

JULIO REY PASTOR E LA MATEMATICA ITALIANA: ANALISI DI ALCUNE CONNESSIONI

Giorgio Israel

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

La creazione di una scuola scientifica di rilievo internazionale, dopo un periodo di crisi e di isolamento, è una impresa estremamente complessa e difficile per la comunità scientifica di una nazione. Allo stato di crisi si accompagna invariabilmente una condizione di più o meno marcata emarginazione dalle principali correnti della ricerca scientifica mondiale: è quindi inevitabile (ed entro certi limiti necessario) che si sviluppi il tentativo di stabilire un legame con queste correnti. E' inevitabile, necessario, ma non sufficiente.

Sono stato molto colpito dalla lucidità con cui questo problema fu colto in un discorso del 1915 da Julio Rey Pastor, nel quale si chiese quale dovesse essere l'obiettivo dell'Associazione spagnola per il progresso delle Scienze: "...el progreso de España en la ciencias, o el progreso de las ciencias en España?"¹. E, "enunciando de otro modo: podemos colaborar ya en la Ciencia universal, o debemos todavía limitarnos a asimilarla?"².

La consapevolezza della complessità dei problemi che comporta lo sviluppo di una scienza nazionale dopo un periodo più o meno lungo di crisi –insistiamo su questo punto– è tutt'altro che ovvia e scontata. Illuminante al riguardo è quanto osserva Jean Dieudonné in merito alla formazione del gruppo Bourbaki: e le osservazioni di Dieudonné sono tanto più significati-

1. J. Rey Pastor, "Valoración de la cultura matemática española". Discurso inaugural de la sección de Matemáticas del Congreso de Valladolid celebrado por la Asociación española para el progreso de las Ciencias, sta in E. y E. García Camarero, *La polémica de la Ciencia Española*, Alianza Editorial, Madrid, 1970, pp. 554.

2. Ibidem.

ve, se rapportate al problema della nascita di una valente scuola matematica in Spagna, perché la crisi attraversata dalla matematica francese dopo la Prima Guerra Mondiale, giungeva dopo un lunghissimo periodo di straordinario primato e di grandissimo prestigio a livello mondiale. Osserva dunque Dieudonné³ che la matematica francese si era chiusa nella sua tradizione, ristretta allo studio della teoria delle funzioni, senza percepire le novità che si stavano sviluppando all'estero, soprattutto in Germania. La sola apertura verso il mondo esterno era il seminario di Hadamard, che era anche una notevole occasione di incontrare matematici stranieri. Ma dopo parecchi anni e dopo che alcuni giovani matematici del Seminario (A. Weil, C. Chevalley) si erano recati all'estero, ci si rese conto che se si fosse continuato su quella strada limitata si sarebbe finiti in un vicolo cieco: "avvertimmo in tempo il fermento di idee che si stava sviluppando all'esterno, e molti di noi ebbero la fortuna di andare a vedere ed apprendere di prima mano quegli sviluppi che si stavano producendo fuori dalle nostre mura"⁴. Il seminario Julia, succeduto a quello di Hadamard, percepì di più le nuove esigenze, ponendo al centro della sua attività anziché una esigenza di aggiornamento, l'idea di "studiare in modo più sistematico le grandi nuove idee che provenivano da tutte le direzioni"⁵. E di qui maturò l'idea di "redigere un lavoro completo che (...) avrebbe dovuto comprendere le idee principali della matematica moderna"⁶, idea che fu all'origine della importante rinascita della matematica francese, che tutti conosciamo.

Questo caso ci insegna quanto sia importante l'informazione circa gli sviluppi della ricerca nei paesi 'trainanti', ma in particolare l'importanza di andare a vedere e ad apprendere *in loco*: è difatti questa la via migliore e più radicale per aggredire alle radici quelle forme di chiusura provinciale che si accompagnano sistematicamente alla fase di decadenza o di crisi⁷. Ma ci insegna soprattutto come l'obiettivo primario sia quello della formazione di una scuola scientifica *autonoma*, fondata su un organico programma di ricerca. In definitiva, due appaiono essere le condizioni per reagire validamente ad uno stato di difficoltà di una comunità scientifica nazionale: il collegamento veramente aperto e diremmo quasi, estroverso, con i filoni vitali della ricerca scientifica internazionale, e la maturazione di una capacità di sviluppo autonomo.

3. J. Dieudonné, "The Work of Nicholas Bourbaki", *American Mathematical Monthly*, 1970, pp. 134-145.

4. *Ibidem*.

5. *Ibidem*.

6. *Ibidem*.

7. Tipico al riguardo è il processo di formazione della moderna matematica italiana: non furono tanto i viaggi di Steiner, Jacobi, Dirichlet e Borchhardt (dal 1843 al 1944) a influenzare lo sviluppo della matematica italiana, quanto il famoso viaggio in Germania nel 1858 di Betti, Brioschi e Casorati.

Il discorso di Rey Pastor del 1915, già citato⁸, appare tutto percorso da un elevato grado di consapevolezza del genere ed è quindi la migliore testimonianza dell'importanza che la figura di questo matematico ha per la storia della matematica (e della scienza) spagnola e per la sua rinascita.

E' proprio sul terreno di questi temi, di cui abbiamo fin qui parlato, che si manifestano i più interessanti contatti fra Julio Rey Pastor e il mondo della matematica italiana: dei rapporti che riguardano gli aspetti cosiddetti 'interni' della matematica, parleremo più in là.

Di Rey Pastor parla diffusamente lo storico della matematica italiana Gino Loria in due articoli su "Le matematiche in Spagna", pubblicati nel 1931⁹. Il primo di questi due articoli traccia un panorama della storia della matematica spagnola che appare quasi un riassunto del famoso discorso tenuto ad Oviedo nel 1913 da Rey Pastor. Ricorda difatti il Loria la delusione suscitata dall' "eruditissimo discorso sopra la Cultura Científica de España en el siglo XVI, pronunciato da F.A. Vallin nel momento in cui venne ad occupare il seggio conferitogli dalla R. Accademia di Madrid"¹⁰: "Siffatta delusione traspare in un articolo di G. Eneström¹¹, il quale, notando avere il Vallin offerto piuttosto notizie bibliografiche che dati scientifici, con pieno fondamento augurava che degli scritti inediti —di cui, con tanto patriottico calore, egli vantava la cospicua importanza— venisse fatto un esame obbiettivo da persona che disponesse della profonda cultura matematica che al Vallin faceva difetto."¹² E prosegue Loria: "Tale voto rimase inesaudito per circa vent'anni; ma nel 1913 un giovane di grandi speranze, J. Rey Pastor, salendo ad una cattedra di matematica dell'Università di Oviedo, scelse appunto come tema della sua lezione inaugurale, *Los matemáticos españoles del siglo XVI*,¹³ e ispirandosi all'antica aurea massima "neminem laedere et suum cuique tribuere", fece una disamina spassionata dell'opera matematica di quel secolo giungendo a conclusioni diametralmente opposte a quelle del Vallin e di altri panegiristi ad oltranza (...)"¹⁴. Non ci soffermiamo sul resto dell'articolo che, come si è detto, costituisce un riassunto critico del discorso di Rey Pastor.

8. V. nota 1.

9. G. Loria, "Le matematiche in Spagna ieri e oggi" (in due parti), *Scientia*, XXV, 1931, pp. 353-359, 441-449.

10. *Ibidem*.

11. G. Eneström, "Quelques remarques sur l'histoire des mathématiques en Espagne au XVI siècle", *Bibliotheca Mathematica*, Nouv. Série, VIII, 1894, pp. 33-36.

12. Op. cit. in nota 9.

13. J. Rey Pastor, "Los matemáticos españoles del siglo XVI", Discorso leído en la solemne apertura del Curso académico de 1913 a 1914 del Doctor D. Julio Rey Pastor, Universidad de Oviedo, 1913.

14. Op. cit. in nota 9.

Nel secondo dei due articoli citati, Loria si sofferma diffusamente su quella che egli chiama la “*triade dei seminatori*” della matematica spagnola e cioè José Echegaray, Eduardo Torroja e Z. García de Galdeano. Parla poi di Rey Pastor per ricordare che egli, “laureatosi nel 1909 con una dissertazione intitolata *Correspondencias superiores de formas elementales con aplicación al estudio de las figuras que engendran*, come vedemmo, esordì nell’arringo professorale con un discorso improntato a quei sensi di libero esame che debbono presiedere all’opera di chiunque intenda far opera di storico veritiero, non di cieco panegirista.”¹⁵ E prosegue: “Per mostrare (...) quanto vasto sia il campo da lui abbracciato basti dire che il Rey Pastor, dopo di aver esposti i concetti posti di recente a base dell’analisi, fa altrettanto riguardo alla geometria, notando le conseguenti modificazioni subite dal sistema euclideo. Si volge quindi alla teoria delle funzioni di variabili reali, arrestandosi sulle recenti estensioni del concetto d’integrale definito, sugli studi sopra le serie divergenti e sulla creazione della teoria delle funzioni con infinite variabili e delle equazioni integrali. Passa poi alla teoria delle funzioni di variabili complesse, facendone poi conoscere i principi secondo Cauchy, Riemann e Weierstrass e le applicazioni alle più cospicue funzioni particolari. Da ultimo egli descrive il nuovo assetto assunto da gran parte delle teorie matematiche per effetto della nozione di “gruppo” e conclude affermando che le idee direttrici di tutta la ricerca matematica moderna sono quelle di “insieme”, “funzione”, “gruppo”. Impossibile sarebbe il far conoscere con maggior chiarezza e con arte più raffinata un complesso così vario e importante di idee e di metodi, onde il Rey Pastor può andare orgoglioso di avere per primo dimostrato la possibilità di popolarizzare la quintessenza della matematica superiore”.¹⁶

Particolare importanza il Loria attribuisce al trattato di Rey Pastor sulla geometria proiettiva, *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*¹⁷ del quale osserva trattarsi di un volume che “ha diritto di ottenere un posto eminente nella biblioteca di qualunque geometra; è ad un tempo stesso un lavoro originale, giacché, mentre coordina una congerie di risultati già noti, li presenta sotto nuova forma e vi arreca complementi degni di nota.”¹⁸

Ci sembra molto importante menzionare quanto osserva Loria circa il punto di vista di Rey Pastor concernente la geometria proiettiva: “Egli dichiara –di far piena adesione alla massima cayleyana “Projective geometry is all geometry”: è un principio teoricamente indiscutibile, ma che, applicato con eccessivo rigore, fece abbandonare (per esempio in Italia) alcuni campi di studio (la geometria metrica) meritevoli di miglior sorte e che indussero il Rey Pastor ad arrestarsi a porre sotto forma proiettiva certe proposizioni

15. Ibidem.

16. Ibidem.

17. J. Rey Pastor, *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*, Madrid, 1916.

18. Op. cit. in nota 9.

dell'ordinaria geometria, le quali da tale metamorfosi uscirono piuttosto malconce. Tale lieve menda diminuisce di ben poco i pregi indiscutibili e cospicui dell'opera in discorso, ove, si può dire, tutto il materiale geometrico raccolto ed elaborato in quest'ultimo mezzo secolo si presenta illuminato da considerazioni originali, stabilito con nuove argomentazioni ed esposto sotto forma così attraente che può a ragione chiamarsi affascinante."¹⁹

Questa osservazione è assai interessante perché accenna ad una difficoltà attraversata dalla matematica italiana (dalla geometria in particolare) e che potremmo chiamare quasi una 'difficoltà d'origine', poi superata non senza costi e difficoltà. E poiché ci sembra, e tenteremo di mostrare poi, che il Rey Pastor, almeno in una fase importante della sua produzione di matematico sia stato largamente influenzato dalle concezioni della scuola di geometria italiana, ci sembra utile aprire una digressione su questo tema.

Com'è noto, prima dell'Unità d'Italia, la matematica italiana attraversava una fase di stagnazione: le ricerche matematiche si concentravano soprattutto sulla geometria analitica ed elementare, lo studio della quale era però strettamente collegato alle ricerche in astronomia ed in meccanica; sull'analisi, anch'essa largamente dipendente dalle problematiche della fisica; e sull'algebra intesa, in modo assai ristretto, come teoria delle equazioni algebriche. Fu solo dopo il 1858, e cioè dopo il famoso viaggio di Betti, Brioschi e Casorati in Germania, che in Italia si affacciano nuove ed originali tematiche, ispirate dalla scuola di Riemann e rielaborate in modo creativo. L'influenza di Riemann nella formazione di una grande scuola di matematici in Italia è sottolineata da Vito Volterra in un famoso discorso del 1900²⁰: è proprio nell'individuazione di questa comune matrice che Volterra trova una ragione di fondamentale unità per quelli che erano ormai diventati i rami più fiorenti della matematica italiana, e cioè l'analisi e la geometria. Rami che si erano tuttavia separati e spesso apparivano in conflitto sul piano dei metodi e delle concezioni. Difatti, mentre l'analisi si era sviluppata sotto l'insegna del rigore, ad opera di Ulisse Dini ed aveva trovato un fertile legame ed una fonte inesauribile di ispirazione nella fisica-matematica, seguendo il punto di vista 'applicativo' di Enrico Betti, la geometria, pur ispirata ad una visione 'intuizionista' derivante dall'influsso della scuola di Riemann, aveva rifiutato lo stretto legame con l'analisi, tipico di questa scuola, per accedere al punto di vista 'purista' ispirato da Von Staudt.

Fu grande merito di Luigi Cremona di aver creato una grande scuola di geometria in Italia: ciò egli fece però difendendo ad oltranza ed anzi estremizzando il punto di vista 'purista'. Secondo questo punto di vista occorre procedere nelle ricerche geometriche mediante una rigorosa separazione

19. Ibidem.

20. V. Volterra, "Betti, Brioschi, Casorati. Trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'Analyse", *Compte-résumé du 2^e Congrès Int. des Math., Paris 1900*, Paris, Gauthier-Villars, pp. 43-57.

delle proprietà di 'natura' geometrica da quelle di 'natura' analitica. La Geometria 'pura' deve intendersi come una *trattazione logico-intuitiva* senza sussidi algebrici o analitici. E' ben vero che Cremona fu piuttosto un eclettico nei metodi e ricorse spesso all'uso di metodi algebrici: questi venivano però sempre subordinati ad un procedimento dimostrativo *sintetico*, mentre nessuna concessione veniva fatta all'approccio analitico il quale avrebbe il torto di 'mascherare' il *fatto geometrico* che pretenderebbe descrivere.

In un articolo pubblicato in lingua spagnola, Enriques ricorda i pregi e i difetti del punto di vista purista. "Parecía –egli osserva– como si al géometra se abriese un mundo nuevo, en el que bastaba abrir la mano para recoger abundante cosecha de descubrimientos, y donde la imaginación, en triunfal carrera, abría siempre nuevas puertas encantadas, como en un palacio construido por hadas. (...) Apenas los géometras vislumbraron este mundo encantado, el anuncio de la tierra prometida atrajo rápidamente a los hombres maravillados. Por todas partes se multiplicaron los géometras. Nuestro país, que había tenido a Cremona, no quedó ciertamente rezagado; aquella fué la época en que, según decía graciosamente un compañero y maestro mío, bastaba sembrar una alubia para ver nacer un géometra."²¹ Ma la crisi fu abbastanza pronta: "Mas muy pronto, fué denunciada abiertamente la ilusión de la facilidad en la investigación. Un ingenioso matemático italiano calificó ciertas orientaciones como *Tictac-geometría*, frase pintoresca que tuvo gran éxito. El punto débil de aquella Geometría artificiosa, que multiplicaba los entes, dando rienda suelta a una imaginación desbordada (y ni siquiera tan rica como a primera vista podría creerse), fué puesto de manifiesto por Segre, en su artículo *Su alcuni indirizzi nella investigación geometrica*", publicado en la Rivista Matematica de Turín. (...) El defecto de la orientación de los estudios geométricos, a través de prudentes reservas, había sido advertido por Segre en el citado artículo; consistía, señaladamente en que el problema venía subordinado al método de resolución, o creado directamente por el método; los medios, pues, eran antepuestos a los fines."²²

Qual'è la risposta che Enriques ritiene che la scuola geometrica italiana del Novecento (di cui egli stesso è uno dei massimi esponenti) abbia dato alla crisi del purismo, al fine di far uscire le ricerche geometriche dal vicolo cieco in cui il purismo le aveva cacciate? Si tratta di non dimenticare certo che la scienza matematica non può essere regolata da limitazioni a priori, che essa si muove con libertà ("del mismo modo que el arte"), ma neppure può essere lasciata all'arbitrio individuale, come accade inevitabilmente quando si antepongono i *metodi* ai *problemi*. "Desde este punto de vista –osserva Enriques– la crítica frecuentemente dirigida contra la Geometría de hace treinta

21. F. Enriques, "La evolución del concepto de la geometría y la escuela italiana durante los últimos cincuenta años", *Revista Matemática Hispano-Americana*, II, 1920, pp. 1-17. Cit. a p. 3.

22. *Ibidem*, p. 4.

o cuarenta años, aparece a nuestra vista suficientemente justificada, puesto que aquella Geometría parecía completamente absorta en la contemplación de los objetos formados por ella misma, sin conexión visible con los *grandes problemas*". Ci sembra interessante rilevare come la critica di Enriques e la proposta positiva che egli avanza di ricollocare al centro i *grandi problemi* richiami il punto di vista analogo di Hilbert e la critica da lui mossa agli eccessi dell'assiomatica.²⁴ E' da rilevare inoltre che la critica di Enriques coinvolge anche gli eccessi rigoristi della scuola di analisi italiana di fine Ottocento, con trasparente allusione al punto di vista di Ulisse Dini: "Por una singular coincidencia, también la orientación, en cierto modo contrapuesta al purismo geométrico, o sea al Análisis aritmetizante, sufría la misma suerte, apartándose del estudio de *la realidad matemática*, históricamente definida, para proseguir más allá de las necesidades de la exigencia crítica, el estudio de la *funciones no razonables (funzioni disonesti)* que no admiten derivada. Y la generalidad con que pretende avalorar este campo de investigaciones, respecto al de las *funciones razonables, (onesti)*, objeto del cálculo infinitesimal ordinario, no modifica el juicio, puesto que el progreso de la ciencia no consiste en poseer verdades más generales en un sentido cualquiera, que a veces se reducen a vacías abstracciones, sino en la posesión de verdades de significado más rico y fecundo, a las cuales se llega con frecuencia a través de la consideración de casos particulares característicos."²⁵

Merito della scuola italiana del nostro secolo fu quello di avvertire che si stava realizzando una evoluzione del concetto di geometria che tendeva a ricollegarla ai problemi classici dell'analisi e quindi a progredire lungo la via dell'unificazione della matematica: "Tal evolución fue obra de numerosos científicos y pensadores, que en diversos países, en formas y aun tiempos distintos, trabajaron para transformar la herencia del pensamiento geométrico."²⁶ E' assai importante rilevare per il nostro tema, che, nel sottolineare il ruolo fondamentale della scuola geometrica italiana entro tale tendenza Enriques richiama l'analogia di condizioni fra l'Italia e la Spagna: "La escuela italiana presenta en este punto un interés particular (que, por la analogía de condiciones, puede tener también valor en España), por la circunstancia de que la Geometría ha florecido en Italia más ampliamente, y por ello la transformación de la orientación geométrica se ha desenvuelto más lentamente, al extremo que se puede dudar que el desarrollo haya alcanzado todavía su término natural. De todos modos, la escuela de los geómetras italianos ha conseguido aportar valiosa contribución a algunos grandes proble-

23. Ibidem, p. 4-5.

24. Si veda in merito: G. Israel, "Rigore ed assiomatica nella matematica moderna", *Scienza e Storia, analisi critica e problemi attuali*, Editori Riuniti, Roma, 1980; pp. 427-450.

25. Op. cit. nella nota (21), p. 5.

26. Ibidem, p. 5.

mas, al menos en el campo de la teoría de las ecuaciones y de las funciones algebraicas; y estos éxitos han llamado la atención de eminentes matemáticos extranjeros (como Poincaré, Picard, Painlevé) que se han encontrado en el mismo terreno de investigación. Es legítimo, por tanto, afirmar que nuestra escuela, a diferencia de otras, que en otros países han seguido por el viejo camino del purismo, se ha incorporado al gran tronco de la tradición matemática, y de aquí que las reflexiones que un geómetra italiano puede hacer hoy en torno al concepto de la Geometría quizás tengan por esta parte algún interés.”²⁷

Ma qual'è il terreno sul quale Enriques e la scuola italiana, almeno a suo dire, hanno validamente indirizzato le ricerche geometriche, cercando al contempo di superare la contrapposizione artificiosa²⁸ fra analisi e geometria? Essa è caratterizzata fundamentalmente dall'applicazione sistematica del principio formulato tanti anni prima da Galois secondo cui l'avvenire della matematica si sarebbe fondato su una progressiva sostituzione dei calcoli con i ragionamenti; e quindi dall'uso sistematico di una analisi di tipo *qualitativo*. E' questo il terreno sul quale, secondo Enriques, è possibile stabilire una valida sintesi fra pensiero geometrico e pensiero analitico. E – punto assai importante, come vedremo – un ruolo cruciale in questo sviluppo è attribuito da Enriques al Programma di Erlangen di Klein. Torna così il tema già da noi accennato dell'influsso avuto dalla scuola di Riemann e Klein nella formazione della matematica italiana. Seguiamo ancora le parole di Enriques, riferendoci al già citato articolo:

“...Geometría no es, en realidad, más que un desarrollo particular del *Análisis cualitativo*, que haciendo suyo propio el programa de “sustituir los pensamientos a los cálculos” ha renovado y fecundado todos los grandes problemas de la Matemática durante el siglo XIX. De aquí que la evolución del concepto de la Geometría en los últimos cincuenta años ha conducido simplemente al resultado de fundir –en la conciencia del geómetra– la orientación geométrica con la orientación sintética y cualitativa del Análisis, entendido en la acepción más general.”²⁹

Un esempio di cosa sia il punto di vista qualitativo enriquesiano è dato dalla teoria delle equazioni algebriche, nella quale non ha soltanto interesse il punto di vista del calcolo numerico delle radici, ma anche lo studio della struttura dell'equazione, la quale si rivela precisamente essere di natura essenzialmente geometrica. E tale sostanza è messa in luce da un lato dalla teoria di Galois e dall'altro dall'approccio di Klein: “En esta doctrina (di Galois), el geómetra encuentra un objeto de estudio que, por el carácter sintético y por la forma de intuición abstracta, no difiere de los de su actividad habitual, y, por otra parte, la interpretación más obvia de los grupos de ope-

27. Ibidem, p 5-6.

28. Di tale conflittualità parla anche Volterra nello scritto cit. in nota 20 ed in altri scritti.

29. Op. cit. nella nota 21, p. 6-7.

raciones le lleva directamente al campo propio de la Geometría. Baste recordar aquí las cuestiones relacionadas con los grupos de sustitución lineales sobre una variable compleja, que Klein ha ilustrado con los grupos de rotaciones de los poliedros regulares (...).³⁰ Ancora più evidente è la situazione della teoria delle equazioni algebriche a più incognite, la quale ha un significato geometrico assolutamente evidente. “Por esto –prosegue Enriques– los géómetras modernos se inclinan cada vez más a identificar la propia orientación de sus estudios con la fundada por Riemann, el pensador que parece haber ejercido influencia más honda en la Matemática del siglo XIX.”³¹

In verità il punto di vista qualitativo propugnato da Enriques non lo conduce ad una sintesi armoniosa fra punto di vista geometrico e punto di vista analitico, ma ad una nuova affermazione, sia pure su un terreno diverso, della superiorità del pensiero geometrico su quello analitico. Potremmo dire che mentre, in Italia, la contrapposizione fra analisi e geometria era stata una contrapposizione fra un tipo di analisi aritmetizzante (per usare le parole dello stesso Enriques) e una geometria di tipo purista, il merito della nuova scuola geometrica italiana consiste nel superare questa sterile contrapposizione fra il punto di vista *analitico-quantitativo* (tipico della analisi cresciuta a stretto contatto con la fisica matematica classica) e il punto di vista *sintetico-qualitativo*, tipico del pensiero geometrico da Riemann in poi e rafforzato dalla visione sintetica contenuta nel programma di Klein. Pertanto, Enriques non si limita a dire “que la actividad del géómetra puede hoy desarrollarse y, efectivamente, se desarrolla, en cualquier campo del Análisis matemático; que, en una palabra, *no existe diversidad de objetos* que separe el Análisis y la Geometría, sino una diferencia de *espíritu* (...)”³². Egli, passo a passo, si spinge a riassorbire tutto il campo dell’analisi entro il dominio delle ricerche geometriche: ad esempio “toda la teoría de la integración de las ecuaciones diferenciales ha venido a caer en el campo de la actividad geométrica, desde el momento en que Sophus Lie las ha basado sobre el concepto de los grupos de transformaciones.”³³

Viene così riproposto il primato del pensiero geometrico su quello analitico, anche se questa proposizione viene negata a parole, o meglio mascherata sotto la veste dell’affermazione del primato dell’analisi qualitativa. La via per realizzare questa operazione consiste nel portare un attacco frontale alla tradizione quantitativa della fisica matematica classica impersonata dalla scuola francese da Fourier e Laplace a Poincaré. Il caposaldo di tale tradizione era –ricorda Enriques– l’idea che, poiché le leggi della Fisica avevano trovato espressione in equazioni differenziali, compito dell’analisi era proprio quello di integrare queste equazioni differenziali. “Pero –osserva Enri-

30. Ibidem, p. 9.

31. Ibidem, p. 9.

32. Ibidem, p. 14-15.

ques— basta un pequeño conocimiento de la historia de la Física teórica para reconocer que los grandes progresos de la ciencia jamás han estado en consonancia con este programa.” E prosegue: “me parece muy otro el verdadero interés de la Física teórica, que es al fin —como la Geometría— una construcción sintética del pensamiento, con la cual se quiere también abrazar, en una visión unificada, un mundo de relaciones imaginadas, y que, por lo tanto, aparece estérilmente vacía y abstracta, si —dejando aparte toda explicación intuitiva de los fenómenos— se reduce a una pura descripción de sus relaciones cuantitativas.”³⁴ E conclude osservando che “Desde este punto de vista, la mentalidad del geómetra se revela apta para la comprensión y crítica de las teorías físicas, bastante más aún que la mentalidad estrictamente analítica.”³⁵

In conclusione, riteniamo di poter affermare che, pur superando le ristrettezze e la povertà scientifico-culturale del purismo ottocentesco, la visione di Enriques riproponga una nuova forma, più aperta, aggiornata ed intelligente di purismo (identificabile nell'importanza attribuita all'approccio sintetico-qualitativo) e di primato del pensiero geometrico. E ciò viene fatto anche attraverso una reinterpretazione (certo alquanto forzata e restrittiva) del pensiero di Riemann e di Klein.

Non entriamo qui nel tema del ruolo e del peso che questo punto di vista ha avuto nella storia della matematica italiana. Ci chiediamo piuttosto se l'approccio della scuola geometrica italiana abbia avuto degli influssi o delle consonanze con il pensiero matematico di Julio Rey Pastor, al di là della generica affermazione dello stesso Enriques sulle affinità di situazioni e di approcci fra l'ambiente matematico italiano e quello spagnolo.

Un interessante scritto di Rey Pastor, pubblicato su *Scientia* nel 1918 sembra rendere plausibile una risposta in senso affermativo.

Difatti Rey Pastor, nel descrivere il ruolo avuto dalla teoria dei gruppi nella sistematizzazione della geometria, e quindi il ruolo del punto di vista di Klein, esprime un punto di vista che potremmo definire senz'altro enriquesiano. E' ben noto infatti che Enriques si propose di ricondurre i diversi tipi di geometrie, secondo la classificazione di Klein, ad una matrice di carattere fisico individuando il complesso di attività fisio-psicologiche che corrispondevano a ciascuna di esse: più precisamente, ogni geometria, quale è definita da un complesso di trasformazioni gruppali, esprime un complesso ben definito di percezioni fisiologiche: l'individuazione di queste percezioni dimostra la natura essenzialmente empirica della scienza geometrica e quindi il suo ruolo privilegiato (rispetto all'analisi) nel rapporto con le scienze della natura. Ebbene, Rey Pastor adotta una classificazione tipicamente enrique-

33. Ibidem, p. 11-12.

34. Ibidem, p. 16.

35. Ibidem, p. 17.

siana. Dapprima egli osserva: “on peut considerer la géométrie des anciens comme une organisation scientifique de l’étude des perceptions tactiles qui forment notre expérience de tous les jours.”³⁷ Analogamente per quanto riguarda la geometria proiettiva: “Par opposition à la géométrie tactile, métrique, quantitative des Grecs, est née, au commencement du XIX siècle, la géométrie visuelle, dite *projective*. C’est à l’école de Poncelet et Chasles qu’on doit l’introduction systématique de l’idée du point à l’infini, de la droite et du plan à l’infini, du cercle imaginaire à l’infini etc. (...) Il y a d’autres relations géométriques qui subsistent, même si nous projetons les figures d’un point quelconque; ce sont les propriétés dites projectives... Nous appellerons (...) projectives, toutes les relations, tous les nombres, toutes les propriétés qui sont invariants dans le groupe qui a été obtenu en élargissant le groupe fondamental au moyen de toutes les nouvelles opérations dites projections et sections.”³⁷ Si può però ottenere un’altra geometria, la affine, ammettendo la conservazione del parallelismo, ma non della perpendicolarità. La geometria affine così ottenuta è parte della geometria proiettiva: “La géométrie projective renferme non seulement la géométrie d’Euclide et la géométrie affine, comme des cas particuliers, mais encore les géométries non-euclidiennes.”³⁸ E qui Rey Pastor ricorda il motto di Cayley, esclamato con “orgoglio legittimo”: “Projective Geometry is all Geometry”. Abbiamo già ricordato la critica mossa da Loria per l’adesione troppo incondizionata a questo motto che era stato alla radice di non pochi eccessi del purismo e all’italiana. E il Rey Pastor insiste sul tema della centralità della geometria proiettiva (in ciò manifestando forse una visione più tradizionale di quella enriquesiana di cui abbiamo parlato diffusamente) attribuendo a Klein il merito per la sua completa emancipazione della geometria metrica. Il grande sviluppo dovuto a Klein è legato alla possibilità, da lui realizzata, di costruire la geometria proiettiva senza ricorrere agli assiomi del parallelismo. Ma, osserva Rey Pastor, vi sono molte relazioni geometriche assai importanti che non sono proiettive: tali sono quelle che danno luogo all’*Analysis situs*, cui egli accenna molto rapidamente. E sintetizza così il quadro complessivo delle geometrie visto attraverso l’ottica gruppale kleiniana e riferite al contesto di sensazioni fisiologiche che esse esprimono:

“Les figures de la géométrie classique étaient des êtres rigides, manquant de vie; dans toutes les transformations l’on conservait le parallélisme, les angles et le rapport des longueurs. Dans la géométrie affine la rigidité des angles disparaît, mais l’on conserve le parallélisme des droites et des plans. Dans la géométrie projective la rigidité des angles disparaît, aussi bien que le parallélisme, mais la rigidité des droites subsiste encore. Dans la topologie toute rigidité est supprimée.

36. J. Rey Pastor, “Systématisation de la Géométrie au moyen de la Théorie des Groupes”, *Scientia*, XII, 1918, pp. 413-422.

37. *Ibidem*, p. 416.

38. *Ibidem*, p. 417.

Si l'on nous permet de matérialiser l'idée, nous dirons que l'espace de la métrique, aussi bien de l'eulidienne que des non-eulidiennes, est un espace indéformable, cristallisé; celui de la géométrie affine un espace articulé, parallélogrammique; celui de la géométrie projective est un tissu de droites entremêlées; l'espace de la topologie est un espace amorphe, un espace gélatineux.³⁹

Vorremmo concludere con un'altra citazione tratta dallo stesso articolo la quale evidenzia anch'essa in modo esplicito i legami culturali che uniscono la concezione della geometria di Julio Rey Pastor con quelli della scuola geometrica italiana del Novecento:

“Bref, l'idée fondamentale du programme d'Erlangen consistait à mettre en lumière le fond tautologique qui demeurait latent dans les propriétés en apparence les plus éloignées, les moins semblables. En les dépouillant de la foule de transformations occultes qui cachaient cette identité substantielle, on a simplifié la géométrie; en classifiant les propriétés d'après leurs analogies intimes, non formelles, on a systématisé cette science. En donnant un moyen d'obtenir des propriétés de plus en plus compliquées, on a élargi l'horizon géométrique.

C'est ce programme si considérable qui a été brillamment développé et perfectionné par les investigations des mathématiciens de l'Ecole italienne, tels que MM. Segre, Castelnuovo, Enriques, Severi, et bien d'autres, qui ont fait avancer de nos jours la géométrie dans toutes ses branches, en faisant de la science de l'espace un corps de doctrine presque exclusivement italien.”⁴⁰

Occorrerebbe dedicare un'analisi a parte al tema assai interessante dei rapporti diretti avuti da Julio Rey Pastor con i matematici italiani: ciò non può essere fatto nel contesto ristretto di questa esposizione. Non posso però tacere, per concludere l'esposizione, di una lettera che ho rinvenuto nell'archivio Volterra presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, la quale getta luce sull'esistenza di rapporti non soltanto puramente scientifici ma direi umani fra Rey Pastor ed alcuni grandi matematici italiani e illumina un aspetto significativo degli inviti fatti presso la Facoltà di Madrid ad illustri matematici come Vito Volterra e Tullio Levi Civita. Siamo nel 1931 e Volterra, assieme a pochi altri universitari italiani ha rifiutato di prestare il giuramento di fedeltà al regime fascista ed è per questo sottoposto ad una odiosa discriminazione. In una lettera inviata al Prof. Cissotti, e di cui lo stesso Cissotti trasmise una copia per conoscenza a Volterra (la copia da me letta), Rey Pastor scrive:

39. Ibidem, p. 420.

40. Ibidem, p. 422.

“Mi distinguido colega:

Enterado por los telegramas de la prensa de la exclusión de la Universidad de Roma de los eminentes profesores Volterra y Levi Civita por no haber firmado el juramento fascista, le ruego que me confirme o rectifique esta noticia, para gestionar en caso afirmativo de la Universidad de Madrid los fondos necesarios para invitarlos a explicar un curso sobre los temas que ellos mismos propongan.

Agradecido a su pronta contestación, lo saluda muy atentamente
Julio Rey Pastor”.

Nelle lettere che seguono, scambiate fra Rey Pastor si parla degli aspetti organizzativi del viaggio che lo stesso Volterra poi fece.

Una testimonianza questa, con la quale concludiamo questa esposizione, che ci sembra di grande valore morale.