

## Dificuldades dos Alunos na Aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias

MARIA MADALENA DULLIUS<sup>1</sup>, ELIANE ANGELA VEIT<sup>2</sup> e IVES SOLANO ARAUJO<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Centro Universitário UNIVATES [madalena@univates.br](mailto:madalena@univates.br)

<sup>2</sup> Instituto de Física - Universidade Federal do Rio Grande do Sul [eav@if.ufrgs.br](mailto:eav@if.ufrgs.br)

<sup>3</sup> Instituto de Física - Universidade Federal do Rio Grande do Sul [ives@if.ufrgs.br](mailto:ives@if.ufrgs.br)

**Resumo.** Apresentamos neste artigo os resultados de uma investigação sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de equações diferenciais ordinárias. Para isso realizamos uma revisão na literatura, entrevistamos professores experientes no ensino de equações diferenciais e acompanhamos uma turma de alunos que estavam frequentando a disciplina de equações diferenciais no curso de Licenciatura em Ciências Exatas. Os resultados mostram o quanto seria importante os professores mudarem seus métodos de ensino, considerando, por exemplo, a possibilidade de aproveitar os avanços tecnológicos.

**Abstract.** This paper presents the results of an investigation on students' difficulties in learning ordinary differential equations. For this we performed a literature review, interviewed experienced lecturers in teaching differential equations and carried out a study in a course of differential equations of a Teacher Training degree in Science. The findings shows how important would be that teachers change their teaching methods, for example considering the possibility of exploiting technological advances.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais, Dificuldades, Aprendizagem

**Keywords:** Differential equations, Difficulties, Learning

### Introdução

Engenheiros e outros profissionais da área das ciências exatas sistematicamente necessitam equacionar e solucionar uma ampla gama de problemas que podem ser representados por Equações Diferenciais (ED<sup>1</sup>). Como parte da formação desses profissionais é indispensável, portanto, a compreensão dos conceitos básicos envolvidos nessas equações e da obtenção de suas soluções. Entretanto, os alunos, de maneira geral, não manifestam interesse, temem ou até mesmo abominam tais equações sem se darem conta de sua utilidade. Essa falta de motivação para o estudo do tema termina se refletindo na elevação dos índices de evasão e reprovação nas disciplinas que tratam de conteúdos associados ao cálculo diferencial, conforme apontado por Passos et al. (2007). A fim de contribuir para a reversão desse quadro, decidimos desenvolver uma investigação que, partindo da identificação das principais dificuldades dos alunos na aprendizagem de ED, resultasse na elaboração e no desenvolvimento de uma proposta pedagógica com potencial para auxiliá-los na superação dessas dificuldades e na compreensão da importância desse conteúdo para a sua formação profissional. Foram foco dessa investigação o estudo das potencialidades de uso de recursos computacionais no processo de ensino e de aprendizagem das ED e, nesse contexto, o

---

<sup>1</sup> Neste artigo, de um modo geral, estaremos nos referindo a Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) simplesmente por Equações Diferenciais (ED). Usaremos a denominação específica de Equações Diferenciais Ordinárias somente quando estivermos nos referindo a trabalhos de outros autores que mencionam desta forma.

estudo da contribuição da interação entre professor/aluno/material didático para a aprendizagem significativa desse conteúdo<sup>2</sup>.

O presente artigo apresenta os resultados relativos às dificuldades de ensino e aprendizagem da ED, identificadas por meio de i) uma revisão da literatura em revistas especializadas; ii) entrevistas semi estruturada com professores que trabalham com o ensino de ED e iii) aplicação de um questionário a alunos do um curso de Licenciatura em Ciências Exatas de uma universidade comunitária do RS que cursaram a disciplina de ED. Finalmente, sintetizamos os resultados obtidos a partir desses três meios e apresentamos as considerações finais.

### **Revisão da literatura**

Para a revisão de literatura consultamos revistas classificadas no qualis da CAPES<sup>3</sup> dentro da área de ensino de Ciências e Matemática. Apresentamos, sucintamente, artigos que estão relacionados ao ensino e a aprendizagem do conteúdo de ED, foco de interesse neste trabalho. Num total apresentamos onze artigos, dois que estão relacionados com as concepções dos professores que ensinam ED e sete que se referem ao processo de aprendizagem das ED. Na sequência apresentamos uma síntese desses trabalhos.

Na Revista Enseñanza de las Ciencias encontramos dois artigos que envolvem o conteúdo de ED, não direcionados para as dificuldades de aprendizagem, mas para a concepção dos professores. No primeiro artigo, Moreno e Azcárate (1997) buscaram investigar as concepções dos professores de Matemática sobre o ensino das ED, e detectar dificuldades relativas a "o quê" e "como" ensinar este conteúdo. Realizaram um estudo qualitativo envolvendo quatro professores de Matemática de diferentes universidades da Espanha, utilizando três instrumentos de coleta de dados: mapas conceituais elaborados pelos professores, questionário com perguntas abertas e fechadas e uma entrevista gravada. Conjuntamente com os dados coletados com esses instrumentos foram analisados os programas da disciplina, materiais de aula, enunciados de exames e os livros-texto recomendados com o objetivo de procurar estabelecer relações entre o que cada professor dizia que fazia e como concebia a disciplina e o que na prática evidenciavam suas decisões em relação ao material, exercícios, etc.

Como conclusões, os autores destacam a existência de três estilos diferentes de ensino, que vão desde aquele que mantém um tratamento mais estrutural das ED e das matemáticas (estilo

---

<sup>2</sup> Tema de doutorado em Ensino de Ciências do Programa Internacional de Doutorado promovido pela Universidade de Burgos – Espanha e pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Brasil, da primeira autora deste trabalho.

<sup>3</sup> CAPES é um órgão do governo federal de financiamento de pesquisa e as revistas classificadas como qualis A são as consideradas mais qualificadas. <http://qualis.capes.gov.br/>

tradicional), até aquele que, em outro extremo, propõe um planejamento metodológico muito próximo aos interesses das ciências experimentais e considera as ED como um instrumento para resolver problemas químicos ou biológicos (estilo avançado). Entre esses dois estilos existe o que denominam transitório, no qual o professor entra em conflito entre o "que faz" e o "que se poderia fazer". Os estilos tradicional e transitório centram seu ensino no aspecto do processo, nas técnicas de resolução das ED e os estudantes podem se converter em habilidosos solucionadores de ED, mas desenvolver de forma incompleta o conceito de equação diferencial. Esses estudantes provavelmente teriam uma flexibilidade de raciocínio restrita, produziriam esquemas conceituais muito pobres e seriam incapazes de gerar uma gama variada de representações mentais associadas ao conceito de ED, o que faria com que realizassem as sequências de atividades mecanicamente, explicando, em parte, seu fracasso nas aulas de matemática. Por outro lado, o estilo avançado parte do planejamento das ED como conceito, considerando que são "objetos matemáticos" e "instrumentos fundamentais" para conduzir formalmente os modelos determinísticos contínuos. Os estudantes manejam as ED associadas a modelos, relacionando com a taxa de variação, enriquecendo seus sistemas de representação e produziram uma rede de esquemas conceituais, cada vez mais complexos, associados à noção de equação diferencial. A flexibilidade de raciocínio seria potencializada pela manipulação simultânea de representações gráficas, numéricas e simbólicas.

No segundo artigo, Moreno e Azcárate (2003) apresentam uma reflexão sobre o ensino das ED em faculdades de ciências experimentais e um estudo das concepções e crenças de professores universitários de Matemática sobre as ED e seu processo de ensino e de aprendizagem. Destacam como objetivos do estudo: determinar as características mais relevantes do ensino atual das ED; explicar a persistência de métodos de ensino tradicionais, que potencializam o enfoque algébrico sobre o gráfico e o numérico, e favorecem o caráter mecânico e instrumental; caracterizar os professores universitários de Matemática em função de suas crenças sobre o ensino e a aprendizagem, e suas concepções sobre as matemáticas e, em particular, da matéria que ensinam; determinar o nível de coerência do conjunto de crenças e concepções dos professores e a influência sobre as decisões que determinam a prática docente de cada professor e, ainda, valorizar a consistência e o grau de permeabilidade das crenças e concepções de cada professor quanto à possibilidade de serem modificadas em função de uma melhora no ensino das ED.

Como instrumentos de coleta de informações utilizaram um questionário, uma entrevista gravada, programas oficiais, listas de exercícios e problemas propostos, referências bibliográficas recomendadas aos estudantes e, em alguns casos, dossiê de apontamentos preparado pelos professores para o acompanhamento da disciplina. Os participantes do estudo são seis professores universitários, todos eles matemáticos, especialistas em matemática aplicada.

Algumas das conclusões dos autores são:

- a metodologia de ensino dominante no âmbito universitário deste estudo é a aula magistral, onde o professor de Matemática ocupa um papel central e relevante; nenhum dos professores do estudo sente necessidade de utilizar outro tipo de metodologia de ensino;
- a maioria dos professores está convencida de que os conteúdos de ED que abordam atualmente são os que realmente deveriam ser abordados, tendo em conta as características dos estudantes com que trabalham;
- as concepções de Matemática da maioria dos professores ainda se aproxima das ideias formalistas; em linhas gerais a prática docente é essencialmente instrumentalista e tem especial ênfase em ensino de métodos de resolução de tipos de ED integráveis e na resolução de problemas-padrão de modelagem;
- os professores creem que o bom ensino está quase exclusivamente relacionado com o nível de conhecimentos matemáticos do professor;
- a persistência dos métodos de ensino tradicional frente a alternativas mais inovadoras de ensino deve-se a vários motivos: i) forte crença, em linha gerais, do pobre nível de competência dos estudantes, da escassa capacidade de raciocínio matemático e do deficiente conhecimento matemático, que os faz considerar como impensável qualquer enfoque que coloque o estudante em situação de raciocinar além dos aspectos básicos que acaba memorizando e mecanizando; ii) concepção da Matemática, e em particular das ED, muito formalista, que sobrevaloriza a manipulação simbólica frente ao tratamento numérico e gráfico das ED, como princípio inquestionável da aprendizagem significativa; iii) medo da perda dos conteúdos específicos que alguns professores consideram "as matemáticas de verdade" em detrimento aos conteúdos e às técnicas próprias da Matemática Aplicada, conteúdos esses que para alguns não são tão importantes quanto os conteúdos da matemática pura, tradicional e de toda vida, dando primazia à matemática pura em relação à matemática aplicada; iv) consciência da obrigatoriedade de reciclar-se e dedicar tempo a preparação de uma matéria que atualmente conhecem e dominam; v) simplicidade do ensino de técnicas frente à dificuldade para ensinar a resolução de problemas.

Esses dois estudos abordam questões sobre "como" os professores ensinam o conteúdo de ED e explicam, de certa forma, "porque" o fazem de forma tão tradicional. Na sequência sintetizamos estudos que se referem ao processo de aprendizagem das ED.

De Samer Habre, apresentamos dois trabalhos que abordam o ensino e a aprendizagem de ED. Habre (2000) faz uma apreciação inicial sobre os cursos introdutórios de Equações Diferenciais

Ordinárias (EDO), afirmando que consistem, principalmente, de uma sequência de técnicas para encontrar fórmulas para as soluções, sendo muitos exercícios adaptados para que soluções possam ser encontradas com algumas das formas de solução ensinadas, e para que a variável dependente possa ser expressa explícita ou implicitamente em termos da variável independente. Os alunos finalizam os cursos clássicos de EDO com pouca compreensão sobre o que representam as soluções de EDO numa situação aplicada. Segundo o autor, muitos educadores estão acreditando que um curso de EDO, para ser útil, precisa ter uma abordagem qualitativa do assunto. Destaca que esse tipo de abordagem não foi muito usada no passado devido às dificuldades associadas com a sua representação visual, mas o avanço da computação gráfica tem proporcionado ao professor, assim como ao aluno, novas oportunidades. Investiga, ainda, se os estudantes consideram campo de direções como um meio para resolver EDO de primeira ordem e estuda o sucesso dos alunos na leitura de informações nesses domínios. Ele também investiga as habilidades dos estudantes em converter informações simbólicas em gráficas e vice-versa.

Os estudantes investigados são de uma turma de terceiro semestre de um curso de Cálculo de quatro créditos oferecido em uma universidade do Nordeste dos Estados Unidos. As aulas enfatizaram o aspecto geométrico, representado graficamente, com pouca análise quantitativa, sendo utilizado no computador o *software Interactive Differential Equations (IDE)*. Os dados para o estudo foram coletados de observações de aula e das sessões de laboratório, cópias dos exames dos estudantes e de atribuições no IDE, questionários aplicados durante o semestre, e transcrição da entrevista semi estruturada com nove alunos, escolhidos a partir de critérios pré estabelecidos pelo autor. Como resultados destaca que apesar da ênfase no curso ser no método de solução qualitativa (gráfica), a maioria dos estudantes entrevistados no final do curso ainda preferia aproximações algébricas a aproximações gráficas, possivelmente reflexo de experiências matemáticas anteriores, onde o foco era algébrico. Esta pesquisa também mostra que os estudantes encontram dificuldades para pensar simultaneamente de modos diferentes (algébrico e gráfico), o que pode também ajudar a explicar porque normalmente não usam vários modos para atacar problemas. Como conclusão, o autor destaca que os estudantes precisam de mais tempo para assimilar a ideia de pensar visualmente.

Em outro estudo, Habre (2003) investigou a aceitação dos estudantes em resolver EDO geometricamente. A turma alvo foi do terceiro semestre da Universidade Americana Libanesa de Beirut de um curso introdutório de EDO, dirigido a estudantes de engenharia. O livro texto usado enfatizava a abordagem geométrica e a análise dos resultados. Além disso, foram usados regularmente, dois *softwares*: o *IDE* e o *ODE Architect*. Os dados foram coletados por meio de cópias de atividades, um questionário, uma entrevista semi estruturada, e no exame final foi

solicitado a todos os estudantes para expressarem sua opinião sobre a abordagem geométrica, adotada no material que estudaram. Como resultado o autor destaca que inicialmente os estudantes apresentam resistência em aceitar a abordagem geométrica, mas, ao longo do curso, muitos deles aceitaram, apreciaram sua utilidade, e expressaram o desejo que outros cursos de matemática fossem oferecidos de forma similar. Conclui que, talvez alguns estudantes não aceitem a solução geométrica porque são incapazes de associar a ela uma representação analítica. Também salienta que os estudantes louvaram a eficácia dos *softwares* utilizados, pois os ajudaram no desenvolvimento da capacidade visual e na compreensão gráfica de EDO.

Em relação às dificuldades de aprendizagem de ED e a compreensão de ideias centrais da matemática por parte dos alunos, Rasmussen (2001) realizou um estudo que teve como objetivo buscar novos rumos para orientar os alunos a pensarem de um modo mais interpretativo e reforçar suas capacidades de análise gráfica e numérica das ED. Os participantes eram estudantes de um curso introdutório de ED para Cientistas e Engenheiros em uma universidade do Meio Atlântico que voluntariamente participaram de quatro entrevistas individuais com base em tarefas. Todas as aulas foram filmadas. Também foram realizadas notas de campo detalhadas sobre as questões levantadas pelos estudantes, desenvolvimento instrucional de conceitos e métodos, referências à tecnologia, e à utilização de representações gráficas. O tema central reiterado pelo instrutor durante todo o curso foi a importância de se procurar utilizar, equilibradamente, métodos analíticos, gráficos e numéricos para análise de ED, em vez de se concentrar exclusivamente em soluções analíticas. O autor escolheu para análise, com o objetivo de melhorar a aprendizagem dos estudantes, dois temas: a função como solução e as imagens e intuições dos estudantes. Dentro do tema função como solução aborda três facetas: interpretação de soluções, interpretação do equilíbrio de soluções e foco em quantidades. Como resultados, o autor destaca que representações gráficas não necessariamente significam a mesma ideia matemática para os estudantes como para a comunidade matemática. Os estudantes pensam em função quando enxergam uma equação ou regra e não com um gráfico. Ele afirma que a mudança requerida na conceitualização de soluções como números (que é o caso quando se resolve equações algébricas) para a conceitualização de soluções como funções (que é o caso quando se resolve EDO) é análoga a uma mudança de paradigma, que não é trivial para estudantes. Rasmussen também notou que algumas das dificuldades dos estudantes com aproximações gráficas provêm ou do pensamento de uma quantidade inapropriada e/ou da perda do foco da quantidade pretendida.

Em outro estudo, Rasmussen em conjunto com Stephan (STEPHAN; RASMUSSEN, 2002) faz uma análise das práticas de aulas matemáticas que foram desenvolvidas ao longo da primeira metade de um semestre, incluindo o conteúdo de EDO de primeira ordem. A investigação estava

centrada em apoiar os estudantes no processo de criação de um conjunto estruturado de funções/solução em vez de usarem um gráfico em particular ou métodos numéricos, com o objetivo de ajudá-los a compreender que soluções de EDO são conjuntos de funções. Os autores investiram no uso de tecnologias para que os estudantes criassem e recriassem gráficos, campo de direções e estimulassem seu pensamento. Além disso, foi feito um esforço para engajar os estudantes em situações em que, simultaneamente, construíam gráficos, soluções numéricas e analíticas para prever funções/solução de EDO de primeira ordem, em vez de tratar cada um dos métodos como técnicas separadas a serem aprendidas em alguma sequência linear. Realizaram, durante 15 semanas de aula, experimentos de ensino em um curso introdutório de EDO, principalmente para engenheiros, em uma universidade dos Estados Unidos. A fonte de dados incluiu vídeo gravações de cada sessão, vídeo gravação das entrevistas com estudantes, cópias de todos trabalhos escritos, os materiais instrucionais, o caderno de anotações do investigador, e áudio gravações das reuniões para análise das sessões. Foram realizadas seis práticas matemáticas em que os estudantes eram incentivados a construir um conjunto de ideias integrando técnicas gráficas, analíticas e numéricas. O objetivo geral desse trabalho foi documentar a aprendizagem coletiva do conteúdo de EDO, considerando as ideias matemáticas que emergiram a partir das construções dos estudantes. Os autores destacam a natureza e a qualidade da experiência matemática dos estudantes e a importância da argumentação nesse processo. Também chamam atenção para dois importantes avanços teóricos quando se trabalha a partir de ideias que emergem dos estudantes, é que o surgimento de aulas práticas podem ser não-sequenciais no tempo e estrutura.

Borssoi e Almeida (2004) realizaram um trabalho de pesquisa fundamentado nos pressupostos teóricos da modelagem matemática na perspectiva da Educação Matemática e da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, abordando o conteúdo de EDO. Para tal, organizaram uma proposta de ensino e aprendizagem com a finalidade de ser facilitadora da aprendizagem significativa, e a desenvolveram em uma turma regular de trinta e oito alunos do curso de Bacharelado em Química da Universidade Estadual de Londrina, na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica II. A proposta envolve quatro atividades de modelagem desenvolvidas durante as aulas. Para coleta de informações utilizaram fichas de levantamento, entrevistas, mapas conceituais, tarefas realizadas (resolução de problemas diversos, trabalho de modelagem em grupos, prova escrita) e registro de observações das aulas. A principal conclusão das autoras é a percepção de indícios de que a modelagem matemática, como estratégia de ensino, pode ser facilitadora da aprendizagem significativa, pois as atividades de ensino em ambiente de modelagem permitem emergir uma grande quantidade de conceitos matemáticos e extra matemáticos, que proporcionam interações favoráveis à aprendizagem.

Outros autores que também pesquisaram sobre a aprendizagem de EDO são Rowland e Jovanoski (2004), que realizaram um estudo para identificar as dificuldades de estudantes do primeiro ano de licenciatura na interpretação dos termos de EDO de primeira ordem num contexto de modelagem. Em um contexto de modelagem, Rowland e Jovanoski pesquisaram as habilidades dos estudantes para interpretar fisicamente os termos de uma EDO e para traduzi-los da descrição física para a descrição matemática. Os participantes foram 59 estudantes matriculados em dois semestres consecutivos de Cálculo e Álgebra Linear. Nessas disciplinas trabalharam com uma variedade de sistemas físicos que podem ser modelados por EDO de primeira ordem, incluindo crescimento populacional logístico, decaimento radioativo, mistura de soluções num tanque, lei do resfriamento de Newton. Além de resolverem as EDO, também era esperado que os estudantes fossem capazes de interpretar o significado físico dos termos como descrições de problemas físicos, e, dada a descrição do sistema físico, determinar a EDO que governa esse sistema. Para investigar o entendimento conceitual dos estudantes eles usaram um teste diagnóstico de múltipla escolha, um exame com questões de respostas curtas e entrevistas individuais.

Como resultados destacam que o bom desempenho em "questões tradicionais" (manipulativas ou algorítmicas) não necessariamente evidencia que os estudantes aprenderam conceitualmente. Seria de esperar que a maioria dos estudantes conseguisse interpretar corretamente a expressão  $dD/dt$  ("D" representa uma quantidade), mas em torno de um quarto dos estudantes interpreta incorretamente; alguns deles até usam o termo taxa de variação da quantidade em suas respostas, enquanto outros usam somente quantidade. Os autores acreditam que provavelmente os estudantes possuem concepções corretas, mas apresentam imprecisão no uso da linguagem, outros fazem confusão entre quantidade e taxa de variação da quantidade. É necessário uma mudança de paradigma sobre a função que descreve "como a quantidade varia" para um pensamento sobre a equação que descreve "como a taxa de variação da quantidade varia". Além disso, os termos constantes das EDO foram interpretados por muitos como condição inicial ou como uma quantidade máxima ou de equilíbrio em vez de uma taxa de variação constante. No pensamento de muitos estudantes, a relação da variável dependente e independente precisa estar explícita e falta conscientização de que todos os termos na equação física precisam ter alguma unidade. Alguns estudantes parecem ignorar a necessidade da consistência interna dos termos de uma EDO. Esta inconsistência pode resultar do fato do conhecimento de muitos estudantes ser altamente fragmentado e conseqüentemente, altamente dependente do contexto. Em termos de melhoramento pedagógico, os autores sugerem a inclusão de mais questões conceituais ou qualitativas na abordagem das ED, pois essas forçarão os estudantes a mudar o foco na simples manipulação para o foco na compreensão. Também sugerem muitas discussões em grupo.

Em outro estudo, Rowland (2006) investigou a compreensão de estudantes de engenharia em relação às unidades dos termos de EDO de primeira ordem em um contexto de modelagem e a natureza dos problemas relacionados com elas. Os participantes foram 108 estudantes do primeiro ano de bacharelado em Engenharia, numa universidade australiana, em 2003. Todos os estudantes haviam estudado cálculo na escola superior e estiveram envolvidos em um curso de cálculo na universidade, que incluía a discussão e solução de situações físicas modeladas por EDO simples. Para a coleta de dados, foi utilizado um teste de diagnóstico que incluía uma questão em que era solicitado fornecer as unidades e a interpretação física de cada termo de uma equação diferencial dada, a qual hipoteticamente modelava a quantidade de droga no corpo de um paciente em função do tempo. Outra questão se referia à velocidade de um carro em função do tempo, em que o objetivo principal era analisar as unidades da constante de proporcionalidade envolvida na equação diferencial.

O autor destaca que poucos estudantes parecem perceber que os termos das equações precisam ter as mesmas unidades, ou se compreendem, não conseguem usar este conhecimento quando necessário. Além disso eles usam unidades que representam quantidades e não taxa de variação de quantidades, pois interpretam uma equação diferencial como quantidade. Outro erro encontrado com frequência se refere à falta de atenção às unidades requeridas pelas constantes de proporcionalidade. Os estudantes as percebem como um número puro, sem unidades. Poucos estudantes foram capazes de determinar a unidade da constante de proporcionalidade de uma equação simples. Os resultados também mostram que a maioria dos estudantes não usa o fato de que equações precisam ser homoganeamente dimensionáveis para ajudá-los no entendimento de ED em contexto de modelagem e que muitos estudantes não entendem a conexão entre a equação diferencial e o sistema físico modelado.

Javaroni (2009) investigou a importância do processo de visualização nas atividades de investigação de modelos matemáticos num curso de EDO auxiliadas pelas tecnologias de informação e comunicação. O contexto de investigação foi um curso de extensão universitária oferecido a nove alunos do curso de Matemática, sendo oito de licenciatura e um de bacharelado. O curso era de 36 horas e teve por objetivo analisar modelos de crescimento populacional e a de lei de aquecimento/resfriamento. Para o desenvolvimento das atividades foi proposto o uso dos *softwares* Winplot, Maple, um applet e a planilha de cálculo Excel. Para a coleta de dados foi utilizado o *software* Camtasia que possibilita a captura de imagens da tela do computador. Como resultado, a autora afirma que a visualização contribui nas discussões matemáticas dos alunos e como dificuldade destaca a necessidade dos alunos de transitarem pelas representações visuais e analíticas de uma mesma situação.

Em outro trabalho Javaroni e Soares (2012) propõem o estudo qualitativo de modelos matemáticos como uma estratégia de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. As autoras apresentam duas propostas, numa delas analisam modelos matemáticos para introduzir conceitos de EDO, focando no estudo qualitativo deste conteúdo e utilizando os softwares Maple, Excel e Winplot para construir e interpretar campos de direções das equações e entender como as soluções de cada modelo de comportam. Na outra proposta analisam modelos matemáticos para discutir conceitos de cálculo e foi utilizado o *software* Modellus para auxiliar nas simulações. As autoras acreditam que um enfoque diferenciado pode estar atrelado à Modelagem Matemática como estratégia pedagógica onde é enfatizada a análise crítica de modelos.

Sintetizando, podemos destacar que por um lado os autores mencionados são unânimes em afirmar que muitos estudos já foram realizados sobre o processo de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em geral, mas no que tange ao conteúdo de ED ainda carece de investigações. Além disso, os autores afirmam que estes estudos são necessários, pois mudanças na abordagem desse conteúdo são importantes e como argumento destacam o fato de termos hoje, à disposição, as ferramentas tecnológicas que podem auxiliar no trabalho em sala de aula se empregadas corretamente. Moreno e Azcarates (2003) apresentam ainda vários motivos que levam os professores a continuar optando por aulas “mais tradicionais”, em grande parte pelas crenças enraizadas sobre como se deve ensinar e aprender e não são modificadas facilmente, mesmo que os resultados de seus esforços sejam convertidos em aprendizagem mecânica por parte dos alunos.

Ao focar o ensino de ED somente em operações algébricas, através de aulas baseadas em uma sequência de técnicas para encontrar soluções analíticas, explorando exercícios que demandam tal tipo de resolução, os professores fazem com que os alunos também valorizem mais o processo algébrico, ou até, o defendem como única possibilidade de resolução. Os alunos apresentam resistência em aceitar um gráfico como uma solução de ED e mesmo após trabalhar com abordagem gráfica, numérica e analítica.

Como consequência, os autores citam a dificuldade que os alunos apresentam para pensar de modo mais interpretativo, para aceitar soluções que não sejam as analíticas, mas também destacam que um bom desempenho em “questões tradicionais” não evidencia uma aprendizagem conceitual.

### **Entrevista com professores**

Uma entrevista semi estruturada foi realizada com quatro professores da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) que possuem ampla experiência com o ensino de ED: dois de Matemática que trabalham com o ensino de ED e dois de Física que lecionam disciplinas

envolvendo o estudo de fenômenos físicos que podem ser descritos por ED. Os professores foram entrevistados individualmente, durante um período de aproximadamente 30 minutos. Esta entrevista partiu de cinco questões básicas, feitas a todos os professores, as quais constam no Quadro 1. Ocasionalmente eram feitas perguntas adicionais para esclarecer melhor a opinião do professor em relação a algum tópico considerado relevante para a pesquisa.

Quadro 1- Questões e respectivos objetivos, da entrevista com os professores.

<i>Questões</i>	<i>Objetivos</i>
Q1: Como é a dinâmica das suas aulas quando você trabalha com o ensino das EDOs? Q2: E as avaliações?	obter informações sobre a metodologia de trabalho do professor, se o ensino é direcionado para as técnicas de resolução das ED ou para a interpretação das equações, se aborda situações-problema, como e o que é avaliado.
Q3: Na sua visão, quais são as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem das EDOs? A que você atribui estas dificuldades? Q4: Como poderíamos, nós professores, contribuir para amenizar estas dificuldades?	coletar indícios das dificuldades dos alunos na aprendizagem das ED e sugestões de como os professores poderiam contribuir para amenizar as dificuldades apontadas.
Q5: Como você vê o uso dos recursos tecnológicos no processo ensino-aprendizagem das ED?	verificar como os professores percebem o uso de recursos computacionais no ensino e como usam, se usam, essa ferramenta nas suas aulas.

Apresentamos, na sequência, os resultados obtidos e algumas citações dos professores. Daremos maior destaque no que se refere às dificuldades de aprendizagem dos alunos, que é o foco deste trabalho. Todas entrevistas foram gravadas, depois transcritas e condensadas suas informações relevantes. Adotamos a seguinte codificação para os professores:

- PA é um professor de Matemática com mais de 30 anos de experiência no ensino de ED, que em suas aulas costuma abordar situações-problema para contextualizar o conteúdo;
- PB é um professor com 40 anos de experiência no ensino de Física e que usa as ED para abordar fenômenos físicos;
- PC é um professor de Física com 25 anos de experiência no ensino, que trabalha com situações-problema que envolvem ED e condições de contorno;
- PD é um professor de Matemática com 10 anos de experiência no ensino de ED.

Quando questionados sobre a dinâmica das suas aulas os dois professores de Matemática responderam que apresentam os diferentes tipos de ED e suas respectivas técnicas em aulas expositivas. Também citaram que trabalham com aulas de resolução de listas de exercício, exigindo dos alunos todo o desenvolvimento da solução. Salientaram ainda que trabalham com construção e

interpretação de gráficos, e a partir de gráficos simples vão construindo outros mais complexos, que envolvem mais elementos. Buscam trabalhar com situações-problema para motivar os alunos. Quando trabalham com aplicações usam modelos-padrão dos livros, pois acreditam que os alunos não teriam condições de enxergar modelos de equações em situações do dia a dia. Já os dois professores de Física responderam que partem de um modelo físico que conduz a uma equação diferencial e o enfoque é na interpretação do fenômeno envolvido e não na resolução da equação.

No que se refere às avaliações, os professores destacam que infelizmente é preciso cobrar e fazer provas, pois os alunos estão condicionados a isso, ou seja, se não houver cobrança por meio de provas os alunos não se preocupam em aprender. As provas, individuais e sem consulta, são por área para não acumular muito conteúdo. As questões são enormes e exigem muita interpretação por parte dos alunos. Também são realizados trabalhos computacionais em grupos, mas com pouco peso na nota final, pois os alunos copiam muito uns dos outros.

Em relação às principais dificuldades dos alunos na aprendizagem das ED, os professores entrevistados foram unânimes em dizer que os alunos não sabem cálculo, derivadas e integrais, trigonometria, resolução de sistemas lineares (2x2), números complexos entre outros conteúdos considerados básicos para as ED. Ademais, os alunos possuem problemas conceituais, principalmente no que se refere à interpretação da derivada, que é a base das ED. Os professores destacam que os alunos passam por várias disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral mas não entendem o que significa uma derivada (taxa de variação) e continuam apresentando dificuldades enormes na interpretação de gráficos.

*"Porque eles não sabem cálculo, a cada semestre eles vêm mais fracos, são coisas até do ensino médio, eles não sabem trigonometria, não conhecem números complexos, ... então a gente tem que trabalhar com eles esta parte, acho que é uma falha muito grande eles não saberem, a parte fundamental eles não sabem."(PD)*

Os professores também destacaram que o aluno não entende matemática, não sabe o porquê dos procedimentos matemáticos e só sabe resolver mecanicamente as atividades propostas, necessitando sempre de um modelo-padrão para seguir.

*"Eles têm que aprender a raciocinar. Acho que os nossos alunos têm um problema de base matemática que vem lá do colégio... eles têm que pensar sobre as regras, faço eles colocar em português o que está escrito em "matematiqûês", porque no momento que eles souberem falar é que estão entendendo as coisas ... eles só sabem fazer decorado, não sabem o porquê das coisas, aí fica difícil. Eles têm que aprender a raciocinar. Acho que os nossos alunos têm um problema de base matemática que vem lá do colégio."(PA)*

Outro ponto salientado pelos professores é a falta de motivação dos alunos para uma aprendizagem significativa, entender o que estão fazendo. No caso das ED, falta relacioná-las com aplicações.

*"A impressão que eu tenho é que, evidentemente, eles estudam as equações, fazem alguns exemplos, mas talvez eles não conectaram realmente as equações para o uso..., usam exemplos na matemática que não desenvolvem talvez muito bem, não entendem, ... têm dificuldades de identificar as condições, matematizar as condições de contorno e saber usar. Para isso falta experiência."(PC)*

Também foi citado por um professor que os alunos estão se comportando de modo irresponsável, não cumprem com as tarefas no prazo, não se empenham para obterem bons resultados.

Para tentar amenizar essas dificuldades os professores entrevistados consideraram necessário retomar os conceitos problemáticos, insistir na interpretação e no raciocínio. Além disso, dizem ser preciso saber motivar os alunos, mostrar a importância do conteúdo abordado, saber dizer em que contexto vai ser usado, pois o aluno precisa ter estímulo para aprender. Foi destacada, ainda, a importância de prever trabalhos em pequenos grupos para os alunos poderem se ajudar mutuamente de modo a vencer as dificuldades.

Quanto ao uso dos recursos tecnológicos no processo ensino-aprendizagem das ED, os professores consideram o computador como uma ferramenta muito importante para a construção de gráficos e interpretação de parâmetros, inclusive com animação, mas destacam que o aluno precisa saber usá-lo criticamente, analisar as soluções apresentadas, e ter em mente que o computador não toma decisões, cabendo a ele tomá-las.

Das entrevistas podemos perceber que os dois professores de Matemática trabalham primeiro as técnicas de resolução e solicitam aos alunos que as "exercitem" para depois explorarem situações aplicadas que envolvem as ED. Já os dois professores de Física não possuem preocupação com a resolução em si, estão mais preocupados em suas aplicações. O cenário apresentado pelos professores no que se refere às dificuldades dos alunos, não difere da realidade em que atuamos: o aluno resolve mecanicamente, não entende o que está fazendo e, conseqüentemente, logo esquece tudo. Isso ocorre, segundo os professores, desde o ensino fundamental e médio, fazendo com que os alunos cheguem à universidade sem domínio da base matemática indispensável para o acompanhamento de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

### **Acompanhamento de uma turma de alunos**

Acompanhamos os trabalhos de 35 alunos da disciplina de ED do curso de Licenciatura em Ciências Exatas da UNIVATES, ministrada pela primeira autora deste trabalho. Essa disciplina foi trabalhada de forma tradicional, ou seja, inicialmente eram apresentadas as definições referentes ao conteúdo de ED, após eram apresentadas técnicas de resolução analítica, seguidas de alguns

exemplos resolvidos pela professora e exercícios realizados pelos alunos. Esses exercícios eram repetições das técnicas e, finalmente, eram exploradas algumas situações-problema extraídas de livros. Os alunos trabalhavam em grupos e as avaliações eram constituídas de provas que envolviam a resolução analítica de ED e alguma situação-problema. Na disciplina não era utilizado o computador.

Nesta turma procuramos coletar indícios sobre as dificuldades de aprendizagem em todas as manifestações dos alunos, registrando ao final de cada aula, no caderno de campo, todas as observações coletadas durante o andamento da aula: atividades realizadas, questionamentos, comentários, respostas a questões conceituais, resolução de problemas. Além disso, após frequentarem a disciplina de ED durante um semestre, com 4 horas-aula semanais, solicitamos aos alunos da turma para que respondessem a um questionário com o objetivo de obtermos informações sobre o envolvimento dos mesmos na disciplina, as principais dificuldades de aprendizagem que surgiram, sugestões de melhorias para a disciplina e também algumas questões relacionados ao conteúdo de ED: definição, aplicabilidade, relevância das condições de contorno. O questionário, respondido por 34 alunos, foi objeto de uma análise quantitativa e qualitativa.

Para as perguntas do questionário, cujas respostas foram analisadas qualitativamente, buscamos criar categorias e as apresentamos em forma de tabelas. As categorias formadas não são, obviamente, as únicas possíveis, mas condensam as informações fornecidas pelos alunos. Neste trabalho apresentamos somente os resultados referentes à definição dos alunos para as ED, e às dificuldades enfrentadas na aprendizagem deste conteúdo. Inicialmente descrevemos as categorias de respostas formadas e, posteriormente, uma tabela com as categorias, exemplificando-as com argumentações dos alunos. Fizemos uma codificação para os alunos: A1 (aluno 1), A2 (aluno 2) , ..., A34 (aluno 34).

Para as respostas ao questionamento sobre definição de ED, formamos as seguintes categorias:

- D1: ED são equações que envolvem derivadas e integrais. Incluímos nesta categoria as respostas dos alunos que consideram as ED como técnicas de cálculo que envolvem derivadas e integrais, alguns deles associando as derivadas a taxas de variação.
- D2: ED são equações que possuem aplicações em várias áreas. Incluímos nesta categoria as respostas dos alunos que citaram algumas aplicações das ED para defini-las.
- D3: ED é um conteúdo muito difícil. As respostas incluídas nesta categoria são as que não se referem à definição, propriamente dita, de ED, mas à dificuldade de resolução, necessidade de retomada de muitos conteúdos matemáticos, desde os do Ensino Fundamental até as derivadas e

integrais.

- D4: ED são equações que envolvem funções e suas derivadas. Diferenciamos esta categoria da D1, incluindo nesta as respostas que estavam melhor elaboradas como definição de ED, não simplesmente relacionando-as com o cálculo de derivadas e integrais, mas sim como equações que envolvem funções, suas derivadas e citam como solução das ED uma função que satisfaz a equação.
- Outras definições: Incluímos aqui as respostas que julgamos não se enquadrarem em nenhuma das quatro categorias acima.

Quadro 2- Categorias das respostas dadas pelos alunos para a definição de ED

Definição	Exemplos de argumentação	Total de alunos
D1	"Equações que envolvem derivada e integrais ..." (A17) "... sei que envolve derivadas e integrais." (A26) "... são equações que trabalham com variações não constantes e que utiliza derivada e integral p/ realizar os cálculos." (A12) "... são equações que para resolvê-las temos que usar derivadas, integrais." (A15) "... são aquelas em que aparecem derivadas." (A5) "São diferentes métodos de calcular usando derivadas, integrais" (A24) "... podem ser resolvidas de várias maneiras, principalmente envolvendo derivadas e integrais nas contas..." (A27) "É a resolução de equações por meio de derivadas e integrais..." (A23) "São equações onde usamos basicamente só integral e derivada para resolvê-las." (A16)	13
D2	"ED envolve integrais e derivada para determinar problemas mais complexos como por exemplo: a concentração de um substância em função do tempo, meia-vida de uma substância ..." (A13) "São equações as quais usamos para determinar crescimento populacional, idade de fósseis, ..." (A33) "São usadas em algum campo de trabalho." (A9)	4
D3	"São equações mais complexas, envolve muito o raciocínio" (A31) "...envolve todo nosso conhecimento, desde que começamos a estudar a matemática, é um apanhado geral de tudo ..." (A28) "Bom é um assunto bem difícil e complicado ..." (A26)	4
D4	"ED são equações que envolvem derivadas e integrais e como resultado obtém-se uma função." (A4) "ED são funções e suas derivadas. Tem uma incógnita que através de cálculos de integral e derivadas chega-se ao seu valor." (A3) "ED são aquelas em que aparece derivadas. A resposta da equação diferencial é uma lei." (A5) "São equações que envolvem funções e derivadas com uma ou mais variáveis." (A30)	6
Outras respostas	"... é uma equação com funções de 1 ou + variáveis, onde uma pode independer da outra." (A29) "São equações que envolvem álgebra as quais chegamos sempre a um valor numérico" (A2) "Não sei dar uma definição a elas." (A25)	7

**Comentário interpretativo:** Percebemos que existe uma forte associação das ED com as derivadas e integrais, mas poucas vezes esta relação é exposta de forma conceitual, com algum argumento que dê indícios de que o aluno associa algum significado ao conceito em questão. Os alunos percebem as ED como técnicas de cálculos, e estas, na maioria das vezes, são consideradas muito difíceis por eles. Há alunos que percebem que as ED são importantes em várias áreas.

Para as respostas ao questionamento sobre os tipos de dificuldades enfrentadas na aprendizagem das ED, as categorias formadas são as seguintes:

- D1: Dificuldade em derivadas, integrais e outros conteúdos de Matemática. Um grande número de alunos destacou que a maior dificuldade na aprendizagem das ED foi a deficiência em relação a conteúdos que são básicos na resolução e interpretação de ED, citando as derivadas, as integrais, a álgebra, ... e citando inclusive a disciplina de Matemática V (na qual eles aprimoram esses conhecimentos).
- D2: Aulas muito rápidas. Os alunos, cujas respostas se enquadram nesta categoria, são os que não relacionaram tipos de dificuldades, e sim associaram-nas ao pouco tempo destinado para resolver exercícios, praticar uma técnica. Destacamos que geralmente os alunos eram lentos na resolução, dependendo muito tempo para resolver problemas de Matemática básica envolvida.
- D3: Não sabe como iniciar a resolução. Nesta categoria se enquadram as respostas dos alunos que consideram como principal dificuldade identificar o tipo de ED, para então poder escolher a técnica de resolução.

Quadro 3- Categorias das dificuldades na aprendizagem das ED

Dificuldades	Exemplos de argumentação	Total de alunos
D1	"Minha maior dificuldade foi com os conteúdos ... 7ª série. Também na derivada e integral. Se soubesse fazer isso bem, a equação em si seria fácil." (A15) "...a dificuldade maior para entender o conteúdo foi devido as dificuldades nos assuntos de ensino fundamental e Médio ..." (A13) "Falha na base, muitas vezes não o conteúdo das equações e sim do Ensino Fundamental." (A29) "Algumas regras básicas que não lembrava mais." (A10) "...na parte do uso da matemática básica. ..." (A21) "Dificuldades absurdas, coisas lá do ensino fundamental ..." (A22) "A minha maior dificuldade em momento nenhum, foi em relação às ED e sim, em relação à matemática de ensino fundamental ..." (A4) "... relembrar vários assuntos da matemática, ..." (A33) "Algumas derivadas um pouco complicadas." (A19) "Muitas, pois precisávamos relembrar muitos outros conteúdos estudados." (A31)	14

D2	"... as aulas também eram muito corridas." (A 14) "As aulas são muito rápidas."(A18) "... a aula ser bastante rápida, ..." (A20) "O meu raciocínio é mais lento do que se exige."(A27)	6
D3	"Dificuldades de interpretação e de iniciar a resolução. A partir daí, tudo bem." (A17) "Diferenciá-las para mim precisou de horas de estudo." (A28) "Identificar qual técnica deveria ser utilizada."(A25) "... não sabia como e por onde começar"(A2)	4

**Comentário interpretativo:** O fator considerado como o principal obstáculo na aprendizagem das ED, na opinião dos alunos, foi a falta de domínio de conteúdos matemáticos necessários para a resolução das ED. Quase todos alunos que citaram dificuldades as relacionaram com a resolução de uma ED, ao cálculo envolvido e não à interpretação. Também foi citado o andamento rápido das aulas, a necessidade de trabalhar com mais exercícios em sala de aula, pois em casa não conseguem tempo para tal. Dez alunos não responderam esta questão.

### Síntese das dificuldades dos alunos na aprendizagem de ED

Considerando as três fontes diferentes: professores experientes no ensino de ED, alunos após frequentarem uma disciplina de ED e resultados dos estudos realizados, apresentamos uma síntese das principais dificuldades dos alunos na aprendizagem de ED. Para melhor visualização, apresentaremos as dificuldades bem sucintamente, em forma de tópicos, conforme segue.

- Os alunos não sabem os conteúdos de matemática básica, como por exemplo, trigonometria, frações, sistemas lineares, frações algébricas, números complexos, derivadas e integrais, entre outros considerados necessários na resolução analítica de ED. Esta dificuldade foi citada pelos professores entrevistados, pelos alunos e apareceu nos estudos que analisamos na literatura.
- Os alunos possuem problemas conceituais, principalmente no que se refere à interpretação da derivada, que é a base das ED. Eles não entendem o que significa uma derivada (taxa de variação) e apresentam dificuldades enormes na interpretação de gráficos. Esta é uma referência que os professores entrevistados fizeram, os alunos não comentaram nada a respeito até porque não relacionam EDO com interpretação somente ao cálculo envolvido. Nos estudos de outros autores essa dificuldade foi bastante citada, inclusive com mais detalhamento conforme apresentado nos próximos tópicos.

Os alunos:

- fazem confusão entre quantidade e taxa de variação da quantidade, entre a função que

descreve "como a quantidade varia" e a equação que descreve "como a taxa de variação da quantidade varia";

- têm dificuldade em aceitar funções como solução de uma ED, pois estão acostumados a enxergar números como solução. Isso é o que Rasmussen (2001) chama de o dilema da função como solução;
- não têm consciência da importância das unidades ao manipularem termos das ED que representam sistemas reais e parecem ignorar a necessidade da consistência interna dos termos de uma EDO ou se compreendem, não conseguem usar este conhecimento quando necessário;
- não percebem que constantes de proporcionalidade também precisam ter unidades, eles as consideram como um número puro, sem unidades;
- não entendem matemática, não sabem o porquê dos procedimentos matemáticos e só sabem resolver mecanicamente as atividades propostas, necessitando sempre de um modelo-padrão para seguir. Os professores entrevistados citaram esta questão, que também apareceu nos trabalhos da literatura analisados;
- não demonstram interesse pelo conteúdo, falta motivação para aprender de forma significativa, com compreensão do que estão fazendo. No caso das ED, falta relacioná-las com aplicações. Esta também é uma citação dos professores entrevistados e dos estudos da literatura;
- associam ED a um processo puramente analítico, quando pensam em ED, pensam em técnicas analíticas, pois enxergam uma ED como uma equação abstrata que envolve símbolos e para resolvê-la, querem usar técnicas analíticas. Essa é uma afirmação encontrada nos estudos da literatura, mas também é o que se percebeu entre os alunos investigados;
- acreditam que a representação simbólica de uma função é sempre mais importante e mais útil do que a gráfica e numérica, possivelmente reflexo de experiências matemáticas anteriores, em que o foco era algébrico;
- têm dificuldade em aceitar a solução geométrica porque são incapazes de associar a ela uma representação analítica; pensam em uma função quando enxergam uma equação ou regra e não em um gráfico;
- possuem dificuldades para pensar simultaneamente de modos diferentes (algébrico e gráfico), o que pode também ajudar a explicar porque normalmente não usam vários modos para atacar problemas;
- não entendem a conexão entre a equação diferencial e o sistema real modelado, apresentam dificuldades para interpretar os termos de uma ED e para traduzi-los da descrição física para a

descrição matemática, pois não desenvolveram esta capacidade e sim, passaram muito tempo da vida escolar repetindo e memorizando técnicas.

### **Considerações Finais**

No presente trabalho elaboramos uma síntese das dificuldades enfrentadas pelos estudantes na aprendizagem do conteúdo de ED baseados em resultados da literatura e em dados que coletamos junto a professores e alunos. Essas dificuldades foram levadas em consideração em uma proposta didática que implementamos posteriormente (DULLIUS et al., 2011) e esperamos que possa ser útil para professores e pesquisadores que atuam nessa área.

Convencionalmente o conteúdo de ED é introduzido a partir da definição, posteriormente são apresentadas técnicas de resolução analítica e, finalmente, são abordadas algumas aplicações, retiradas de livros de texto. A persistência dos métodos de ensino tradicionais frente a alternativas mais inovadoras de ensino deve-se a vários motivos conforme descrito por Moreno e Azcárate (1997 e 2003), dentre os quais salientamos dois: i) uma nova abordagem exigiria do professor mais tempo na preparação de aulas e uma reciclagem, pois sua formação é muito deficitária no que tange a aplicações e o que ele domina é o ensino de técnicas; ii) os professores consideram que os estudantes aprendem por imitação e memorização e que não teriam condições de trabalhar de modo diferente porque possuem pouco conhecimento matemático e pouca capacidade de raciocínio e criação.

Tem-se, então, um grande problema, pois a modificação da atuação docente requer uma ação coletiva dos professores para que os alunos disponham de melhores condições para se adaptarem a uma nova metodologia. Porém, em vez de investir esforços coletivos nesse sentido, em geral os professores, preferem atribuir as responsabilidades do fracasso do ensino aos próprios estudantes, suas atitudes e sua escassa formação matemática.

Cabe destacar que a dificuldade dos alunos em relação aos conteúdos de matemática básica considerados necessários na resolução analítica de ED, foi mencionada pelos professores entrevistados, pelos alunos e nos estudos da literatura. Assim como também foram mencionados os problemas conceituais que os mesmos apresentam, principalmente no que tange a confusão entre quantidade e taxa de variação de quantidade, interpretação da derivada, interpretação de gráficos. Os alunos apresentam muita dificuldade para interpretar, entender matemática, pensar simultaneamente de modos diferentes, entender a conexão entre a ED e o sistema real modelado, interpretar os termos de uma ED, pois não desenvolveram esta capacidade e sim, passaram muito tempo da vida escolar repetindo e memorizando técnicas. Considerando este contexto, justifica-se

necessidade de trabalhar com abordagens alternativas para o conteúdo de ED, focando também a questão interpretativa, conceitual, por um lado para explorar esta habilidade e por outro, para que a aprendizagem de ED não seja tão prejudicada pelo cenário problemático apresentado em relação à matemática básica.

Em nossa busca sobre investigações desenvolvidas com foco no ensino-aprendizagem de ED, percebemos que existem poucos estudos que exploram o tema. Os autores analisados mencionam que currículos estão sendo modificados e que em alguns livros já se percebe uma intenção de mudança no foco de ensino das ED, apresentando situações que requerem uma maior interpretação, mas assinalam que poucas investigações foram feitas sobre o efeito que esta mudança causa na aprendizagem dos alunos.

A título de conclusão, apontamos para a necessidade de um esforço coletivo por parte dos professores no sentido de atualizar a metodologia de ensino das ED. Como sugestões de seguimento desse trabalho, indicamos a necessidade de criar módulos auxiliares para que os alunos que apresentam mais dificuldades possam aprender os pre-requisitos necessários para que o conteúdo de ED possa ser aprendido satisfatoriamente; trabalhar com uma metodologia que exija maior participação dos alunos e mais interpretação de sua parte, introduzindo a utilização de ferramentas computacionais para ajudar na tarefa de resolução analítica de ED.

## Referências

- BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. *Educação Matemática Pesquisa*, v.6, n.2, 2004.
- DULLIUS, M. M.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A. Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica: uma Experiência em Cursos de Engenharia. *Bolema*, v. 24, n. 38, 2011.
- HABRE, S. Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*. v.18, n.4, p.455-472, 2000.
- HABRE, S. Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. *International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology*, v.35, n.5, p.651-662, 2003.
- JAVARONI, S. L. O processo de visualização no curso de introdução às equações diferenciais ordinárias. *Revista de Ensino de Engenharia*, v. 28, n.1, p. 17-25, 2009.
- JAVARONI, S. L.; SOARES, D. da S. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. *Acta Scientiae*, v.14, n.2, p. 260-275, 2012.
- MORENO, M. M.; AZCÁRATE, C. G. Concepciones de los Profesores sobre la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales a Estudiantes de Química y Biología. Estudio de Casos. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, v.15, n.1, p.21-34, 1997.

MORENO, M. M.; AZCÁRATE, C. G. Concepciones y Creencias de los Profesores Universitarios de Matemáticas acerca de la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, v.21, n.2, p.265-280, 2003.

PASSOS, F. G. dos; DUARTE, F. R., LEITE, A.A.M; PEREIRA, P. J.; LEITE, T. N.; DONZELI, V. P. Análise dos índices de reprovações nas disciplinas Cálculo I e Geometria Analítica nos cursos de Engenharia da UNIVASF. In. CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 2E05-1-2E05-15, 2007, Curitiba/PR. *Anais do XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia*. 2007, Curitiba/PR, CD-ROM.

RASMUSSEN, C. New directions in differential equations A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, v.20, p.55-87, 2001.

ROWLAND, D. R.; JOVANOSKI, Z. Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology*, v.35, n.4, p.503-516, 2004.

ROWLAND, D. R. Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology*, v.37, n.5, p.553-558, 2006.

STEPHAN, M.; RASMUSSEN, C. Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, v.21, p.459-490, 2002.

**MARIA MADALENA DULLIUS** possui Licenciatura Curta em Ciências pela Fundação Alto Taquari de Ensino Superior (1991), Licenciatura Plena em Matemática pela Fundação Alto Taquari de Ensino Superior (1993), Mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2001) e Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade de Burgos/Espanha (2009). Atualmente é professora Titular do Centro Universitário UNIVATES e coordena o Mestrado Acadêmico em Ensino. Atua como docente no Curso de Licenciatura em Ciências Exatas e em cursos de Engenharia com disciplinas de Cálculo, Equações Diferenciais e Métodos Numéricos. Integra o quadro de docentes permanentes do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Univates. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Aplicada e Ensino de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Modelagem Matemática, Uso de Recursos Computacionais no Ensino da Matemática, Resolução de Problemas e Formação de Professores.

**ELIANE ANGELA VEIT** possui graduação em Licenciatura em Física pela UFRGS (1975), mestrado em Física pela UFRGS (1979), doutorado em Ciências pela UFRGS (1981) e pós-doutorado em Física em TRIUMF, Canadá (1982-1984). É professora da UFRGS desde 1979, sendo atualmente professora associada. Atuou em Física teórica, particularmente, em Reações Nucleares e Espalhamento, até o ano de 2000, quando integrou-se ao Grupo de Pesquisa em Ensino de Física da UFRGS. Participa de projetos do Centro de Referência para o Ensino de Física (CREF) desde a sua criação, em 2000. Participou da criação do PPG Ensino de Física, em 2002, e desde então ministra disciplinas relacionadas ao uso de tecnologias de informação e comunicação no ensino de Física e orienta alunos dos mestrados profissional, acadêmico e doutorado. Atuou no Curso de Especialização em Física para a Educação Básica na modalidade EAD oferecido pela UFRGS, no âmbito da UAB (06/2009-12/2010). Modelagem computacional em Ensino de Física é o tema central de sua pesquisa.

**IVES SOLANO ARAUJO** possui graduação em Licenciatura e Bacharelado em Física (FURG - 2000), Mestrado em Física na área de concentração Ensino de Física (UFRGS - 2002) e Doutorado em Física também voltado ao Ensino de Física (UFRGS 2005). Realizou um estágio pós-doutoral na Universidade de Harvard (EUA, 2009-2010). Atualmente é Professor Adjunto do Dept. de Física

- UFRGS e editor adjunto da revista *Investigações em Ensino de Ciências (IENCI)*. Realiza pesquisas em Ensino de Física e ministra disciplinas associadas aos seguintes temas: Física Geral, modelagem computacional aplicada ao ensino, tecnologias computacionais, métodos interativos de ensino, teorias de aprendizagem, epistemologia da Física e ensino de Ciências.

Recebido: 07 de dezembro de 2012

Revisado: 01 de maio de 2013

Aceito: 28 de maio de 2012