

Investigación

Posibilidades de resolución de problemas de ingeniería por el método de diferencias finitas

Possibilities of engineering problem solving by the method of finite differences

Rubén Galindo Aires

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 073–096, ISSN 2174-0410

Recepción: 29 Abr'13; Aceptación: 8 Jul'13

1 de octubre de 2013

Resumen

La obtención de la solución de determinados problemas de ingeniería implica la resolución de ecuaciones en derivadas parciales que tienen que ser evaluadas numéricamente. El método de resolución numérica más extendido es sin duda el método de los elementos finitos, que ha superado al método de las diferencias finitas principalmente por su sencillez conceptual y por las limitaciones de este último método para adaptarse a mallas irregulares; sin embargo, diversos autores han seguido desarrollando y aplicando el método de diferencias a todo tipo de problemas. En este artículo se presenta una aplicación numérica al cálculo estructural de una placa, que se resuelve por el método de las diferencias finitas y que permite obtener soluciones óptimas incluso para el problema de carga localizada, poniendo de manifiesto la idoneidad de aplicación de métodos de diferencias generalizados en su resolución y cuya formulación se presenta. En particular se resuelve 3 casos de aplicación: placa apoyada en sus cuatro lados bajo carga uniforme, placa apoyada en sus cuatro lados bajo carga puntual en el centro y placa empotrada en sus cuatro lados bajo carga uniforme.

Palabras Clave: Resolución numérica, Método de diferencias finitas, Diferencias finitas generalizadas, Malla irregular.

Abstract

Obtaining the solution of specific engineering problems involves solving partial differential equations that have to be evaluated numerically. The finite element method is certainly the numerical resolution method most widely, which has outperformed the finite difference method mainly for its conceptual simplicity and by the limitations of the latter method to adapt to irregular meshes, however, several authors have continued to develop and implement the method of differences to all kinds of problems. This article presents a numerical application of the structural problem to calculate plates, which is solved by the finite difference method and allows optimal solutions even for localized load problems, demonstrating the suitability of application of generalized difference methods and

presenting its formulation. In particular, three applications are resolved: plate with all four sides simply supported under uniform load, plate with all four sides simply supported under concentrated load at the center and plate with all four sides embedded under uniform load.

Keywords: Numerical resolution, Finite difference method, generalized finite differences, irregular mesh.

1. Introducción

La mecánica de medios continuos ha permitido el planteamiento de las ecuaciones que rigen fenómenos de muchas ramas de la ingeniería: hidráulica, estructuras, geotecnia, etc. La resolución de problemas de ingeniería, una vez planteadas las ecuaciones, se reducen en muchas ocasiones a su resolución numérica; es importante comprender que no es en general posible resolver mediante métodos exactos los sistemas de ecuaciones obtenidos y es preciso recurrir a técnicas numéricas. Incluso en los casos más elementales, en los que nos es posible obtener la solución mediante desarrollos en serie, la calidad numérica de estas soluciones no es mejor que las que se obtienen con un método aproximado, ya que el truncamiento de una serie puede llevar a errores de precisión significativos.

El método de las diferencias finitas como método de resolución de problemas planteados en ecuaciones en derivadas parciales ha ido perdiendo fuerza en aplicaciones numéricas frente a otros métodos de resolución, sobre todo el método de los elementos finitos. Sin embargo, son muchos los autores que han seguido confiando en el desarrollo del método de diferencias finitas, proponiendo diferentes soluciones para poder aplicar las diferencias finitas a cualquier tipo de dominio. Así, de las limitaciones del método clásico de diferencias finitas se proyecta el método de las diferencias finitas generalizadas, aplicable a cualquier dominio con distribución irregular de puntos.

En este trabajo se aplica el método de las diferencias finitas a varios problemas habituales de ingeniería, se indica su alcance, su comparación con el método de los elementos finitos y se expone la línea de mejora de los métodos de diferencia finitas clásicos a los de diferencias finitas generalizadas.

Con el propósito anterior se estudia el problema estructural de la placa de Kirchhoff en varios casos de carga y con diversas condiciones de contorno, comparando el resultado con el obtenido mediante el método de los elementos finitos obtenido a través del programa SAP 2000.

2. El método de las diferencias finitas

Las ecuaciones en derivadas parciales o los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales rigen muchos fenómenos de ingeniería según establecen los principios físicos y sus correspondientes desarrollos matemáticos.

Se topa con importantes dificultades, en la resolución de este tipo de ecuaciones y sus condiciones de contorno aún con coeficientes constantes, con lo que se recurre a la búsqueda de soluciones aproximadas. Entre los diversos métodos que permiten la obtención de este tipo de solución uno de los más clásicos es el denominado de diferencias finitas. Dicho método se

basa en discretizar de forma regular el dominio, estableciendo un conjunto finito de puntos interiores y de la frontera donde se va a calcular el valor de la función. Para hallar el valor aproximado de la función en dichos puntos llamados nodos, es necesario sustituir las derivadas parciales para cada punto por cocientes de diferencias entre los valores de la solución en diferentes puntos, obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones que incógnitas. A las expresiones de transformación de cada operador diferencial en cocientes de diferencias, se le denomina fórmula en diferencias finitas.

Las fórmulas en diferencias clásicas centradas, para una función f donde se define como h y k los incrementos de las variables de dicha función x e y respectivamente, tienen la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y+k) - f(x, y-k)}{2k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(x, y+k) - 2f(x, y) + f(x, y-k)}{k^2}$$

Dichas ecuaciones se pueden generalizar para órdenes superiores, que sustituyendo en las ecuaciones diferenciales y de contorno, permiten obtener un sistema de ecuaciones algebraicas, con tantas ecuaciones como incógnitas, de igual número que nodos tenga el dominio. Al resolver el sistema se obtienen valores aproximados de la función en los puntos del dominio discretizado.

Este método de resolución tiene la gran ventaja de su planteamiento aunque tiene limitaciones. Por un lado la malla debe ser regular, ya que en caso contrario para cada malla se debería encontrar una fórmula en diferencias finitas; por otro lado, el número de nodos y la selección de dichos nodos en la malla para la obtención de las fórmulas en diferencias finitas, es fijo.

Al discretizar un dominio, surgen como más habituales el método de diferencias finitas clásico de cinco nodos y de nueve nodos. En ambos métodos la frontera debe ser una poligonal cerrada de lados contiguos perpendiculares, los puntos de estimación deben estar repartidos de forma regular y los nodos que rodean al nodo central debe ser 4 u 8 pero no arbitrario.

Para el método de diferencias finitas de cinco nodos (siendo el nodo central el nodo cero, el uno el de su derecha y el resto creciendo en sentido antihorario), de manera que se elige una discretización del dominio de igual paso h en ambas variables y llamando f_i al valor de la función f a aproximar en el nodo i , se tiene:

$$D_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_1 - f_3}{2h} \\ \frac{f_2 - f_4}{2h} \\ \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{2h} \\ \frac{f_1 + f_4 - 2f_0}{2h} \end{bmatrix}$$

Análogamente, para el método de diferencias finitas de nueve nodos (siendo el nodo central el nodo cero, el uno el de su derecha y el resto creciendo en sentido antihorario) se tiene:

$$D_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} \left(\frac{2}{5} f_1 + \frac{f_2}{20} - \frac{f_4}{20} - \frac{2}{5} f_5 - \frac{f_6}{20} + \frac{f_8}{20} \right) \\ \frac{1}{h} \left(\frac{2}{5} f_3 + \frac{f_2}{20} + \frac{f_4}{20} - \frac{2}{5} f_7 - \frac{f_6}{20} - \frac{f_8}{20} \right) \\ \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{3} f_0 + \frac{5f_1}{6} + \frac{f_2}{12} - \frac{f_3}{6} + \frac{f_4}{12} + \frac{5f_5}{6} + \frac{f_6}{12} - \frac{f_7}{6} + \frac{f_8}{12} \right) \\ \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{3} f_0 + \frac{f_1}{6} + \frac{f_2}{12} + 5 \frac{f_3}{6} + \frac{f_4}{12} - \frac{f_5}{6} + \frac{f_6}{12} + \frac{5f_7}{6} + \frac{f_8}{12} \right) \\ \frac{1}{4h^2} (f_2 - f_4 + f_6 - f_8) \end{bmatrix}$$

3. El método de las diferencias finitas generalizadas

El método de las diferencias finitas generalizadas [1] supone una evolución del método clásico de diferencias finitas, el cual permite resolver problemas donde la nube de puntos generada sea irregular. Se plantea el método para ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, evidentemente su generalización es inmediata, al igual que hemos generalizado el método de diferencias finitas clásico.

Sea un problema gobernado por una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en el dominio bidimensional:

$$L_2[U] = f \quad \text{en } \Omega \tag{3.1}$$

con las condiciones de contorno:

$$L_1[U] = g \quad \text{en } \Gamma \tag{3.2}$$

donde la función U es al menos dos veces diferenciable en el dominio $\Omega \subset R^2$, con frontera Γ . L_2 es una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden, L_1 es una ecuación lineal diferencial de primer orden, mientras que f y g son dos funciones conocidas.

Se establecen un conjunto de nodos que se reparte en todo el dominio, de tal forma que a cada nodo del dominio se le asocia una estrella, es decir un conjunto de nodos de influencia alrededor de un nodo central.

El número y la posición de los nodos en cada estrella son factores decisivos que afectan a la aproximación mediante fórmulas en diferencias finitas. Se utilizará una nube de nodos lo más regular posible buscando un buen condicionamiento de las estrellas. El criterio de

selección de nodos empleado será el de los cuatro cuadrantes, es decir, el área alrededor del punto central se divide en 4 sectores correspondientes a los cuadrantes de un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el nodo central. En cada cuadrante se seleccionan los dos nodos más cercanos (se seleccionan dos nodos para tener un conjunto de nodos alrededor del central de 8 que parece ser un número óptimo [1]), si esto no fuera posible (por ejemplo en un contorno) se pueden añadir nodos para conseguir el número de nodos necesarios para la resolución de las ecuaciones en diferencias.

Por su parte las funciones de ponderación definen un dominio relativamente pequeño en el que su valor es distinto de cero, siendo nulo en el resto del dominio. Cada función de ponderación se asocia a un nodo, pudiéndose superponer con otros subdominios. Se usará la función de peso potencial $w(x, y)$ (las mejores funciones de ponderación son las exponenciales y las potenciales [1]) que se define a continuación:

$$w(x, y) = \frac{1}{(dist)^3}$$

donde $dist$ es la distancia del nodo central al nodo considerado de la estrella.

Llamando U_0 al valor de la función en el nodo central de la estrella de coordenadas (x_0, y_0) y U_i al valor de la función en el resto de los nodos de coordenadas (x_i, y_i) , con $i = 1, 2, \dots, N$, entonces el desarrollo en serie de Taylor es:

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) + \dots$$

donde $h_i = x_i - x_0$; $k_i = y_i - y_0$.

Por tanto, despreciando los términos de orden superior al segundo, la aproximación u_i de U_i es:

$$u_i = u_0 + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right)$$

La expresión anterior es válida para cualquier $i = 1, 2, \dots, N$ con lo que, sumando todas las expresiones que resultan para los diferentes valores de i se obtiene:

$$\sum_{i=1}^N (u_i - u_0) = \sum_{i=1}^N \left(h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right)$$

Se define el funcional $B(u)$ como sigue:

$$B(u) = \sum_{i=1}^N \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right) w(h_i, k_i) \right]^2$$

donde $w(h_i, k_i)$ es una función de ponderación.

A continuación minimizamos el funcional $B(u)$ con respecto a las derivadas parciales y así obtenemos un conjunto de cinco ecuaciones lineales con cinco incógnitas $\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right)$, cuya resolución proporciona expresiones explícitas de las incógnitas en términos del valor de las aproximaciones de segundo orden en todos los nodos de la estrella u_i , de los valores h_i y k_i , y de la función de ponderación w . Así, el sistema que se obtiene es:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] h_i w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] k_i w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \frac{h_i^2}{2} w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \frac{k_i^2}{2} w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] h_i k_i w^2 = 0 \end{cases}$$

donde $w = w(h_i, k_i)$.

Expresándolo matricialmente:

$$AD_u = b$$

$$D_u = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right\}^T$$

$$b = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) k_i w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{h_i^2}{2} w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{k_i^2}{2} w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i k_i w^2 \end{array} \right\}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} \sum_{i=1}^N h_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^N h_i k_i w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i k_i^2}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N h_i^2 k_i w^2 \\ & \sum_{i=1}^N k_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2 k_i}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{k_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N h_i k_i^2 w^2 \\ & & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^4}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2 k_i^2}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3 k_i}{2} w^2 \\ & & & \sum_{i=1}^N \frac{k_i^4}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i k_i^3}{2} w^2 \\ & & & & \sum_{i=1}^N h_i^2 k_i^2 w^2 \end{array} \right)$$

SIM

Para la resolución del sistema es evidente que se necesitan al menos cinco nodos (sin incluir el central).

Para la resolución del sistema se puede aplicar el método de Cholesky ya que la matriz A es simétrica. Se puede descomponer A como producto de una matriz triangular por su transpuesta QQ^T . Con lo que se puede escribir:

$$QQ^T D_u = b$$

Y ahora resolvemos en dos etapas:

$$Q^T D_u = Y \quad (3.3)$$

$$QY = b \quad (3.4)$$

Así, resolviendo el sistema (3.4) en orden descendente se obtienen los valores de Y , después a partir del sistema (3.3) se obtienen las fórmulas en diferencias siguientes:

$$\begin{cases} Y(k) = -u_0 \sum_{i=1}^5 M_{ki} c_i + \sum_{j=1}^N u_j (\sum_{i=1}^p M_{ki} d_{ji}), & k = 1, \dots, 5 \\ D(k) = \frac{1}{q_{kk}} (Y(k) - \sum_{i=1}^{5-k} q_{(k+1)k} D(k+i)), & k = 1, \dots, 5 \end{cases} \quad (3.5)$$

donde:

$$M_{ij} = \begin{cases} (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{q_{ij}} \sum_{k=j}^{i-1} q(ik) M(kj) & \text{for } j < i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \\ \frac{1}{q_{ij}} & \text{for } j = i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \\ 0 & \text{for } j > i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

con δ_{ij} el delta de Kronecker, y:

$$c_i = \sum_{j=i}^N d_{ji}$$

$$d_{j1} = h_j w^2; \quad d_{j2} = k_j w^2; \quad d_{j3} = \frac{h_j^2}{2} w^2; \quad d_{j4} = \frac{k_j^2}{2} w^2; \quad d_{j5} = h_j k_j w^2$$

Incluyendo en la ecuación en derivadas parciales (3.1) y (3.2) los valores explícitos de las derivadas parciales expresados en (3.5) se obtiene la ecuación de la estrella, que es posible expresarla como:

$$u_0 = \sum_{i=1}^N m_i u_i + m_f f_0 \quad (3.6)$$

La expresión (3.6) es una ecuación lineal que relaciona el valor de la función en el nodo central de la estrella (u_0) con los valores de la función en el resto de los nodos de la estrella (u_i).

La formulación dada debe ser aplicada a cada uno de los nodos del dominio, obteniéndose un número de ecuaciones e incógnitas igual al número de nodos seleccionados para calcular el valor de la función. La resolución del sistema de ecuaciones lineales resuelve el problema.

Por tanto, el método de las diferencias finitas generalizadas puede ser aplicado a problemas con forma irregular de frontera y una distribución aleatoria de los nodos centrales

de las estrellas, de tal forma que cada nodo central está rodeado por un número de puntos que no tienen que ser necesariamente iguales para todos ellos.

4. Cálculo de placas

4.1. Planteamiento de las ecuaciones

Se considera una estructura continua plana tal que el espesor es muy pequeño en relación a las demás dimensiones de la estructura y que llamaremos placa.

Consideraremos acciones perpendiculares a su plano (p) y adoptamos el criterio de signos para los esfuerzos cortantes (q_x, q_y) y para los momentos (m_x, m_y, m_{xy}, m_{yx}) indicados en la figura 1.

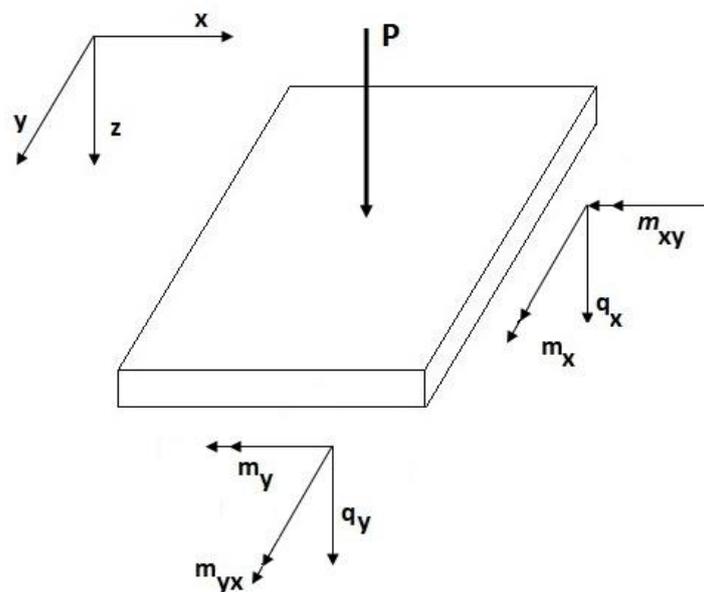


Figura 1: Criterio de signos.

Según el espesor de las placas se definen placas delgadas o gruesas. El cálculo es diferente en ambos casos. Si su espesor es inferior a $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{7}$ de la luz (según autores) se dice que la placa es delgada, en caso contrario la placa es gruesa. La teoría que permite el cálculo de las placas delgadas se llama de Kirchhoff [2,3]; por su parte para placas gruesas se utiliza la teoría de Mindlin [2,3].

Analizamos las placas bajo las siguientes hipótesis:

1. Placa delgada: espesor pequeño y se desprecia la deformación por cortante.
2. Los movimientos de la placa son pequeños respecto a las dimensiones de la placa (esto es preciso para que sea aplicable las condiciones de equilibrio a la estructura sin deformar).

3. Suponemos comportamiento del material isótropo, homogéneo y elastolineal (ley de Hooke).
4. Suponemos que los movimientos de cualquier punto del plano medio de la placa solo tiene movimiento vertical.
5. No existen tensiones ni deformaciones perpendiculares al plano medio de la placa. Suponemos, por tanto que las cargas se aplican en el plano medio.
6. Hipótesis de Kirchhoff: si tenemos una recta perpendicular al plano medio de la placa, al deformarse la placa sigue siendo una recta y sigue siendo perpendicular al plano medio (esto es equivalente a la ley de Navier-Bernoulli en vigas).

La resolución de placas se basa en el estudio realizado a partir del planteamiento de las ecuaciones intervinientes según las hipótesis anteriores:

- Se plantean las ecuaciones cinemáticas y de compatibilidad relacionándose movimientos y deformaciones ($d - \varepsilon$).
- Se plantean las ecuaciones constitutivas (en principio usamos la ley de Hooke) que expresan relaciones tensión –deformación ($\sigma - \varepsilon$).
- Se utilizan las ecuaciones de equilibrio que relacionan el equilibrio de la estructura o cualquier parte de ella. Relaciona cargas externas con tensiones ($p - \sigma$).

Así, utilizamos deformaciones en función de movimientos $\varepsilon = f(\sigma)$. Sustituyendo en $\sigma = g(\varepsilon)$ se expresa que $\sigma = h(d)$. Y sustituyendo en $p = j(\sigma)$ tenemos que:

$$p = k(d)$$

Es decir que las cargas externas (dato) es función de los movimientos, lo cual supone el planteamiento que se conoce como método de rigidez.

Del estado tensional de la placa es necesario obtener los esfuerzos, que se obtienen por simple integración en el espesor de la placa según las siguientes ecuaciones (figura 2):

$$m_x dy = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_x^z dy dz \rightarrow m_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_x^z dz$$

$$m_y = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_y^z dz$$

$$q_x dy = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{xz}^z dy dz \rightarrow q_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{xz}^z dz$$

$$q_y = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{yz}^z dz$$

$$m_{xy} dy = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \tau_{xy}^z dy dz \rightarrow m_{xy} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \tau_{xy}^z dz$$

$$m_{yx} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \tau_{yx}^z dz$$

Por la teoría de elasticidad $\tau_{xy}^z = \tau_{yx}^z$ y por tanto: $m_{xy} = m_{yx}$.

En todas las ecuaciones anteriores el superíndice de las tensiones indica la cota de referencia.

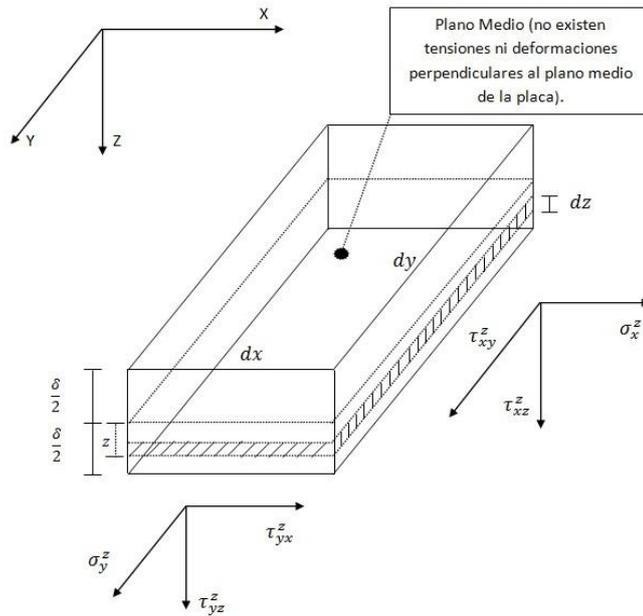


Figura 2: Integración de tensiones.

Las ecuaciones cinemáticas que relacionan movimientos con deformaciones en la hipótesis de trabajo de Kirchhoff se plantea en una sección por el plano vertical XZ (figura 3).

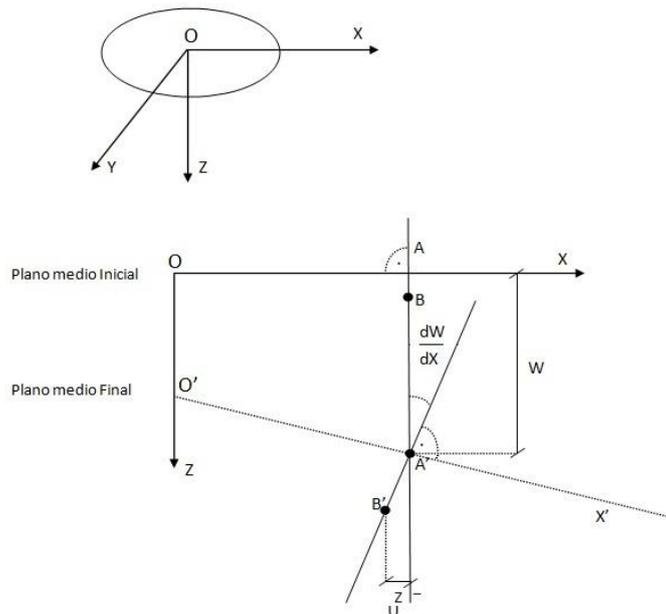


Figura 3: Relaciones cinemáticas.

El punto A de la figura 3 se mueve verticalmente a A' (desplazamiento w) ya que nuestro plano de referencia no tiene desplazamiento según y . Según la hipótesis de Kirchhoff, que AB sea perpendicular a OX implica que $A'B'$ sea perpendicular a $O'X'$ y por tanto se obtiene que el desplazamiento vertical u^z es:

$$u^z = -z \frac{dw}{dx}$$

Análogamente si tomo el plano vertical YZ se tiene que el desplazamiento vertical v^z :

$$v^z = -z \frac{dw}{dy}$$

Sustituyendo en las ecuaciones que expresan las definiciones de deformación según movimientos se obtiene que, en las direcciones indicadas:

$$\varepsilon_x^z = \frac{\partial u^z}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y^z = \frac{\partial v^z}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy}^z = \frac{\partial u^z}{\partial y} + \frac{\partial v^z}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Suponiendo pequeños desplazamientos la curvatura χ se puede expresar según las siguientes igualdades:

$$\left. \begin{aligned} \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \chi_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^z &= -z \chi_x \\ \varepsilon_y^z &= -z \chi_y \\ \gamma_{xy}^z &= -2z \chi_{xy} \end{aligned} \right\}$$

Se constituyen así las ecuaciones cinemáticas.

Respecto a las ecuaciones constitutivas que expresan las relaciones tensiones deformaciones, se aplica directamente la ley de Hooke expresadas en la forma de Lamé:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^z &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^z + \nu \varepsilon_y^z) \\ \sigma_y^z &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^z + \nu \varepsilon_x^z) \\ \tau_{xy}^z &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}^z \end{aligned} \right\}$$

Siendo E el módulo de Young y ν el módulo de Poisson del medio.

Sustituyendo las ecuaciones cinemáticas en las constitutivas:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^z &= \frac{-Ez}{1-\nu^2}(\chi_x + \nu\chi_y) \\ \sigma_y^z &= \frac{-Ez}{1-\nu^2}(\chi_y + \nu\chi_x) \\ \tau_{xy}^z &= \frac{-Ez}{(1+\nu)}\chi_{xy} \end{aligned} \right\}$$

Por consiguiente, los esfuerzos son:

$$\begin{aligned} m_x &= \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z\sigma_x^z dz = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{Ez^2}{1-\nu^2}(\chi_x + \nu\chi_y) dz = \\ &= \frac{-E}{1-\nu^2}(\chi_x + \nu\chi_y) \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z^2 dz = \frac{-E\delta^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_x + \nu\chi_y) = -D(\chi_x + \nu\chi_y) \\ m_x &= -D(\chi_x + \nu\chi_y) \\ m_{xy} &= -D(1-\nu)\chi_{xy} \\ q_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right) \\ q_y &= \frac{\partial m_y}{\partial y} = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right) \end{aligned}$$

A continuación planteamos las ecuaciones de equilibrio (figura 4).

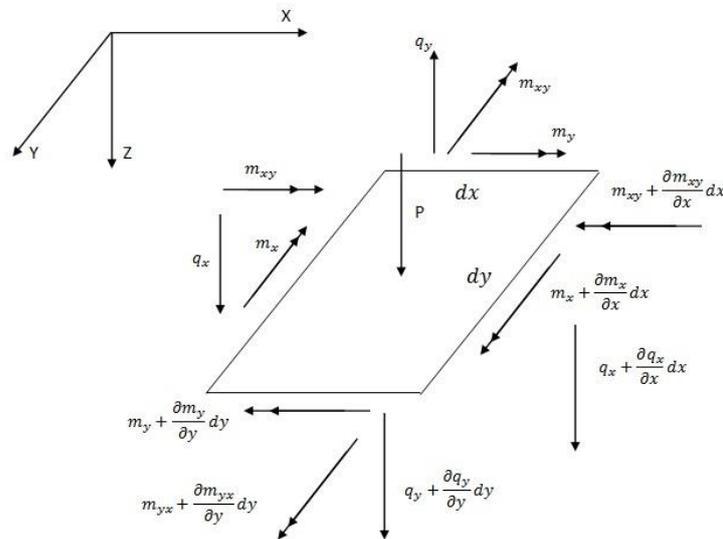


Figura 4: Planteamiento del equilibrio.

- Expresando los momentos según el eje y :

$$\begin{aligned} -m_x dy + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx\right) dy - m_{yx} dx + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - q_x dy \frac{dx}{2} - \\ - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

Despreciando el diferencial de tercer orden y dividiendo por $dxdy$ se obtiene:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0$$

- Realizando el equilibrio de momentos según el eje x :

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0$$

- Si se hace el equilibrio de esfuerzos verticales se obtiene:

$$P dxdy - q_x dy + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy - q_y dx + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx = 0$$

Y dividiendo por $dxdy$ resulta:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + P = 0$$

A partir de los desarrollos anteriores que nos han permitido obtener los diferentes tipos de ecuaciones procedemos a sustituir las ecuaciones constitutivas en las de equilibrio:

$$-D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - q_x = 0$$

$$-D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - q_x = 0$$

$$q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\chi_x + \chi_y)$$

Análogamente se obtiene:

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\chi_x + \chi_y)$$

Y por último, sustituyendo estas expresiones en la ecuación de equilibrio vertical se obtiene:

$$-D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + P = 0$$

$$\frac{P}{D} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] w$$

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \equiv \text{operador laplaciano}$$

$$\frac{P}{D} = \nabla \nabla w = \nabla^2 w$$

Esta es la llamada ecuación de Lagrange que relaciona la carga uniformemente repartida en un elemento diferencial de la placa con el bilaplaciano de la deformada.

4.2. Aplicación para la placa apoyada en sus cuatro lados con carga uniforme

Se aplica el método de las diferencias finitas a la placa apoyada en sus cuatro lados y con carga uniforme. Para su resolución se ha empleado el esquema para la estrella de ocho nodos.

La placa que consideramos para el cálculo es una placa cuadrada de 1 metro de lado y un espesor de 10 centímetros. El material de la placa se considera el acero y es por tanto adecuado considerar un módulo de Young de 2×10^8 kN/m² y un módulo de Poisson de 0,3.

Como sabemos la ecuación de Lagrange para la placa es:

$$\nabla^2 w = \frac{P}{D}$$

Adoptamos la malla de la figura 5 para la placa de referencia.

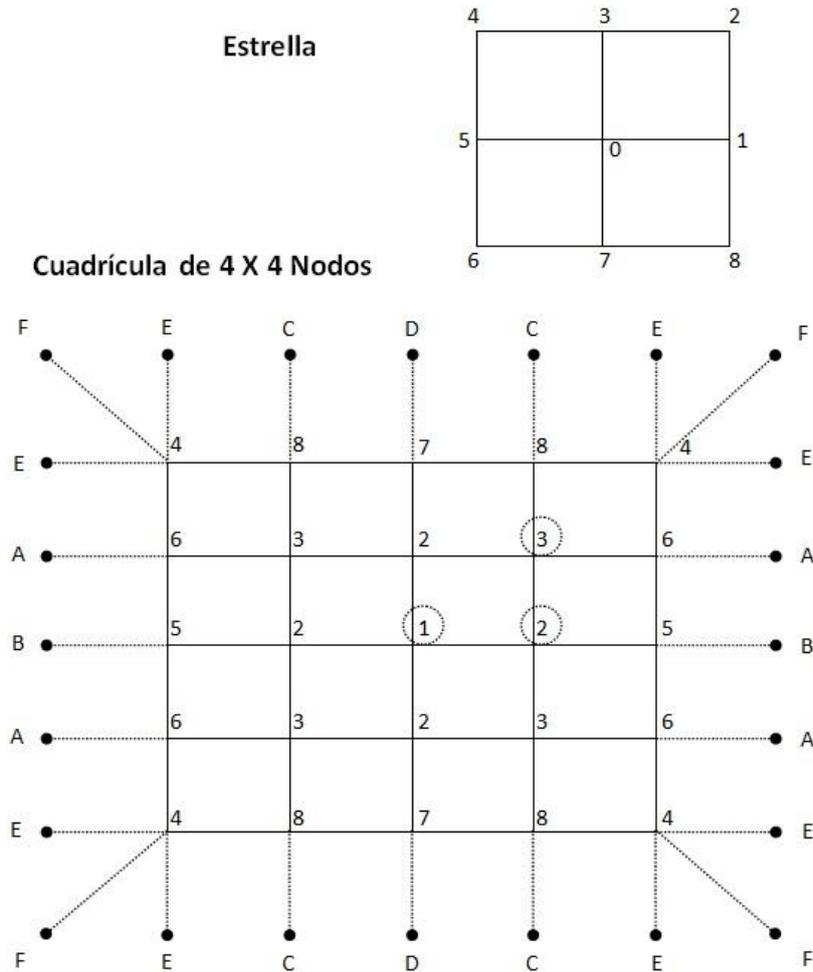


Figura 5: Estrella y malla de cálculo de la placa.

Y las condiciones de contorno con el esquema de malla anterior para el tipo de placa a resolver son:

$$w_4 = w_5 = w_6 = w_7 = w_8 = 0$$

$$w_A = -w_3$$

$$w_B = -w_2$$

$$w_C = -w_3$$

$$w_D = -w_2$$

$$w_E = -w_8 = 0$$

$$w_F = -w_3$$

Los puntos A a F son los simétricos respecto del contorno de los puntos interiores, que se supone mantienen la pendiente de la recta perpendicular que une el punto interior con el contorno.

El cálculo de las derivadas para la estrella de 8 nudos arroja los siguientes resultados:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{h} \left(\frac{2w_1}{5} + \frac{w_2}{20} - \frac{w_4}{20} - \frac{2w_5}{5} - \frac{w_6}{20} + \frac{w_8}{20} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{h} \left(\frac{2w_3}{5} + \frac{w_2}{20} + \frac{w_4}{20} - \frac{2w_7}{5} - \frac{w_6}{20} - \frac{w_8}{20} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_0}{3} + \frac{5w_1}{6} + \frac{w_2}{12} - \frac{w_3}{6} + \frac{w_4}{12} + \frac{5w_5}{6} + \frac{w_6}{12} - \frac{w_7}{6} + \frac{w_8}{12} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_0}{3} - \frac{w_1}{6} + \frac{w_2}{12} + \frac{5w_3}{6} + \frac{w_4}{12} - \frac{w_5}{6} + \frac{w_6}{12} + \frac{5w_7}{6} + \frac{w_8}{12} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4h^2} (w_2 - w_4 + w_6 - w_8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_{xx}^0}{3} + \frac{5w_{xx}^1}{6} + \frac{w_{xx}^2}{12} - \frac{w_{xx}^3}{6} + \frac{w_{xx}^4}{12} + \frac{5w_{xx}^5}{6} + \frac{w_{xx}^6}{12} - \frac{w_{xx}^7}{6} + \frac{w_{xx}^8}{12} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_{yy}^0}{3} - \frac{w_{yy}^1}{6} + \frac{w_{yy}^2}{12} + \frac{5w_{yy}^3}{6} + \frac{w_{yy}^4}{12} - \frac{w_{yy}^5}{6} + \frac{w_{yy}^6}{12} + \frac{5w_{yy}^7}{6} + \frac{w_{yy}^8}{12} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_{yy}^0}{3} + \frac{5w_{yy}^1}{6} + \frac{w_{yy}^2}{12} - \frac{w_{yy}^3}{6} + \frac{w_{yy}^4}{12} + \frac{5w_{yy}^5}{6} + \frac{w_{yy}^6}{12} - \frac{w_{yy}^7}{6} + \frac{w_{yy}^8}{12} \right)$$

$$w_{xx}^1 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_1}{3} + \frac{8w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{5w_1}{6} - \frac{18w_2}{12} - \frac{2w_3}{6} \right)$$

$$w_{xx}^3 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{w_1}{12} - \frac{4w_2}{6} - \frac{5w_3}{3} \right)$$

$$w_{xx}^4 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-2w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^5 = w_{xx}^6 = w_{xx}^7 = w_{xx}^8 = 0$$

$$w_{yy}^1 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_1}{3} + \frac{8w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{yy}^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-w_1}{6} - \frac{18w_2}{12} + \frac{10w_3}{6} \right)$$

$$w_{yy}^3 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{w_1}{12} + \frac{4w_2}{6} - \frac{5w_3}{3} \right)$$

$$w_{yy}^4 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-2w_3}{12} \right)$$

$$w_{yy}^5 = w_{yy}^6 = w_{yy}^7 = w_{yy}^8 = 0$$

A continuación, aplicamos la ecuación de Lagrange en los nudos 1,2 y 3 mediante sustitución de las derivadas calculadas.

Nudo 1:

$$\nabla^2 w_1 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{420}{36} w_1 - \frac{576}{36} w_2 + \frac{64}{36} w_3 \right) = \frac{1}{9h^4} (105w_1 - 144w_2 + 16w_3)$$

Nudo 2:

$$\nabla^2 w_2 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{-156}{36} w_1 + \frac{452}{36} w_2 - \frac{264}{36} w_3 \right) = \frac{1}{9h^4} (-39w_1 + 113w_2 - 66w_3)$$

Nudo 3:

$$\nabla^2 w_3 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{-32}{36} w_1 - \frac{288}{36} w_2 + \frac{1028}{72} w_3 \right) = \frac{1}{9h^4} (-8w_1 - 72w_2 + 128,5w_3)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\left. \begin{aligned} 105w_1 - 144w_2 + 16w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \\ -39w_1 + 113w_2 - 66w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \\ -8w_1 - 72w_2 + 128,5w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \end{aligned} \right\}$$

Tras su resolución se obtiene:

$$0,275 \frac{P}{D} h^4 = 0,252w_1$$

$$w_1 = 1,09 \frac{P}{D} h^4 = 1,09 \frac{P}{D} 0,25^4 L^4 = 4,26 \times 10^{-3} \frac{P}{D} L^4$$

Sabemos que la placa de acero es de espesor 0,1 m, y por tanto:

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \times (0,1 \text{ m})^3}{12(1 - 0,3^2)} = 18315 \text{ kNm}$$

Para una carga de 100 kN sobre una placa de 1 metro de lado:

$$w_1 = 2,32 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,0023 \text{ cm}$$

Comparando este resultado con un cálculo por elementos finitos con el programa SAP 2000 [4] se obtienen valores idénticos ($w_1 = 0,0022 \text{ cm}$) según muestra el gráfico de la figura 6.

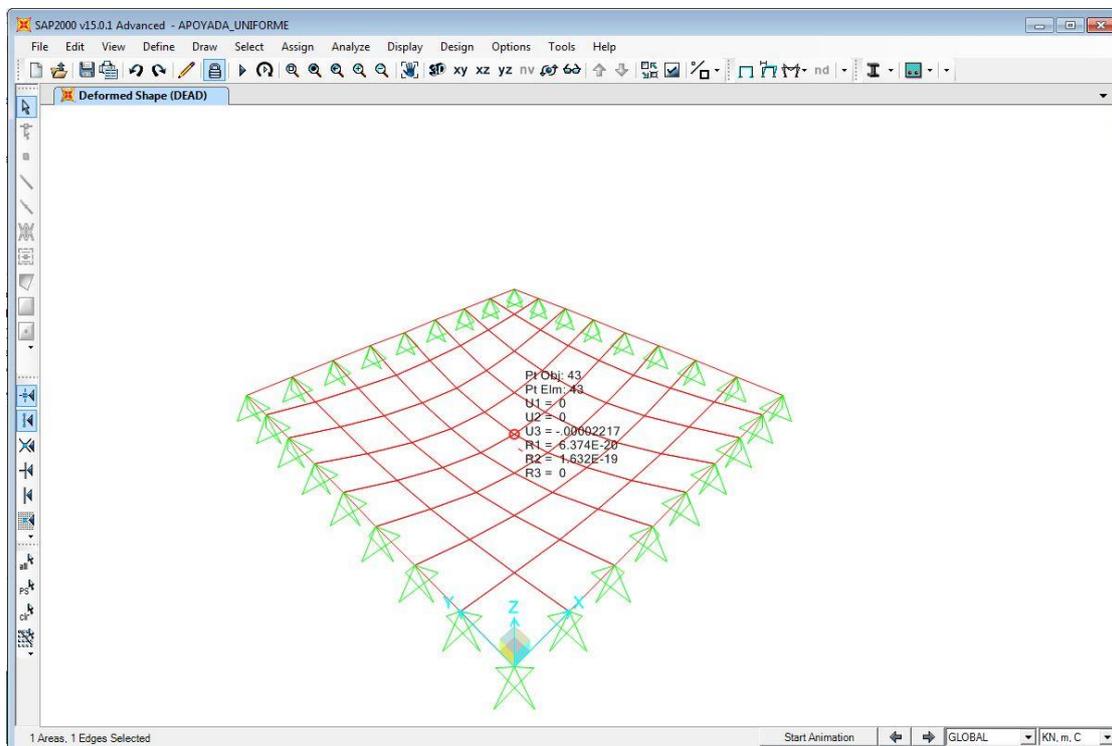


Figura 6: Modelo realizado con SAP 2000 para placa apoyada con carga uniforme.

4.3. Aplicación para la placa apoyada en sus cuatro lados con carga puntual en el centro

Respecto al apartado anterior en el que se resolvía la placa apoyada en sus cuatro vértices, el planteamiento es similar cambiando únicamente las condiciones de contorno que son:

$$w_4 = w_5 = w_6 = w_7 = w_8 = 0$$

$$w_A = w_3$$

$$w_B = w_2$$

$$w_C = w_3$$

$$w_D = w_2$$

$$w_E = w_8 = 0$$

$$w_F = w_3$$

Esto equivale a imponer la condición de giro nulo en el contorno empotrado y aplicar el esquema centrado para las derivadas segundas de los nodos del contorno. Por tanto, se tiene que:

$$w_{xx}^1 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_1}{3} + \frac{8w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{5w_1}{6} - \frac{18w_2}{12} - \frac{2w_3}{6} \right)$$

$$w_{xx}^3 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{w_1}{12} - \frac{4w_2}{6} - \frac{5w_3}{3} \right)$$

$$w_{xx}^4 = \frac{1}{3h^2} w_3$$

$$w_{xx}^5 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{10w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^6 = 0$$

$$w_{xx}^7 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{4w_3}{12} - \frac{2w_2}{6} \right)$$

$$w_{xx}^8 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{2w_2}{12} - \frac{2w_3}{6} \right)$$

$$w_{yy}^1 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_1}{3} + \frac{8w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{yy}^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-w_1}{6} - \frac{18w_2}{12} + \frac{10w_3}{6} \right)$$

$$w_{yy}^3 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{w_1}{12} + \frac{4w_2}{6} - \frac{5w_3}{3} \right)$$

$$w_{yy}^4 = \frac{4}{12h^2} w_3$$

$$w_{yy}^5 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-2w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{yy}^6 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-2w_3}{6} + \frac{2w_2}{12} \right)$$

$$w_{yy}^7 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{10w_2}{6} - \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^8 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{10w_3}{6} + \frac{2w_3}{12} \right)$$

Aplicando la ecuación de Lagrange a los nudos interiores:

Nudo 1: (misma situación que para la placa apoyada)

$$\nabla^2 w_1 = \frac{1}{9h^4} (105w_1 - 144w_2 + 16w_3)$$

Nudo 2:

$$\nabla^2 w_2 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{-156}{36} w_1 + \frac{488}{36} w_2 - \frac{232}{36} w_3 \right) = \frac{1}{9h^4} (-39w_1 + 122w_2 - 58w_3)$$

Nudo 3:

$$\nabla^2 w_3 = \frac{1}{9h^4} (-8w_1 - 64w_2 + 148w_3)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\left. \begin{aligned} 105w_1 - 144w_2 + 16w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \\ -39w_1 + 122w_2 - 58w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \\ -8w_1 - 64w_2 + 148w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo se obtiene:

$$0,233 \frac{P}{D} h^4 = 0,42w_1$$

$$w_1 = 0,55 \frac{P}{D} h^4 = 0,55 \frac{P}{D} 0,25^4 L^4 = 2,15 \times 10^{-3} \frac{P}{D} L^4$$

Sabemos que la placa de acero es de espesor 0,1 m, y por tanto:

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \times (0,1 \text{ m})^3}{12(1 - 0,3^2)} = 18315 \text{ kNm}$$

Para una carga de 100 kN sobre una placa de 1 metro de lado:

$$w_1 = 1,17 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,0012 \text{ cm}$$

Comparando este resultado con un cálculo por elementos finitos con el programa SAP 2000 [4] se obtienen valores cercanos aunque con cierta desviación ($w_1 = 0,00072 \text{ cm}$), según se indica en la figura 7, seguramente inducido por las condiciones locales de empotramiento que conducen a una situación de carga localizada en esos apoyos (carga por momentos aplicados) que aconsejan un mallado más fino al menos en las zonas de apoyos.

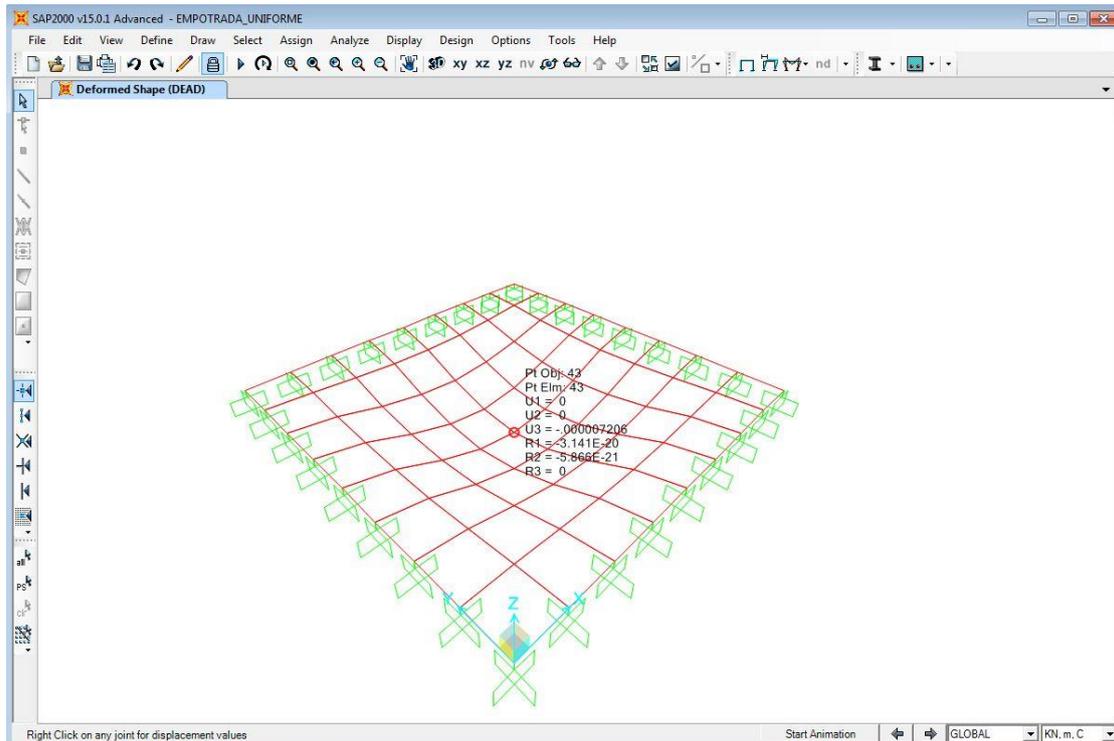


Figura 7: Modelo realizado con SAP 2000 para placa empotrada con carga uniforme.

4.4. Aplicación para la placa empotrada en sus cuatro lados con carga uniforme

El caso de carga puntual es el llevado al límite cuando el recinto en el que se aplica la carga uniforme se hace infinitesimal en teoría, muy pequeño en la práctica.

Evidentemente se puede aplicar tanto a placa empotrada como apoyada, o con cualquier otro tipo de condiciones de contorno. Además los principios para aplicar el cálculo numérico a carga puntual sobre una placa y dispuesta en cualquier punto interior de la placa son semejantes al de la carga en el centro, complicando únicamente su resolución automática al deshacerse de la simetría.

Como ya se ha comentado para la placa empotrada, en el caso de placa con carga puntual es a priori previsible la necesidad de una malla más fina o al menos refinar la malla en la zona de aplicación de la carga. Este hecho, como se comentará más adelante, complica la resolución numérica pero es posible superar las dificultades gracias a la evolución al método de las diferencias finitas generalizado.

La malla elegida marca la bondad de la aproximación, sobre todo considerando el carácter localizado de la carga puntual central, por tanto haremos a título ilustrativo la primera aproximación a la carga puntual para la malla ya propuesta en la figura 5. Así tenemos que la carga puntual se encuentra, para dicha discretización, repartida en los $0,5 \times 0,5 \text{ m}^2$ centrales, evidentemente la generalización a mallas más finas complica la resolución de las ecuaciones pero conceptualmente es igual.

Así, las ecuaciones se obtienen directamente del caso de la placa apoyada ya estudiada para el caso de carga uniforme. Se tiene:

$$\left. \begin{aligned} 105w_1 - 144w_2 + 16w_3 &= 9\frac{P}{D}h^4 \\ -39w_1 + 113w_2 - 66w_3 &= 9\frac{P/2}{D}h^4 \\ -8w_1 - 72w_2 + 128,5w_3 &= 9\frac{P/4}{D}h^4 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo se obtiene:

$$0,16\frac{P}{D}h^4 = 0,252w_1$$

$$w_1 = 0,64\frac{P}{D}h^4 = 0,64\frac{P}{D}0,25^4L^4 = 2,5 \times 10^{-3}\frac{P}{D}L^4$$

Sabemos que la placa de acero es de espesor 0,1 m, y por tanto:

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \times (0,1 \text{ m})^3}{12(1-0,3^2)} = 18315 \text{ kNm}$$

Para una carga de 100 kN/m² sobre una placa de 1 metro de lado:

$$w_1 = 1,37 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,0014 \text{ cm}$$

Comparando este resultado con un cálculo por elementos finitos con el programa SAP 2000 [4] para una carga puntual en el centro de la placa de 25 kN (100 kN/m² × 0,5 m × 0,5 m = 25 kN) se obtienen valores parecidos ($w_1 = 0,0016 \text{ cm}$) según muestra el gráfico de la figura 8.

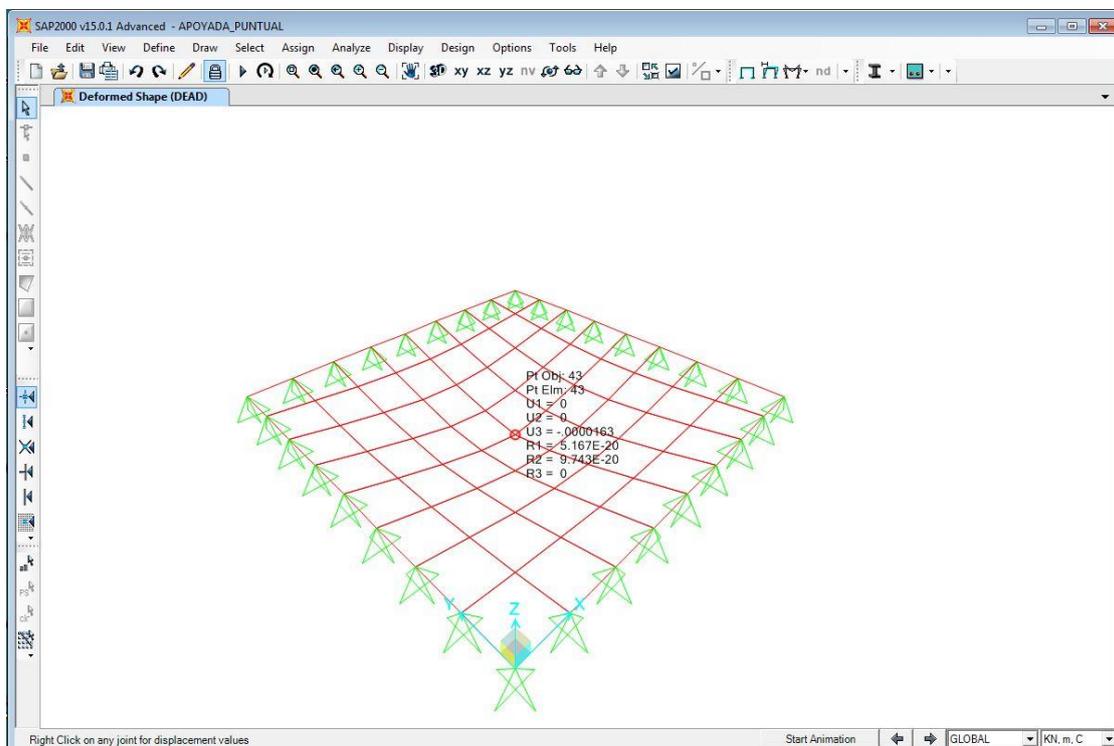


Figura 8: Modelo realizado con SAP 2000 para placa apoyada con carga puntual en el centro.

La forma de mejorar la precisión con una malla nodal más fina llevaría a un esquema que modelaría igual las zonas donde el comportamiento del método es bueno como en la zona complicada en el entorno de la carga. Por ejemplo un esquema posible sería el mostrado en la figura 9.

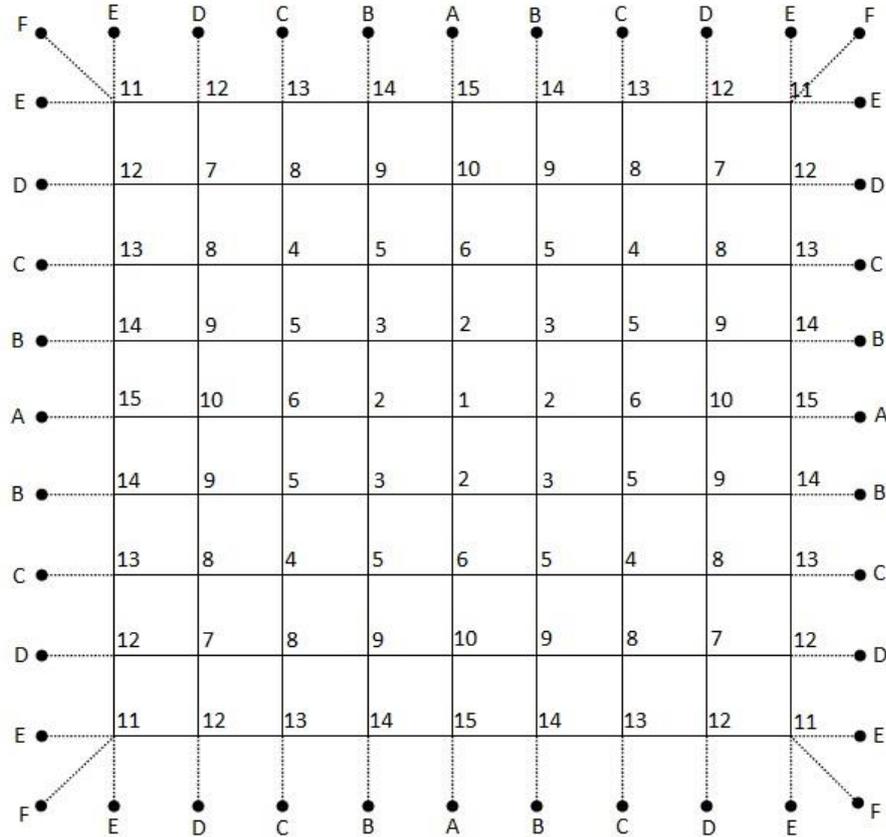


Figura 9: Malla nodal más fina según un esquema clásico regular.

Como hemos visto, si el dominio no es rectangular, las dificultades para incorporar las condiciones de contorno al sistema lineal se incrementan notablemente. De igual forma se producen complicaciones para construir esquemas en diferencias finitas sobre mallas no uniformes. En ambas situaciones se pueden utilizar ideas como la que exponemos a continuación: la aproximación en diferencias finitas definida por una estrella de 5 nodos es:

$$-\frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_{ij}$$

Pues bien, esta condición sobre los puntos en los que la estrella está contenida en el interior supone que en los puntos en los que al menos un nodo caiga fuera del dominio no regular definido es necesario modificar la forma de la ecuación según la distancia de los nodos de la estrella real que se puede formar. Así, se aproxima el valor de la función en los puntos P que define el dominio irregular por el polinomio de segundo orden en la variable que corresponda (por ejemplo x) alrededor del nodo ($i=N, j=M$) como se expresa en las siguientes relaciones:

$$u(P) = u(N, M) + \alpha h \frac{\partial u}{\partial x}(N, M) + \frac{(\alpha h)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) + O(h^3)$$

Donde α representa la distancia de P a $(i=N, j=M)$ dividida por h , y:

$$u(N-1, M) = u(N, M) - h \frac{\partial u}{\partial x}(N, M) + \frac{(h)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) + O(h^3)$$

Si se desprecian los términos de orden superior, se multiplica la segunda ecuación por α y se suman ambas ecuaciones, se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) = \frac{\alpha U_{n-1,m} - (1 + \alpha)U_{n,m} + u(P)}{\frac{\alpha(1 + \alpha)}{2} h^2} + O(h)$$

A la vista de esta aproximación, se puede plantear la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$-\frac{\alpha U_{n-1,m} - (1 + \alpha)U_{n,m} + u(P)}{\frac{\alpha(1 + \alpha)}{2} h^2} - \frac{U_{n,m+1} - 2U_{n,m} + U_{n,m-1}}{h^2}$$

Es de notar la caída en una unidad del orden de la aproximación, el orden de la aproximación de la derivada segunda es 1, mientras que si $\alpha = 1$, el orden sube a 2.

Cuando se compara la versión clásica del método de diferencias finitas en mallas regulares con el método de los elementos finitos, se comprueba que éste último es más efectivo en el tratamiento de las condiciones de contorno, especialmente en dominios irregulares y cuando se producen condensaciones locales de nodos. Si se pudiera usar una malla arbitraria de diferencias finitas se vencerían estas dificultades, manteniendo las ventajas del método de las diferencias finitas. Una evolución del método de las diferencias finitas ha dado lugar al desarrollo del método de las diferencias finitas generalizadas, el cual se puede aplicar sobre mallas irregulares de nodos según se indica en el apartado 3 y permite resolver las dificultades asociadas a los esquemas clásicos.

5. Conclusiones

El artículo pone de manifiesto las siguientes conclusiones:

1. Los resultados obtenidos mediante la simulación numérica por el método de las diferencias finitas clásicas son correctos al ser comparados con otros métodos que implementan algunos programas de cálculo (en particular se ha utilizado el SAP 2000) en el cálculo de elementos estructurales.
2. En el caso de cargas localizadas ya sea en el interior o contornos de elementos estructurales es necesario refinar el mallado en torno a las cargas concentradas.
3. Mediante el método de diferencias finitas generalizadas se podría resolver la aplicación de los problemas con geometrías más estrictas o necesidades locales de remallado. Se propone dicho método como línea de investigación aplicable al tipo de problemas expuestos. La resolución para el caso propuesto es metódica e inmediata.

4. Queda expuesta la posibilidad y necesidad de seguir usando los métodos de las diferencias finitas para la resolución numérica de ecuaciones que representan problemas de ingeniería donde tradicionalmente ha sido empleado el método de los elementos finitos. El uso de los esquemas de diferencias finitas permite un mejor análisis del problema matemático planteado, al entrar directamente en las ecuaciones matemáticas del problema, abordando con éxito los problemas bien estudiados de existencia, unicidad, convergencia, inestabilidad o bloqueo de la solución.

Referencias

- [1] BENITO, Juan José; UREÑA, Francisco; GAVETE, Luis, *The Generalized Finite Difference Method*, pp. 251-293, Applied Mathematical Modeling Research, 2007.
- [2] TIMOSHENKO, Stephen; GOODIER James Norman, *Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill, New York, 1987.
- [3] TORROJA Eduardo, *Razón y ser de los tipos estructurales*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2004.
- [4] Manual SAP 2000, *Advanced 9.0.3 Structural Analysis Program*, Computer and Structures, Berkeley, 2004.

Sobre el autor:

Nombre: Rubén Galindo Aires

Correo Electrónico: ragalindoa@hotmail.com

Institución: Departamento de Ingeniería y Morfología del Terreno de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.