0 en el momento oportuno. Cada una, dependientemente de la función de la que es diferencial, tiene su modo diferente de hacerse indefinidamente pequeña. Así, explica, cuando se consideran las diferenciales en una recta que pasa por el origen se puede poner $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$, pero cuando se tiene otra curva y se consideran las diferenciales, ya no resultará, como afirman algunos, verificada la igualdad anterior, sino que se tendrá otra relación distinta.

El infinito actual no ocupa lugar ninguno en la matemática de Ximeno, ni tampoco se propondrá el problema cuando trata de los números irracionales. Habrá de transcurrir cerca de un siglo hasta que B. BOLZANO (1781-1848), con sus *Paradoxien des Unendlichen* (1851) y más tarde G. CANTOR (1845-1918) introduzcan firmemente la problemática y adopten una postura decidida.

4) El irracional

En la doctrina del irracional como en la fundamentación de la *geometría prima* que comentaremos a continuación se encuentran patentemente dos ejemplos bien claros de la incomprensión de Eximeno y de los muchos de sus contemporáneos sobre la intención de EUCLIDES, contra quien direge graves críticas, las más de ellas injustificadas. La teoría de EUCLIDES sobre las proporciones mediante la cual introduce el número irracional se halla expuesta en el libro V de sus *Elementos*. Un buen comentario de ellos presenta HEATH, T.L. *The thirteen books of Euclid's Elements* 2 (New York, 1956), II, 114, o bien el mismo autor en *A History of Greek Mathematics* (Oxford 1921). Para dar una idea del método de EUCLIDES que propiamente es de EUDOXO (s. IV a.d.C.), diremos a continuación las definiciones más importantes con las que comienza el tratado de las proporciones.

Def. 3. Una razón es una especie de relación respecto a la cantidad entre dos magnitudes de la misma clase.

Def. 4. Se dice que dos magnitudes está en una razón una a otra cuando son tales que multiplicadas pueden exceder la una a la otra.

Def. 5. Se dice que cuatro magnitudes están en la misma razón la primera a la segunda que la tercera a la cuarta, si cuando se toman equimúltiplos de la primera y tercera y equimúltiplos de la segunda y la cuarta, los primeros son mayores, iguales o menores que los segundos simultáneamente tomándolos correspondientemente.

La introducción de EUCLIDES de la proporción parece a primera vista inútilmente artificiosa, sobre todo la definición cuarta, pero la razón de tal complicación estriba por una parte en el deseo de introducir una teoría de la proporción válida para toda clase de magnitudes que satisfagan el axioma de medida (Definición 4), y por otra, más decisivamente, en la intención de introducir la igualdad entre razones de modo válido aún en el caso de que las magnitudes que se consideran no sean conmensurables. Se trata por consiguiente de un intento impecable de introducción de la aritmética de los irracionales, asombrosamente rigurosa para su época, que no ha necesitado apenas modificaciones para convertirse, con una presentación algo más formal y precisa, en la moderna teoría del irracional, tal como viene presentada por el método de las cortaduras de DEDEKIND (1831-1916) en su *Stetigkeit un irrationale Zahlen* (1872). Lo que se introduce en realidad mediante la Def. 4 no es sino una cortadura en el cuerpo de los números racionales y una relación de equivalencia entre las cortaduras así introducidas.

Eximeno, sin embargo, no echa de ver la importancia de la introducción de EUDOXO, pasando por alto el estado de la cuestión en el problema del irracional. Introduce una distinción entre la *relatio seu ratio arithmetica* y la *ratio geometrica* (p. 183). La aritmética es la que existe entre números. La geométrica entre magnitudes que a veces no presentan una razón conmensurable. La cantidad irracional siempre puede ser representada por una línea (p. 184). Al proceder así olvida totalmente la problemática de los clásicos, que pretendían fundamentar su geometría sobre la aritmética, poniendo unos cimientos mucho más amplios de lo que aquellos se permitieron con la finalidad de establecer más rigurosamente su edificio. La incomprensión de Eximeno se manifiesta en las críticas que hace del proceder de Euclides. "Cum autem neque signis algebraicis neque geometria quotos surdos sciret exprimere, ne a tractatione sua relationem incommensurabilium excluderet, noluit ex quotorum aequalitate proportionem definire" (p. 185). ("Pero no al saber expresar los números sordos con signos algebraicos, ni por geometría, para no excluir de su estudio a su relación con los inconmensurables, no quiso definir la proporción a partir sus igualdades.") En el cambio introduce la proporción por la igualdad de razones simples, aún cuando se trate de inconmensurables, olvidando que se trata precisamente de saber qué es una razón simple en el caso de inconmensurabilidad. Naturalmente que en el caso de la relación aritmética sobra toda complicación, pero no en el caso general. Con todo, a Eximeno no le falta visión crítica de este punto cuando comenta otras introducciones de la proporción. Así, al hablar de TACQUET que define la razón como "*mutuam magnitudinum* habitudinem secundum quantitatem" y las "rationes aequales" "quarum antecedentia vel aeque vel eodem modo continent sequentia unumquodque suum", y acaba por decir que no se debe preguntar cuál sea "ille modus, qui in incommensurabilibus inexplicabilis est", Eximeno le ataca por su añadidura del *eodem modo* y su fallo en explicar este modo afirmando "in quo fallitur, clare enim explicatur per quantitates surdas et per lineas". Lo que Eximeno presupone es que toda "razón" entre inconmensurables es representable por una línea, en lo cual lleva razón y puede reducirse al axioma de Cantor, pero lo que ignora es la intención de EUDOXO y EUCLIDES de atenerse a un punto de vista más operacional, con una concepción más delicada de la existencia matemática, aparte de su interés por apartarse de una concepción geométrica para construir una teoría de la proporción mucho más amplia.

Un punto relacionado con la teoría de los infinitésimos e irracionales aparece anunciado, pero no explicitado, en D.s. Cuando Eximeno habla del camino que seguirá en su obra para establecer la igualdad de la razón entre las áreas de dos círculos a la de los cuadrados de los radios, problema para él que en la Antigüedad se ideó el método de las lúnulas (HIPOCRATES, s. V a.C.), afirmará que utilizará los infinitésimos y dice que definirá "quid sit *quantitatem aliquam in aliam desinere aut degenerare.* Demonstro exinde hoc lemma: *quantitates quae in alias desinunt, eamdem ac istae inter se rationem habent;* atque hoc theorema: *circuli in polygona ipsis inscripta aut circumscripta degenerant;* ex quibus conficio, *circulos esse inter se ut diametrorum quadrata.* Sería interesante conocer ese concepto de *desinere aut degenerare.* Tal vez algo semejante a una definición de límite. ("en qué consiste *que una cantidad se convierta o que degenere en otra.* A partir de aquí demostró este lema: *las cantidades que se convierten en otras tienen entre sí la misma razón que existe entre éstas;* y también este teorema: *los círculos degeneran en polígonos inscritos o circunscritos en los mismos círculos:* de los que concluyo que *los círculos se comportan entre sí como los cuadrados de los diámetros.)*

5) Los fundamentos de la geometría

En la fundamentación de la Geometría, otro de los puntos centrales en la investigación de los fundamentos, Eximeno sigue fiel a su intención desformalizadora de la Matemática, atacando abiertamente la actitud de EUCLIDES y manifestando con ello su propia incomprensión de la marcha de pensamiento de los Elementos. La concepción inicial de la Geometría de Eximeno difiere de la clásica en su propia raíz, si bien en su ulterior desarrollo se acomoda a ella. Para Eximeno tiene sentido de fundamento todo aquello que se presenta como evidente a partir de los datos de la extensión ideal. Esta coincidencia es para él el criterio de existencia. La Geometría de los *Elementos* de Euclides, sedimento de toda una tradición de polémica y crítica alrededor de los fundamentos, con su afán de establecer una doctrina clara y segura, busca su base en un mínimo de principios, postulados, que son propiamente todos postulados de existencia y es por ello mucho más formal y menos expuesta a divergencias. Sobre la base convencional de los postulados, reconocida explícitamente como convencional, y esto es un rasgo admirable de los *Elementos*, se procede a construir un edificio con el instrumento de los axiomas o nociones comunes y los principios de la lógica deductiva. Así, se postula el poder trazar un segmento que una dos puntos, se postula poder trazar un círculo con cualquier centro y cualquier radio, se postula poder prolongar de modo continuo cualquier segmento, etc... La incomprensión de Eximeno se manifiesta en su crítica de la fundamentación de EUCLIDES.

Observemos el mismo principio que coloca de base de su geometría, el axioma de congruencia: "extensiones, quae, si altera superimponatur alteri, undique congrunt, sunt omnino aequales: et contra, extensiones omnino aequales si altera altri superimponatur, perfecte congrunt" (p. 128). ("Si unas extensiones se superponen unas en otras y son congruentes son totalmente iguales: y por el contrario extensiones totalmente iguales si se superponen la una a la otra son perfectamente congruas.") Aquí no se presta atención ninguna al modo como se ha de realizar esta superposición. No ha habido pensamiento crítico ninguno acerca de una posible deformación de las figuras o *extensiones* con el movimiento, como parece haber existido en EUCLIDES, tan cuidadoso en postular esta invariancia frente a los movimientos del segmento. Así es como Eximeno, naturalmente ha de criticar como superflua la proposición segunda del libro primero de EUCLIDES en la cual se demuestra cómo se puede llevar sobre un segmento dado un segmento igual a uno dado. La concepción de las definiciones de la Geometría viene expresada por el mismo Eximeno con las palabras siguientes: "scire oportet, definitiones in prima geometria illos extensionis modos circumscribere debere, quos omnes homines sensus participes ab usque pueritia repositos in mente habent, quosque verbis definitionis admonitus quisque sibi facile fingit, et perspicue percipit" (p. 135). ("Conviene saber que las definiciones en la primera parte de la geometría deber circunscribirse a aquellos modos de extensión que todos los hombres con sentido tiene depositados en la mente desde la infancia los cuales advertidos por las palabras de una definición se las representan fácilmente y perciben cada una de forma evidente.") Aunque el mismo principio ha estado presente en EUCLIDES, al tratarse de definiciones, sin embargo Eximeno lo prolonga asimismo en su propia fundamentación más allá de éstas, en los axiomas mismos que él propone.

Eximeno propone como definición de línea recta: "brevior inter duo puncta distantia" y como línea perpendicular: "quae ex dato puncto recta tendit in rectam, ut haud magis in alteram partem quam in alteram declinet" (p. 130). ("La distancia más breve entre dos puntos, la recta que desde un punto dado tiende a una recta y no se inclina más a una parte que a otra.") A mi parecer, tales definiciones, sobre todo la segunda son bastante más defectuosas que las de los *Elementos*. No faltó en la Antigüedad quien interpretase la misma definición con EUCLIDES de la recta como línea que yace igual sobre cada uno de sus puntos en el sentido propuesto por Eximeno, como PROCLO, SIMPLICIO y otros, pero parece que la interpretación más acertada es la que considera la recta como aquella línea que por descansar igual sobre cada uno de sus puntos se puede llegar a convertir, para la visión, mirándola de delante a atrás, en un punto (Cfr. HEATH, T.L. The thirteen books of Euclid's Elements 2 (New York, 1956) I, 167). La definición de perpendicular de Eximeno presupone los conceptos de inclinación y la desigualdad entre las inclinaciones, lo cual implica en una introducción que quiera ser rigurosa los de ángulos y de igualdad entre ángulos.

Es interesante la crítica que presenta Eximeno de la definición de paralelas propuesta por Euclides, que presenta, citando a CLAVIO, "quae exsistentes in eodem plano, si utrinque producantur in infinitorum, numquam altera cum altera concurrit" (p. 136). Su crítica se dirige contra el *in infinitum*, por carecer de sentido, como afirma acertadamente. ("Son las que existentes en el mismo plano si se prolongan al infinito nunca la una con la otra concurre. Euclides dice "hacia el infinito.") Pero hay que hacer notar que EUCLIDES dice *εις α̣ειρον* "que mejor sería traducir por indefinidamente, más conforme con su mente que no concibe la línea recta como infinita, sino como segmento indefinidamente prolongable". Por otra parte, Eximeno ataca la definición arguyendo con la existencia de líneas asintóticas. "Vitium est, rectas parallelas definere ex proprietate, quae, sumto ex aliis lineis argumento, dubitari potest, possitne ipsa convenire rectis, neque idea sint parallelas: neque tolletur hic scrupulus, priusquam demonstretur, rectas existentes in eodem plano, si in infinutum productae non concurrant, ad sese mutuo non accedere vel aeque inter se ubique distare; quae est prima et quasi innata parallelarum idea" (p. 136). ("Es un vicio definir las rectas paralelas a partir de esa propiedad, que podría ser dudosa, asumido el argumento para otras líneas, de si acaso en un punto se juntarían las rectas y no por ello serían paralelas, no se quita este escrúpulo antes de que no se demuestre que rectas existentes en el mismo plano si se prolongan al infinito no concurren entre sí mutuamente, no se aproximan o distan igualmente entre sí por todas parte. Lo cual es la primera y casi innata idea de las paralelas.") En este punto está subyacente en el pensamiento de Eximeno su propia definición de rectas paralelas "quae aeque inter se distant ubique" ("las que distan igualmente entre sí por todas partes"), viniendo a afirmar en última instancia que es vicioso definir las rectas paralelas como lo hace EUCLIDES porque de hacerlo así se puede dudar que las rectas definidas sean paralelas según la definición de conservación de la misma distancia entre ellas. El introducir la paralela de este modo que propone Eximeno tiene el inconveniente de que sería así necesario demostrar que tal línea equidistante a una recta es realmente recta, lo cual no se puede sin introducir un postulado más.

Ataca asimismo el postulado quinto por falta de evidencia. El error y la complicación innecesaria que introduce EUCLIDES proviene de la definición de rectas paralelas anterior: "Quapropter in Euclidis definitione id latet vitii, quod quas ille ait esse rectas paralelas, ut tales esse evidentes perspiciatur, demonstrandum est paralelas esse. Error huius definitionis in alium multo peioren Euclidem traxit, que inter axiomata ponit: *si duae rectae...*" (p. 137). ("Por ello en la definición de Euclides este error está latente, las que él dice que son rectas paralelas, para que se vea que son todas, hay que demostrar que son paralelas. El error de esta definición lo extendió a algo peor, por que pone entre los axiomas si dos rectas...") Euclides en realidad no coloca esto entre los axiomas, sino entre los postulados, que en un sistema que pretende ser formal, no tienen que ser necesariamente evidentes. Tal equivocación proviene en realidad de CLAVIO, quien presenta el postulado de las paralelas entre los axiomas. (C. CLAVIUS, *Euclidis elementorum libri XV*, (Romae 1603).).

6) Los imaginarios y los logaritmos

Los imaginarios constituyeron, hasta que GAUSS (1777-1855) aclaró su naturaleza en la *Theorie der biquadratischen Reste* en los Gottingshe Anzeige (1831), una de esas piezas, frecuentes en la historia de las ciencias exactas, que tanto, físicos como matemáticos van utilizando con éxito aunque sin saber bien a qué se puede deber tal éxito. Introducidos en el siglo XVI para tratar la ecuación de tercer grado constituyeron por tres siglos un escándalo permanente. Ya hemos visto cómo se expresa LEIBNIZ acerca de la naturaleza monstruosa de estos números. En el siglo XVII se pensaba que eran de diverso orden según el orden de las raíces de que provenían. LEIBNIZ mismo demuestra que $\sqrt[3]{a+bi} + \sqrt[3]{a-bi}$ es real. En el XVIII se habitúan los matemáticos más y más al cálculo con imaginarios procediendo con la confianza propia del siglo. En 1746 D'ALAMBERT afirma que todos los imaginarios son de la forma $a + bi$. Su demostración, aunque no rigurosa, es universalmente aceptada. La representación geométrica de los imaginarios es introducida en 1673 por WALLIS (1616-1703) y más tarde, en 1797, de nuevo por WESSEL (1745-1818) pero no se difunde hasta GAUSS.

Eximeno introduce los imaginarios en su Matemático, pero los introduce como monstruos, como entes patológicos, cuya utilización conduce a paradojas y a errores. "Vides igitur prima geometricae lumina Leibnitium, Bernullium, Eulerum, Riccatium, eorumque sectatores Pessutium et Calandrellium es iisdem pricipiis in contrarias conclusiones abire, earundem aequationum ope, quod alter adstruit, alterum destruere... Expungendaene erunt de arte analytica imaginaria? Paucarum equidem rerum utilium foret, si expungerentur, iactura" (p. 246). ("Y así ves que las primeras luces de la geometría de los Leibniz, Bernouilli, Euler, Riccati, de sus seguidores Pessuto y Callandrelli, se desvían a partir de los mismos principios en conclusiones contrarias. Y por efecto de las mismas ecuaciones lo que uno contruye, destruye el otro... Se podrán entresacar las imaginarias del arte analítica? igualmente de poca utilidad sería si una vez escogidas fueran desechadas.") Las principales razones que le perturban en el manejo de los imaginarios son las dificultades de los signos. ¿Se debe escribir $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = 1$, o bien $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$? El se inclina a lo primero, pues $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, pero por lo segundo existe la razón de que $(\sqrt{a})^2 = a$. Naturalmente que la dificultad nace en la duplicidad de la raíz cuadrada que no pasa por el pensamiento de Eximeno, aunque en cierta ocasión aparecen explícitamente las tres raíces cúbicas de la unida 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (p. 281). Asímismo presenta la siguiente paradoja:

$$\frac{1+\sqrt{1-q}}{1-\sqrt{1-q}} = \frac{\sqrt{-1}+\sqrt{-1+q}}{\sqrt{-1}-\sqrt{-1+q}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{-1}}\sqrt{-1+q}}{1-\frac{1}{\sqrt{-1}}\sqrt{-1+q}} = \frac{1-\sqrt{1-q}}{1+\sqrt{1-q}}$$

que nace de la misma confusión anterior.

Los logaritmos, especialmente de los números negativos, que él admite siguiendo las recientes consideraciones de EULER, también tienen su vertiente oscura. Es interesante observar que aquí admite la multiplicidad del logaritmo de un número cualquiera, aún sin aclarar los resultados contradictorios que a veces se obtienen, pero haciendo constar los problemas que en la admisión de tales logaritmos resultan tales dificultades nacen esencialmente de la incomprensión de que al tratar de pasar de una operación a su inversa puede perderse la univocidad que se daba en aquélla.

Estos son los rasgos más importantes del pensamiento matemático de Eximeno, con bastantes sombras, pero con no menos luces, que hacen lamentar que no se llegase a realizar el proyecto de Eximeno de sacar a la luz su obra matemática completa, que hubiera ayudado ciertamente a la renovación científica en España.

NOTAS:

1. El discurso de ingreso en la Academia de Ciencias de D. José de Echegaray es quizás el mejor y más extremo ejemplo tanto de la condena, como de los argumentos exhibidos.

2. Desde que se inició la conocida polémica sobre la "ciencia española" los defensores de dicha ciencia agruparon a conservadores, desde el punto de vista político e ideológico, y entre los negadores de su *existencia* se han contado los liberales y los más críticos de los intelectuales de los respectivos períodos históricos en los que se produjo la polémica, hasta nuestros días. Otra de las características de la mayoría de los participantes en la polémica fue la subjetividad de los argumentos faltos del conocimiento de los textos y en bastantes casos de la formación científica necesaria para enjuiciar la obra de los científicos.

3. Uno de los trabajos más interesantes sobre las matemáticas en España en el siglo XVIII, es el de Cuesta Dutari, N.; *El maestro Juan Justo García*, 2 vol., Salamanca, Univ. de Salamanca, 1974. Otro trabajo con gran cantidad de información es el artículo de Echarri, A; *Desarrollo de las Matemáticas y la Física durante el siglo XVIII y algunas causas de la decadencia en el XIX*, 12 Reunión Anual de Matemáticos Españols, 1976, y finalmente bastaría con consultar las biografías de los matemáticos españoles del XVIII en LOPEZ PIÑERO, J. M. GLICK, T. F. (en prensa). - *Diccionario biográfico de la Ciencia Moderna en España*.

4. Acerca de este tema V. TORRES VILLARROEL, DIEGO DE, *Vida, ascendencia, nacimiento, crianza y aventuras*, edición de Gui Mercadier, Clásicos Castalia, Madrid, 1972; RIBERA, Fr. Manuel BERNARDO. *Dictamen que sobre creación de Academia de Matemáticas*, Salamanca, 1758 CUESTA DUTARI, N. *El maestro Juan Justo García*, 2 vol., Salamanca, 1974, y Peset Reig, M y J. L.; Un buen negocio de Torres Villarroel, *Cuadernos Hispanoamericanos*, (279) septiembre, 1973.

5. Op. cit. p. 112.

6. Los datos sobre estos personajes poco conocidos aparecen de forma ocasional y dispersa bien en la literatura de la época, principalmente en los libros de viajes como el del P. Caimo, o en obras especializadas, como es el caso de la citada de Cuesta Dutari, Cfr. 3.

7. Acerca de los textos para la enseñanza publicados en este siglo de autor español es conveniente repetir la observación, una vez más, dirigida a investigadores e historiadores que ocasionalmente se ocu-

pan de la historia de los matemáticos españoles, referente a la actitud mantenida muy frecuentemente por ellos respecto a dichos textos. Ellos los han considerado copias de otras obras y por ello desprovistos de valor científico alguno. Esta actitud puede considerarse parte de la más general mantenida por los *cazadores de precursores de nuevas ideas*, que no pueden comprender que los libros escritos en Europa en aquel siglo, para aprender matemáticas tenían generalmente el mismo contenido. La diferencia, de unos a otros textos, estaba en la claridad de exposición en la selección de los ejemplos, en haber sabido incluir los últimos resultados, todo lo cual necesita para valorarlo de alguien que conozca algo más que las técnicas de cálculo en matemáticas.

8.

9. La Gaceta de Madrid tenía en sus páginas finales una seleccion de libros y revistas que se publicaban en Madrid principalmente. La obra de Eximeno apareción en la Gaceta repetidas veces a partir de 1789.

10. Los matemáticos españoles del último tercio del XVIII hicieron gala en sus escritos, particularmente en los prólogos a los textos matemáticos, de una cultura y un conocimiento de la matemática de su tiempo muy amplios. Lo cual contrasta con la imagen que se nos ha venido ofreciendo de la historia de las matemáticas en España V. Garma, S. *Los matemáticos españoles y la historia de las matemáticas del S XVIII al XIX*. Actas del primer Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias. Madrid (en prensa).

BIBLIOGRAFIA

ECHARRI, J.– (Artículo inédito sobre los orígenes del pensamiento de Balmes).

EXIMENO, A.– *De studiis philosophicis et mathematicis instituendes* (Madrid, 1789).

EXIMENO, A.– *Institutiones philosophicae et mathematicae* (Madrid, 1796).

MENENDEZ Y PELAYO, M.– *Historia de las ideas estéticas en España* 2 (Santander, 1947), t. III, pp. 622-240.

OTAÑO, N.– El P. Antonio de Eximeno. Estudio de su personalidad a la luz de nuevos documentos. (Madrid, 1943).

URIARTE-LECINA.– *De la biblioteca de escritores de la Compañía de Jesús pertenecientes a la Antigua Asistencia de España* (Madrid, 1929-1930), t. II, pp. 543-548.