Santiago Garma

La primera exposición de la teoría de Galois en España.

**Facultad de Económicas,
Universidad Complutense, Madrid.**

0. Durante el curso 1896-7 expuso don José Echegaray y Eizaguirre, en el Ateneo de Madrid y por primera vez en España, la Teoria de Galois. El esfuerzo considerable que requería la lectura del tema, la sensibilidad hacia su importancia, correspondia con el intento que estaban realizando, desde mediados del siglo XIX, algunos profesores de Escuelas Especiales Superiores de Ingenieria y de Universidades por alcanzar el nivel de conocimientos matemáticos de franceses, ingleses, italianos y alemanes.

Los científicos españoles habian quedado desde los comienzos del siglo descolgados de la vida científica europea. Sólo después de la desaparición de Fernando VII se reanudó, con el natural retraso, la vida activa científica. El ambiente fue inicialmente pobre, sólo se pudo contar con un número escaso de profesores para la enseñanza superior en las recién creadas escuelas de ingenieria y facultades de ciencias. Los medios necesarios, libros y laboratorios, eran insuficientes, y la falta de costumbre de la necesaria comunicación entre científicos contribuia aún más a sembrar el desánimo y la desesperanza de poder llegar a adquirir un nivel científico aceptable. Aun así el entusiasmo de los más jóvenes, en la década de los cincuenta comenzó a ver algunos resultados a partir de 1860.

El más activo de estos profesores fue don José Echegaray, ingeniero de caminos, profesor primero de Cálculo Superior y de otras asignaturas específicas de ingeniería en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. La primera vez que apareció en el escalafón de profesores de la Escuela fue en 1855, trayendo su incorporación a la enseñanza importantes novedades, como lo fueron sus lecciones sobre Cálculo de Variaciones, durante el curso 1857-58, que fueron recogidas y editadas en una colección de Memorias por la *Revista de Obras Públicas*.

Por lo que se refiere a los trabajos de Evaristo Galois es notable que a pesar de la profunda influencia que han tenido en el desarrollo del álgebra moderna estuvieron ignorados, después de su muerte, hasta 1843 en que Liouville los presentó a la Academia de Paris. A partir de aquel momento empezó a reconocerse por los matemáticos franceses su importancia, siendo principalmente Serret y Jordan los primeros en recoger sus resultados.

1. Los métodos, problemas y resultados que guían en la primera mitad del siglo XIX las investigaciones en el álgebra siguen tres direcciones, principalmente: la resolución de ecuaciones algebraicas, aplicaciones de la teoría de ecuaciones a la resolución numérica de ecuaciones y el estudio de las estructuras algebraicas. A la primera de estas grandes direcciones pertenecen las sucesivas investigaciones de Lagrange, Abel y Galois. Los antecedentes del problema están unidos al origen de los primeros planteamientos matemáticos, es decir, que el intento de solucionar ecuaciones de grado mayor que 1 con toda generalidad es muy antiguo. Los primeros documentos escritos que recogen estos problemas y resuelven numéricamente ecuaciones inmediatas de segundo y tercer grado proceden de los asirios, caldeos y babilonios, estando dedicados muchos de ellos a coleccionar problemas de este tipo. Los griegos estudiaron la solución de las ecuaciones de segundo grado ayudándose de construcciones geométricas obteniendo resultados considerados sorprendentes por muchos de los matemáticos contemporáneos. Sin embargo, para encontrar la solución de la ecuación de tercer grado fue necesario esperar hasta el siglo XVI. Luca Pacioli en la *Summa Aritmética*, editada a finales del siglo XV, consideraba este problema de tan difícil solución como el de la cuadratura del círculo.

A comienzos del siglo XVI el estado del problema era el siguiente: todas las ecuaciones de tercer grado conocidas habían sido transformadas suprimiéndose uno de sus términos quedando reducido su estudio a los tres tipos siguientes:

$$x^3 + px = q, \; x^3 = px + q, \; x^3 + q = px$$

en donde los coeficientes p, q son números positivos[1]. En Italia, el geómetra veneciano Scipion del Ferro encontró la difícil solución a la ecuación de tercer grado de la forma $x^3+px=q$ y parece que también la logró en los restantes casos. Después de su muerte en 1526, al no haber sido hechos públicos sus resultados y al saberse su existencia se siguió investigando. En 1535 Niccoll Fontana, más conocido por Tartaglia, encontró la solución a la ecuación de la forma $x^3+ax^2=b$, haciéndola pública, pero manteniendo su mecanismo oculto. Finalmente después de muchas promesas le reveló el procedimiento al milanés Hierónimo Cardano el cual la expuso en su *Ars Magna* en 1545. También aparecía en la obra la solución general de la ecuación de cuarto grado que se debió a su discípulo Ludovico Ferrari. El procedimiento por el que se llegaba a las soluciones consistió en hacer un cambio de variable adecuado. Es decir, siendo la ecuación

$$x^3 + px = q$$

cambia la variable en

$$x = y + z$$

con la condición

$$yz = -\frac{p}{3}$$

Sustituyendo en la ecuación, queda

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y + z) = q$$

de donde obtenemos

$$y^3 + z^3 + (-py) + (-pz) + p(y + z) = q$$

Así pues tenemos

$$y^3 + z^3 = q, \quad \text{y,} \quad y^3z^3 = -\frac{p^3}{3^3}$$

como

$$y^3 = q - z^3, \quad (q - z^3)z^3 = -\frac{p^3}{3^3}, \quad \text{o,} \quad (z^3)^2 - qz^3 - \frac{p^3}{3^3} = 0$$

$$z^3 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4\,p^3/3^3}}{2} \quad ; \quad y^3 = q - z^3 = \frac{q \mp \sqrt{q^2 + 4\,p^3/3^3}}{2}$$

luego

$$x = y + z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Es evidente la resistencia que ponen los geómetras a usar en sus ecuaciones términos con coeficientes negativos. Sin embargo, no tienen ningún obstáculo en usar la resta entre cantidades o incógnitas. Tanto el uso de números negativos como la asociación con hallar la diferencia entre dos cantidades no fue aceptado plenamente hasta el siglo XIX.

2. Una vez resueltas estas ecuaciones, el paso siguiente era intentar la solución a la ecuación de quinto grado. De nuevo hubo que aceptar una larga espera hasta los comienzos del siglo XIX. La espera estuvo llena de resultados muy fructíferos, soluciones particulares y, en resumidas cuentas, de una acumulación de problemas agotando todos los caminos de solución posibles que llevó a otro nivel epistemológico. Desde la mitad del siglo XVIII el problema se estudió con bastante intensidad hasta que en 1770 se encuentran los primeros resultados importantes en dos Memorias, una de ellas debida a Van der Monde y la otra a Lagrange. En ambas hay un cambio de orientación en el estudio del problema, con más claridad en la del segundo que en la del primero. Un análisis sistemático de los problemas propuestos y de los métodos susceptibles de resolverlos había substituido al empirismo más o menos afortunado de las soluciones con fórmulas. Los dos autores se fijaron en la ambigüedad que introducían las determinaciones con radicales en las ecuaciones de grado 4. Por ejemplo, Lagrange

señaló que cada uno de los radicales cúbicos de la fórmula de del Ferro podían escribirse de la forma

$$1/3(x_1 + x_2w + x_3w^2)$$

donde w representaba una raíz cúbica de la unidad[2]; y x_1, x_2 y x_3 las tres raíces de la ecuación propuesta. La observación más importante que hizo Lagrange fue que la función de las tres raíces no podía tomar más que dos valores distintos para todas las permutaciones posibles de las tres raíces. Lagrange se propuso entonces la aplicación de estos resultados a una ecuación de grado n y estudiar el número de valores que tomaba una función racional $V(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ de las raíces de la ecuación al permutarlas de todas de todas las formas posibles. Al particularizar el estudio para una ecuación de quinto grado se encontró con que el grado aumentaba por lo que era previsible que la ecuación no tuviese solución. En 1799 publicó Ruffini una demostración oscura y difícil de entender, con algunas partes incompletas, pero muy aproximada a la demostración dada por Abel en 1824, que probaba de forma determinante la imposibilidad de encontrar solución por medio de radicales de ia ecuación de quinto grado[3].

El problema que quedó abierto a la muerte de Abel fue: ¿cuándo es posible resolver por radicales una ecuación? La respuesta no tardó mucho en darse, pero tardó mucho en reconocerse.

En 1832 un joven francés, Evaristo Galois, moría en un duelo motivado en extrañas circunstancias. Había presentado a la Academia de Ciencias de París tres Memorias que de una forma o de otra habían sido rechazadas y parecían perdidas para la comunidad matemática. El 4 de julio de 1843, Joseph Liouville, rindiendo culto a la amistad, presentó de nuevo a la Academia los resultados de Galois, comenzando ésta con las siguientes palabras:

> «Espero interesar a la Academia anunciando que entre los papeles de Evaristo Galois he encontrado una solución tan precisa como profunda de este bello problema; si es o no resoluble por radicales...».

3. La vida de Evaristo Galois no fue ni brillante ni afortunada, estuvo continuamente sometida a la incomprensión de la mayor parte de los que le rodearon. Nació en Bourg-la-Reine, en los alrededores de París, en 1811. Su padre fue un republicano, liberal y anticlerical. Su madre, hija de un abogado, había recibido una sólida educación religiosa, podía leer el latín con facilidad y era buena conocedora de los clásicos. Hasta que su hijo cumplió los doce años fue su único maestro. En 1823 ingresó en el Liceo Louis-le Grand. Durante su estancia en el Liceo aprendió de sus compañeros el sentido de la justicia que marcaría toda su vida, recibió el primer premio en Latín y se mostró como un buen trabajador mental y aparentemente confuso. Tuvo que repetir el curso 1826-1827, descubriendo al año siguiente las matemáticas. Leyó entonces las obras de Legendre, Lagrange y Abel. Entre sus profesores fue considerado por algunos como un prometedor matemático y por otros como un ambicioso en busca de notoriedad. Intentó el ingreso en la famosa Ecole Polytechnique, pero su forma de trabajo descuidada, la falta de método, a pesar de los consejos y ayuda de su profesor Vernier, le llevó al fracaso. Veinte años más tarde, Terquem, editor de los Nouvelles Annales des Mathématiques, dio la explicación

siguiente al examen: «Un candidato de inteligencia superior se perdió por un examinador de inteligencia inferior. Como no me entienden soy un bárbaro...».

En 1828-1829 es alumno del excelente M. Richard, consigue el ingreso en la Ecole Normale. Su profesor defiende su ingreso en la Ecole Polytechnique sin examen. En 1 829, se suceden las dificultades, el padre de Galois se suicida y en el último intento para ingresar en la Ecole Polytechnique es suspendido por el examinador Dinet. El mismo año presenta una Memoria a la Academia de Ciencias sobre las ecuaciones algebraicas de primer grado que, después de ser juzgada por Cauchy, así como otra presentada unos días más tarde, so n rechazadas. En 1830 presenta una importante Memoria sobre las condiciones de resolubilidad de una ecuación por radicales para optar al gran premio de matemáticas. Fourier se llevó su trabajo, pero muere al poco tiempo perdiéndose la Memoria. Ante la repetida pérdida de sus papeles, Galois publica una carta dando a entender que esta pérdida no era casual y dice entre otras cosas: «la mediocridad que demuestra su repugnancia por el nuevo orden de cosas, todavía está privilegiada».. En 1831, ante la invitación de Poisson, presenta una nueva Memoria sobre la resolución de ecuaciones. Poisson y Lacroix, en ausencia de Cauchy, serían los jueces; después de seis meses de espera, el 4 de julio de 1831, Poisson le informaría: «Hemos hecho un verdadero esfuerzo para entender la demostración de Galois. Su razonamiento no está lo suficientemente claro, suficientemente desarrollado, para que nosotros juzguemos su corrección... no podemos proponer que se le dé la aprobación». Durante aquel intervalo de tiempo se había unido a la artillería de la Guardia Nacional, siendo arrestado después de un banquete bajo la acusación de haber lanzado amenazas contra el rey, dejándosele en libertad unos días después. El 14 de julio encabezó una manifestación republicana, es arrestado y enviado a la cárcel de nuevo durante un periodo de seis meses. Durante su estancia en la cárcel aprovecha para releer su Memoria sobre la resolución de ecuaciones y redacta el prefacio. En marzo de 1832 recupera su actividad matemática normal y rompe unas relaciones amorosas con una tal señorita Stephanie D. En circunstancias extrañas es provocado a un duelo del que saldría mortalmente herido. La noche anterior, convencido de su muerte, escribe a su amigo Chevallier una carta considerada como su testamento matemático y otra a sus amigos republicanos. La primera de ellas terminaba con un párrafo bien conocido de los matemáticos, que dice: «pedirás públicamente a Jacobi o a Gauss que den su juicio no sobre la verdad, sino sobre la importancia de los teoremas. Después de esto habrá, espero, gente que encontrará gusto en descifrar todo este lío».

La Academia publicó las *Memorias de Galois* en 1846, después de la intervención de Liouville. Pero hasta que fueron recogidos sus resultados en un texto de matemáticas, relacionando su teoría con el resto del álgebra, hubo que esperar a que Camille Jordan publicase su *Traité de Substitutions et des Equations Algebriques*, en 1870. Después, Picard publicaría bajo los auspicios de la Academia, en 1877, la obra completa de Galois.

4. En España se llevaban a cabo, en los años que siguieron a la muerte de Galois, cambios en la estructura universitaria. Y la sensibilización necesaria, para la industrialización, hacia los problemas de la técnica había hecho necesario el desarrollo de enseñanzas y estudios de matemáticas. El ambiente universitario todavía es pobre pero es menos hostil a estos estudios. A partir de 1860 comienza a contarse con un cierto número de aceptables matemáticos que realizan un esfuerzo considerable por

alcanzar el nivel de conocimientos de sus vecinos franceses, de los ingleses y de los alemanes. Una muestra de este estado de cosas es la aparición, por primera vez en la literatura matemática española, de la Teoría de Galois. Dado que no contaba el país con una comunidad matemática organizada sino con algunas individualidades, la fecha de 1886 puede considerarse temprana para esta presentación.

Es Zoel García de Galdeano, por entonces catedrático del Instituto en Toledo, quien por primera vez, en su *Tratado de Algebra* en 1886, primero, y en su *Crítica y síntesis del Algebra* en 1888, cita y enuncia el teorema de Galois. Por el contexto en donde aparecen las referencias a la Teoría parece deducirse que el tema era bastante conocido entre el público lector de su obra, o al menos así lo da a entender el autor. No es de extrañar, entonces, que unos años más tarde los más inquietos de nuestros científicos se preocupasen de organizar una exposición, a lo largo de un curso, de la difícil Teoría.

A comienzos del curso 1896-1897, en el Ateneo de Madrid, la institución cultural en la que se reunían las personas más preocupadas por el avance científico y cultural, inició sus lecciones sobre la *Teoría de Ecuaciones*, José Echagaray y Eizaguirre, ingeniero de Caminos.

5. La biografía de Echegaray, por contraste con la de Galois, es la de un hombre brillante y afortunado. Nació en Madrid, en 1832 en la calle del Niño, actualmente calle Quevedo. Su padre, que era médico de profesión, al poco de nacer su hijo tuvo que trasladarse a Murcia para ocupar una cátedra en la Sociedad Económica de Amigos del País. En aquella ciudad realizó sus primeros estudios y acabó el bachillerato a los catorce años. Destacó en esta primera etapa por su afición a leer novelas y libros de matemáticas. En 1848, se trasladó a Madrid donde aprobó el ingreso en la Escuela Superior de Ingenieros de Caminos con el número uno. Hay que tener en cuenta que esta Escuela cumplía en Madrid el papel equivalente al de la Ecole Polytechnique de Paris con un nivel inferior. Acabó la carrera con veinte años y se le destinó en 1853 como ingeniero segundo, al distrito de Granada, en donde se ocupó de la conservación de los 5,5 kilómetros de carretera entre Almería y Gador. Allí es donde aprovechó para leer las obras de Gauss, Lagrange y Legendre. En 1855, ya en Madrid, fue nombrado profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos, donde explicó Geometría Descriptiva, Estereotomía, Cálculo Diferencial, Mecánica Racional, Hidraúlica y Mecánica aplicada. Se casó en 1857 y tuvo dos hijos, lo que le obligó a buscar una ayuda económica. Para ello abrió una academia de matemáticas, pero al declarar el ministerio la incompatibilidad entre la enseñanza libre y la oficial se propone incluso dejar el cuerpo de ingenieros. La presión de sus jefes se lo impidió y a cambio se le ofreció una serie de comisiones en el extranjero. En 1858, la *Revista de Obras Públicas* editó las lecciones que dio sobre Cálculo de Variaciones en la Escuela de Caminos. En 1860 inició una serie de viajes al extranjero que comienzan con las visitas a las obras de construcción del túnel bajo los Alpes, seguidos de otros viajes todos ellos relacionados con proyectos técnicos. En 1865, publicó dos colecciones de problemas sobre Geometría Plana y Analítica. El año siguiente ingresaría en la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales pronunciando un discurso sobre la «Historia de las Matemáticas puras en España» que sería motivo de protestas e incluso de respuestas duras. Después publicó su *Introducción a la Geometría superior* y las *Teorías modernas de la Física;* en la primera de ellas aparecían resumidas las teorías de

Chasles. Durante los años siguientes publicó una Memoria sobre la *Teoria de determinantes* y un *Tratado elemental de Termodinámica.*

Contribuyó de manera efectiva a la revolución de 1888 y fue ministro con la Asamblea Constituyente, obtuvo un sillón en la Academia de la Lengua en 1896, siendo galordonado con el premio Nobel en 1904. En 1905, volvió a ser ministro de Hacienda con la monarquía. En 1896, inició su curso, en el Ateneo de Madrid[4], sobre *Resolución de Ecuaciones y Teoria de Galois* que se prolongó a 1897, siendo esta la primera vez que se exponia la citada Teoria. Unos años después seria encargado por la Universidad Central, desde 1905 a 1915, de impartir un curso sobre Fisica-Matemática. El 15 de septiembre de 1916, en un elegante hotel de la calle Zurbano, en el número 54, murió el polifacético ingeniero de Caminos José Echegaray y Eizaguirre.

notas

[1] La supresión del segundo término en una ecuación de tercer grado de la forma $x^3+p\cdot x^2+qx+r=0$ se hace con un cambio de variable de la forma $x=z-p/3$. En efecto, sustituyendo en la ecuación y haciendo operaciones quedaria la ecuación

$$z^3 + (q - p^2/3)z + 2(p/3)^3 - qp/3 + r = 0$$

[2] Cotes y Moivre habian resuelto la ecuación $x^n-1=0$, considerando sus soluciones situadas sobre una circunferencia, a comienzos del siglo XVIII. Desde mediados del mismo siglo todos los textos de álgebra incorporaron este problema, incluso los textos españoles, estudiándolo en su forma más general $x^m-a^m=1$.

[3] La publicación del articulo que contenia esta demostración tuvo que costeársela el mismo Abel, lo que tuvo como consecuencia que estuviera redactado en forma muy sumaria y se perjudicasen algunos aspectos de la exposición, perdiendo claridad. La idea de la demostración es que si una ecuación *f(y)* puede resolverse algebraicamente, la solución puede expresarse en función de los coeficientes de la ecuación, en la forma

$$y = p + p_1R^{1/m} + p_2R^{2/m} + \cdots + p_{m-1}R^{m-1/m}$$

donde m es primo, R, p, p_1, p_2, etc., son funciones de la misma forma que y, y $R^{1/m}$ no es función racional de los coeficientes y, p, p_1, etc. Abel obtuvo finalmente una relación entre R y las raices de la ecuación de la forma

$$R^{1/5} = 1/5(y_1 + x^4y_2 + x^3y_3 + x^2y_4 + xy_5) = (p + p_1S^{1/2})^{1/5}$$

donde S es una función racional de R, x son las raices de la unidad y cumplen que $x^4+x^3+x^2+x+1$ que se cumple si la ecuación tiene solución. Pero el primer miembro de la igualdad puede tener 120 valores y el segundo sólo 10, lo que significa que la solución no es posible. Después de Galois la demostración consiste en ver que el grupo de Galois de la ecuación no tiene solución.

[4] En aquellos años el Ateneo de Madrid mantenia una Escuela de Altos Estudios en la que se daba cuenta generalmente de las últimas novedades cientificas y culturales. Esto fue consecuencia del espiritu liberal y progresista que animaba a la institución. Años después fue incautado, de hecho, por el Gobierno, que lo redujo a un simple servicio cultural que es en lo que está convertido en la actualidad.

resumen

En este artículo se da una descripción y se critican las Lecciones que sobre la teoría de Galois impartió José Echegaray en el Ateneo de Madrid en 1896. El artículo está dividido en dos partes, la primera que es la que viene a continuación es introductoria al tema y en ella se da cuenta del estado del problema antes de Galois. Después se hace una breve biografía de Galois, seguida de la de Echegaray. La segunda parte del artículo examinará el contenido de las lecciones dadas por Echegaray comparándolas con otras exposiciones contemporáneas.

summary

This paper is a description and at the same time, a critical approach to the Lections given by J. Echegaray on the Theory of Galois at the Ateneo of Madrid in 1896. The study consist in two parts the first being an introduction to the theme and an exposition of the state of things before Galois. A short biography of Galois will be included, followed by the biography of Echegaray. The second part of the paper will be a study of the Lections given by Echegaray in comparison to the other contemporary expositions of the same theory.

referencias bibliográficas

Abel, N. H. (1881), *Oeuvres*, 2.ª ed., 2 vols. (editado por L. Sylow y S. Lie), Cristiania, Grondhal et son.

Bell, E. T. (1965), *Men of Mathematics*, 3.ª ed., 2 vols., London, Pelican Books.

Bourbaki, N. (1969), *Elements d'Histoire des Mathematiques*, 2.ª ed., Paris, Hermann.

Bourgne, R. et Azra, J.-P. (1962), *Ecrits et Memoires Mathématiques d'Evariste Galois*, Paris, Gauthier-Villars.

Sánchez Pérez, J. A. (1932), Echegaray, rasgos biográficos, *Revista Matemática Hispano-Americana*, 7, 49-58.

Stewart, I. (1975), *Galois Theory*, 2.ª ed., London, Chapman and Hall.