

Revisión sobre modelos de enjambres de partículas con características de vorticidad*

Review About Models of Swarms Particles with Vorticity Features

Recibido: 15 de junio de 2015 - Aceptado: 26 de febrero de 2016

Para citar este artículo: H. Espitia, J. Sofrony «Revisión sobre modelos de enjambres de partículas con características de vorticidad», *Ingenium*, vol. 17, n.º 34, pp. 162-182, mayo. 2016.



Helbert Eduardo Espitia C.**

Jorge Iván Sofrony E.***

Resumen

En este documento se realiza la revisión sobre diferentes modelos de enjambres relacionados con el comportamiento de vorticidad, es decir, movimientos circulares alrededor de un punto llamado vórtice. El comportamiento de vorticidad es característico de los fluidos, motivo por el cual en primer lugar se realiza un acercamiento desde este punto de vista. Por otra parte, sobre los diferentes modelos biológicos se destaca el realizado para el zooplancton *Daphnia* ya que este ser vivo emplea movimientos circulares para buscar alimento y evadir depredadores. Adicional a los modelos del zooplancton *Daphnia* se revisan otros enfoques para tener una visión más amplia de

* Algoritmo de optimización basado en enjambres de partículas con comportamiento de vorticidad (Vortex Particle Swarm Optimization VPSO), desarrollado en conjunto con UNROBOT-Grupo de Plataformas Robóticas, Universidad Nacional de Colombia y Grupo de Modelamiento en Ingeniería de Sistemas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas

** Ph. D. en Ingeniería de Sistemas y Computación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Docente investigador, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. E-mail: heespitiac@udistrital.edu.co

*** Ph. D en Sistemas de Control, Universidad Nacional de Colombia. Docente investigador. Universidad Nacional de Colombia. E-mail: jsufronye@unal.edu.co

los elementos involucrados para la formación de vórtices en modelos de partículas. Finalmente, se observan posibles aplicaciones de estos modelos para la navegación de robots y optimización.

Palabras clave

Enjambres, modelos, optimización, robótica, vórtice.

Abstract

In this paper we review different models of swarms, related with vorticity behavior, i.e. circular motion around a point called vortex. Vorticity behavior is characteristic of the fluids. Some related concepts are presented in the first part of the document. Moreover, on different biological models zooplankton *Daphnia* highlighted because this creature uses circular movements to find food and evade predators. Additional models of zooplankton *Daphnia* other approaches to take a broader view of the elements involved in the appearance of vortices in particle models are reviewed. Finally, possible applications of these models for robot navigation and optimization are reviewed.

Keywords

Models, swarms, optimization, robotics, vortex.

1. Introducción

Modelos que permitan describir el comportamiento de seres vivos como aves, peces, hormigas y bacterias, entre otros organismos, han sido de gran interés en áreas como la biología. En particular, cuando se trata de comportamientos colectivos es de importancia modelar las interacciones presentes entre individuos con el fin de reproducir las conductas de una congregación. La capacidad de rodear obstáculos y evadir depredadores son comportamientos que presentan los enjambres de individuos y que pueden ser empleados en procesos de búsqueda.

Según [1] establecer una relación directa entre los modelos individuales y la descripción correspondiente a poblaciones es un reto común en la ecología teórica. Los enjambres es un ejemplo prominente, donde los efectos colectivos que surgen de las interacciones de los individuos son esenciales para entender la dinámica de población a gran escala y donde ambos niveles de modelado se han empleado a menudo sin llegar a establecer esta conexión.

Por su parte, muchos grupos de animales como los bancos de peces o bandadas de aves, exhiben patrones dinámicos complejos mientras se mueven de manera cohesiva en la misma dirección. Estos patrones se han estudiado mediante el uso de modelos de

partículas autopropulsados, la mayoría de los cuales suponen que el movimiento colectivo se presenta por la alineación de los individuos con sus vecinos, un ejemplo de esto se puede apreciar en [2].

El comportamiento grupal colectivo es un fenómeno natural que se observa en todos los niveles del reino animal, por ejemplo, en colonias bacterianas, enjambres de insectos, cardúmenes de peces y bandadas de pájaros, hasta complejos patrones de población humana. Según [3] la aparición de un comportamiento muy complejo es a menudo una consecuencia de los individuos siguiendo reglas simples sin ningún tipo de coordinación externa.

En los últimos años, se han propuesto muchos modelos de comportamiento grupal que implican interacciones no locales entre las especies. Algunos modelos relacionados también surgen en muchos sistemas físicos, tales como medios granulares, autoensamblaje de nano partículas, la dinámica de vórtices en condensados de Bose-Einstein, la sincronización en los sistemas biológicos y simulaciones de la dinámica molecular de la materia, algunos de estos ejemplos se pueden ver en [3].

Sobre los aspectos importantes de los modelos de enjambres se tiene la posibilidad de describir movimientos de tipo uniforme, caótico y turbulento, características que están relacionadas desde una perspectiva de fluidos al número de Reynolds, el cual varía según el enjambre en consideración. Por ejemplo, en [4] se estudian los casos para enjambres de bacterias y peces los cuales presentan valores diferentes del número de Reynolds debido a sus características físicas.

Uno de los modelos que permite describir movimientos circulares es el propuesto para el zooplancton *Daphnia* ya que su forma de locomoción le ayuda a buscar alimento y evadir depredadores. Sobre los diferentes enfoques de modelado se tiene el de partícula autopropulsada, partículas con depósitos internos de energía, interacciones hidrodinámicas y modelos que incluyen maniobras de evasión.

Sobre aplicaciones de estos conceptos se observan principalmente desarrollos para la navegación de robots móviles y el desarrollo de algoritmos de optimización.

En la figura 1 se puede apreciar una clasificación de las principales características identificadas en esta revisión. Como es de apreciar, los modelos y aplicaciones de enjambres de partículas se pueden encontrar como dos temáticas separadas, sin embargo, con esta revisión es posible identificar las características comunes entre modelos y aplicaciones (principalmente algoritmos).

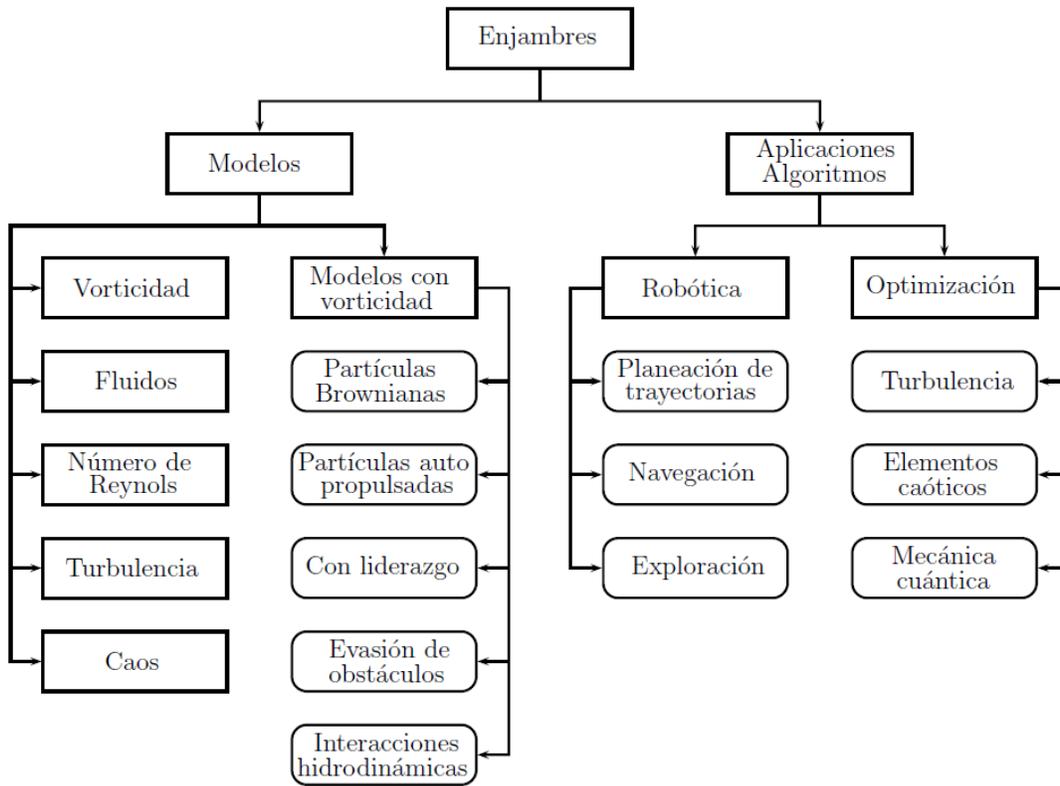


Figura 1: Enjambres de partículas, modelos y aplicaciones

Finalmente en estos trabajos se observa que algunos énfasis de los modelos son simples y lo suficientemente realistas para reproducir las observaciones relacionadas, adicionalmente son útiles para el desarrollo de conceptos permitiendo una mejor comprensión de la complejidad de los sistemas que presentan movimiento coordinado. Por su parte los algoritmos de optimización y de navegación emplean estos conceptos aunque en la mayoría de los casos no se toman directamente de estos modelos.

2. Modelos de enjambres

Un modelo de enjambre consiste en la descripción del movimiento de un conjunto de individuos. En primer lugar se considera un total de N individuos donde la posición de la i -ésima partícula se puede representar mediante la ecuación 1.

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{1}$$

Para aplicaciones y simulaciones a nivel computacional la ecuación 1 se puede aproximar en tiempo mediante la ecuación 2.

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \tag{2}$$

En la ecuación 2, $\vec{r}_i[n+1]$ es el punto siguiente de la posición del individuo i la cual se determina con el punto actual $\vec{r}_i[n]$, la velocidad \vec{v}_i del individuo y Δt el cual corresponde al incremento de tiempo.

De forma general, la relación para la variación de la velocidad respecto al tiempo es:

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = f\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\} \quad (3)$$

En tiempo discreto la velocidad de un individuo se puede calcular como:

$$\vec{v}_i[n+1] = \vec{v}_i[n] + f\{\vec{r}_1[n], \dots, \vec{r}_N[n], \vec{v}_1[n], \dots, \vec{v}_N[n]\} \Delta t \quad (4)$$

Siendo esta última ecuación donde se presentan las diferentes variaciones de los modelos que buscan describir el comportamiento de los enjambres [5].

3. Fluidos y enjambres

La ecuación de Navier Stokes es el fundamento para el análisis dinámico de los fluidos. En casos muy generales esta ecuación suele ser difícil de resolver por lo cual se recurre a un análisis mediante herramientas computacionales de dinámica de fluidos CFD (Computational Fluids Dynamic) [6]. Simulaciones y métodos numéricos para el cálculo del comportamiento turbulento de fluidos se pueden observar en [7], [8]. Por su parte, en [9] y [10] se presenta una aplicación para la solución de la ecuación de Navier Stokes empleando diferencias finitas.

Para realizar la descripción del movimiento de una partícula se tienen los métodos de Euler y Lagrange [11]. El método de Euler consiste en establecer un punto fijo en el espacio y observar todas las partículas que pasan por este punto, por otro lado, el método de Lagrange consiste en seguir la partícula para determinar su posición y velocidad. Como es de apreciar, los métodos basados en partículas tienen el enfoque de Lagrange.

El método numérico empleado para la simulación de fluidos donde se considera que este se encuentra compuesto por partículas es denominado Particle-Based Fluid Simulation. Un enfoque donde se emplea una descripción Lagrangiana de este método corresponde a *Smoothed Particle Hydrodynamics* [12], [13], [14].

En dinámica de fluidos la formación de vórtices se puede establecer mediante el número de Reynolds, el cual es un parámetro adimensional asociado con las ecuaciones Navier Stokes [6], [15]. Este número indica la relación entre las fuerzas inerciales (fuerzas requeridas para acelerar masas) y fuerzas viscosas (fuerzas debidas a esfuerzos cortantes en el fluido) [4]. Si las fuerzas viscosas son mayores que las inerciales se tiene un flujo laminar debido a la interacción de esfuerzos tangenciales. Por otro lado, si las fuerzas viscosas y tangenciales son comparables se presenta un estado de transición con pequeñas ondulaciones variables en el tiempo. Finalmente si las fuerzas inerciales son mayores que

las viscosas se presenta un flujo turbulento caracterizado por un movimiento desordenado y no estacionario.

4. Modelos de enjambres con características de vorticidad

A continuación se presentan diferentes enfoques que permiten describir el movimiento de un enjambre con la formación de un vórtice. En [16] se comenta que los patrones globales de los enjambres aparecen por interacciones entre individuos. En el caso que un solo individuo presente un comportamiento circular indica que este no es un comportamiento colectivo dado por la alineación y vecindad de animales como peces y aves [16].

Algunos de los modelos presentados a continuación son empleados para describir el comportamiento del zooplancton *Daphnia*. En [17] se expone que el interés sobre el estudio de este zooplancton radica en modelar la búsqueda óptima de comida y el desplazamiento de enjambres con la formación de vórtices. El movimiento circular puede ser visto como un fenómeno de autoorganización producido la realimentación de la ficción del agua y la alineación indirecta con el zooplancton [16], [17]. Según la literatura los diferentes enfoques para el modelado del zooplancton *Daphnia* son:

- Interacción de partículas autopropulsadas SPIP (*Self-Propelled Interacting Particles*) propuesto por Vicsek (1995) [18].
- SPIP con corto rango de atracción y largo de repulsión, propuesto por Levine (2001) [19].
- Interacción de partículas Brownianas activas con depósitos de energía interna (*Interacting Active Brownian Particles with Internal Energy Depot*). Para este modelo se tienen las siguientes variaciones:
 - Partícula Browniana activa (*Single Active Brownian Particle*) [20], [21].
 - Acople global mediante el momento angular promedio del enjambre (*Global Coupling Via Mean Angular Momentum of Swarm*) [22].
 - Interacción de partícula a partícula (*Particle-Particle Interaction*) [23].
 - Interacciones hidrodinámicas (*Hydrodynamic Interaction*) [24].
 - Maniobras de evasión (*Avoidance Maneuvers*) [25].

Los anteriores modelos también han sido empleados para representar el comportamiento de cardúmenes de peces y bandadas de aves. Otros modelos de partículas que presentan el comportamiento de vorticidad se fundamentan en las ecuaciones de Navier Stokes y choques inelásticos de partículas.

Un grupo adicional de organismos donde resulta de interés su forma de propagación corresponde a las bacterias [26], [27]. Particularmente, enfoques de modelos que muestran la formación de vórtices en colonias de bacterias que se desplazan empleando quimiotaxis bacteriana se pueden apreciar en [28] y [29].

4.1. Modelo de Vicsek

El concepto de partículas autopropulsadas (*Self-Propelled Particles*) se introdujo en [18] con el fin de estudiar el movimiento colectivo de grandes grupos de organismos. De forma general se aprecia que el movimiento de organismos está dado por la interacción entre vecinos [18]. Los modelos de partículas autopropulsadas consisten en partículas que interactúan a nivel local con una forma de propulsión intrínseca a la partícula la cual le permite desplazarse de forma autónoma [18]. El comportamiento de autopropulsión aparece en procesos físico-químicos donde se involucran partículas pequeñas con fuerzas superficiales sensibles a concentraciones químicas y temperaturas [30].

El modelo de partículas autopropulsadas presentado en [18] considera un desplazamiento en dos dimensiones de varias partículas localmente alineadas con velocidad constante y ruido, siendo los parámetros del modelo la densidad del enjambre y la magnitud del ruido.

En [31] se revisan las leyes básicas que describen los aspectos esenciales del movimiento colectivo por ser una manifestación común de la conducta coordinada. Las observaciones incluyen sistemas que van desde macromoléculas hasta grupos de animales, personas y robots.

Por su parte en [32] se extiende el modelo de Vicsek al incluir un parámetro que le permite a las partículas elegir una dirección de forma independiente a sus vecinos. El modelo se considera en el régimen de pequeño ruido donde se observa que una pequeña probabilidad de movimiento individual (alrededor de 10 %) es suficiente para conducir el sistema de una fase ordenada de Vicsek a una fase desordenada.

4.2. Modelo de Langevin

Un acercamiento al comportamiento de los enjambres donde se propone considerar elementos de mecánica estadística para la descripción de los comportamientos colectivos se puede observar en [33]. Este modelo se realiza considerando la teoría desarrollada sobre el movimiento Browniano.

Según [33] las soluciones para las distribuciones estacionarias de grupos o enjambres de individuos con atracción de tipo lineal están dadas por su proximidad. El modelo propuesto en [33] considera que existe movimiento coherente colectivo que se encuentra fluctuando alrededor de un centro de rotación el cual no es fijo.

Por su parte en [34] se examinan las características dinámicas caóticas que presenta la inteligencia de enjambres, adicionalmente se propone que existe un balance caótico entre el individuo y la sociedad.

4.3. Modelos de partículas activas Brownianas

El modelo de partícula activa Browniana ABP (*Active Brownian Particle*) está basado en la ecuación de Langevin de la cual se han realizado diferentes variaciones. En estos modelos se considera una componente estocástica, característica del movimiento Browniano.

4.3.1 Modelo de una partícula activa Browniana

Este enfoque considera un depósito de energía interna [20], lo cual permite tener una descripción del movimiento activo de entidades biológicas basado en consumo y conversión de energía [35]. Tal como se observa en [35] el depósito de energía considera las condiciones para tener un movimiento biológico activo. De los resultados reportados en [20] se aprecia que un solo individuo presenta un movimiento circular alrededor de un potencial atractivo.

4.3.2 Modelo para un enjambre de partículas Brownianas

En [25] se busca explicar la formación de vórtices para grupos de individuos biológicos. El modelo se realiza mediante tres ecuaciones para posición velocidad y energía interna almacenada. El depósito de energía considera las condiciones para tener un movimiento biológico activo. La ecuación de velocidad resulta de la superposición de los términos determinísticos y estocásticos. La parte determinística considera la interacción de los individuos con comportamiento local de evasión y fuerzas externas correspondientes a la atracción de un potencial. De los resultados se observa que el modelo logra reproducir comportamientos similares a los presentados por el desplazamiento del zooplancton *Daphnia*. Adicionalmente se observa que la formación del vórtice le permite a *Daphnia* evadir colisiones con otros animales.

4.3.3 Interacción de partículas activas Brownianas

Un enfoque para modelar la interacción de partículas consiste en adicionar un acople global de los agentes al centro de masa del enjambre tal como se puede apreciar en [21], [22] y [25]. Un modelo bajo este enfoque se puede observar en [36]. Según lo presentado en [36], este modelo permite mantener la simetría en las dos direcciones para un movimiento en el plano.

Adicionalmente en [37] se presenta un modelo considerado la teoría cinética de las partículas Brownianas con interacciones de largo y corto alcance. El modelo permite describir varios sistemas físicos, tales como partículas con movimiento gravitatorio browniano (sistema Smoluchowski-Poisson), poblaciones bacterianas que experimentan quimiotaxis (modelo Keller-Segel) y partículas coloidales con interacciones capilares.

Por otra parte en [38] se investiga el efecto de la diversidad y la fuerza de acoplamiento en el efecto de transporte para un sistema de partículas activas Brownianas acopladas. El movimiento colectivo muestra una dependencia de la fuerza de acoplamiento y de un valor constante para la velocidad de las partículas.

4.3.4 Modelo con acople global parabólico

Un modelo adicional de partícula activa Browniana con interacciones consiste en tomar una aproximación de segundo orden por series de Taylor para el movimiento activo y también incorporar una fuerza de atracción entre partículas dada por un potencial de atracción de

tipo parabólico el cual permite un acople global al centro de masa del enjambre [39]. De la misma forma que en los anteriores modelos se incluye una fuerza de tipo estocástica. En [39] se muestra que la magnitud del ruido permite tener una transición de movimiento lineal a rotacional.

4.3.5 Interacciones hidrodinámicas

En este caso es adicionada al modelo partícula activa Browniana una componente de interacciones hidrodinámicas mediante contribuciones de Oseen aunque también se podría realizar considerando las ecuaciones de Navier Stokes [40]. Según [40] el flujo de Oseen genera simetría en el comportamiento de las partículas.

4.3.6 Modelo con maniobras de evasión

Este modelo se encuentra formado por la adición de un potencial de interacción repulsivo de tipo exponencial al modelo de partícula activa Browniana [25], [41]. Particularmente en [17] se considera un modelo de enjambre cuando las partículas se mueven de forma circular en una sola dirección lo cual permite evitar la colisión entre estas.

4.3.7 Modelo de enjambre acoplado por velocidad

El modelo presentado en [33] y [42] considera un acople entre partículas dado por la velocidad media de estas. Según [33] y [42] en términos generales un modelo dinámico de partículas está compuesto por interacciones conservativas dadas por potenciales y por el postulado de partículas Brownianas (ecuación de Langevin).

4.3.8 Modelo con retardos

En [43] se estudia el efecto del retardo en los procesos de transporte asociados a partículas activas Brownianas. En este modelo se proponen expresiones para la velocidad media y el coeficiente de difusión efectiva. Según [43] existe un valor absoluto crítico, por debajo y por encima del cual el retardo respectivamente mejora y debilita la difusión para una intensidad de ruido fijo. Los efectos del retardo observados anteriormente son más pronunciados para una componente de ruido más débil.

4.4. Modelo de Levine

Una primera propuesta del modelo de Levine se puede apreciar en [19] donde se considera una fuerza de interacción modelada por un potencial el cual presenta un rango corto de repulsión y un rango largo de atracción [19]. Es importante señalar que este modelo no considera la presencia de una componente estocástica.

Por su parte en [44] se utiliza el método de la densidad de la fase microscópica para obtener un modelo de partículas autopropulsadas con una regla de alineación similar a la propuesta por Vicsek. El modelo muestra la transición dinámica de un estado inicial desordenado hasta un movimiento completamente ordenado.

4.5. Modelo de partícula autopropulsada

En [45], [46] se observan los conceptos fundamentales para la formación de vórtices en enjambres de partículas. En este modelo se tiene una fuerza autónoma de autopropulsión asociada a un individuo la cual depende de influencias externas y de la localización de la partícula en el enjambre. El modelo también incorpora una fuerza producida por la interacción de una partícula con sus vecinos. Adicionalmente se considera una fuerza de fricción la cual permite tener un límite de velocidad. Es de resaltar que este modelo no requiere una componente estocástica.

4.6. Modelo de partícula autopropulsada con fuerza estocástica

En [47] se realiza una simulación empleando el modelo de partícula activa Browniana con dos masas diferentes. En este trabajo se consideran dos tipos de fuerzas, una individual y otra de interacción, las cuales se denominan fuerza de cuerpo (*body force*) y fuerza de cobertura (*shelter force*). Para la fuerza de cuerpo se tienen dos opciones, la primera consiste en un potencial de Morse y la otra corresponde al potencial de Lennard-Jones (en [47] se emplea el segundo tipo).

4.7. Modelo con liderazgo de un individuo

En [48] se propone un modelo para representar la interacción de los individuos de un enjambre, donde se observa el efecto que tiene el liderazgo de un individuo en el enjambre. En este modelo se consideran interacciones dadas por la posición y la velocidad.

4.8. Modelo con evasión de obstáculos

Un modelo general de enjambres con la capacidad de evadir obstáculos es presentado en [49]. Este modelo considera componentes de atracción y repulsión. Se incorpora una fuerza de interacción entre un individuo y el objetivo como también una fuerza de repulsión entre los obstáculos y la partícula.

4.9. Modelo con potenciales de interacción de Morse

Sobre modelos que emplean potenciales de Morse en [50] se realiza una descripción formal para la generación de vórtices en enjambres de partículas. Aquí se propone que un enjambre con interacción de partículas se define mediante un potencial interacción y una función de orientación. Sobre las características de este modelo se tiene que el centro de inercia del enjambre forma un centro relativo el cual se desplaza a velocidad uniforme ya que se presenta una simetría en el movimiento de las partículas [50].

Otro trabajo a considerar se observa en [2] donde se propone un modelo de partículas autopropulsado. En este trabajo se considera que la única fuerza social entre los individuos es la atracción. Adicionalmente se muestra que este modelo puede generar tres fases diferentes: enjambres desordenados, enjambres circulares y grupos alineados. También se presenta cómo estas fases dependen de la existencia de la fuerza de atracción y la inercia individual.

Por su parte en [51] se estudia a nivel cinético un modelo de comportamiento colectivo basado en tres fenómenos: autopropulsión, fricción (efecto Rayleigh) y componente repulsiva y atractiva descrita mediante potenciales de Morse. Se identifican cinco parámetros que rigen los posibles estados asintóticos para este sistema (grupos, esferas, dispersión, molinos, rotación de cuerpo rígido, rebaños).

Finalmente en [52] se presenta un sistema de partículas autopropulsado utilizado para describir ciertos tipos de movimiento colectivo de los animales, como los cardúmenes de peces y bandadas de aves. Las interacciones entre las partículas se especifican por medio de un potencial de pares, repulsivas a distancias cortas y atractivas a distancias más largas. El potencial de Morse exponencialmente decadente es una opción típica y es empleado para reproducir ciertos tipos de movimiento colectivo observado en la naturaleza, rebaños particularmente alineados y remolinos.

4.10. Modelo de choques inelásticos

En [53] se propone un modelo para la descripción de vórtices y migración en enjambres de individuos como peces y aves considerando la existencia de choques inelásticos entre los individuos. Este modelo considera las fuerzas normales y tangenciales presentes en el choque de dos partículas.

4.11. Modelo basado en las ecuaciones generalizadas de Navier Stokes

Un modelo de enjambre basado en la ecuación de Navier Stokes se puede observar en [54]. Con esta propuesta se intenta modelar comportamientos como vórtices, espirales y giros.

Por su parte en [55] se busca describir el comportamiento bioquímico o biológico de entidades como polímeros, células y aves, además se realiza una revisión de sistemas no lineales correspondientes a la ecuación hiperbólica de transporte acompañada de las ecuaciones parabólicas y elípticas llamadas ecuaciones generalizadas de Navier Stokes.

El enfoque presentado en [55] consiste en la ecuación hamiltoniana visco-elástica para redes de múltiples partículas con reglas específicas de interacción, este enfoque considera una componente estocástica que permite describir el comportamiento de enjambres como aves y peces. Las interacciones de los vecinos cercanos se realiza considerando regiones de Voronoi y triangulación de Delaunay.

4.12. Modelo continuo de interacciones hidrodinámicas

Un modelo continuo de un enjambre de individuos se puede apreciar en [56] y [57]. Este modelo corresponde a la conservación de materia y considera cuatro fuerzas que representan la regulación de la velocidad, presión, interacción entre partículas y un término de viscosidad no local el cual permite el alineamiento de las velocidades de los individuos. Es importante señalar la similitud de este planteamiento con la ecuación de Navier Stokes.

5. Aplicaciones relacionadas con enjambres de partículas

Las aplicaciones relacionadas con enjambres de partículas están orientadas principalmente en el campo de la robótica móvil y optimización. En robótica móvil se tienen aplicaciones de exploración y navegación de enjambres de robots, por otro lado, desde el punto de vista de optimización se buscan algoritmos que permitan una mejor exploración del espacio de búsqueda. Algunos trabajos relacionados se describen a continuación.

5.1. Aplicaciones de enjambres en robótica

Una aplicación orientada a robótica móvil se puede apreciar en [58] donde se proponen dos estrategias de navegación para enjambres de robots enfocadas a misiones de localización de un objetivo. En particular se consideran aplicaciones de detección de minas y control de incendios. Un primer método consiste en combinar lógica difusa y la técnica de optimización PSO (*Particle Swarm Optimization*). El segundo método consiste en incluir un controlador basado en lógica difusa en cada individuo. Estos métodos fueron inspirados en enjambres como peces y aves.

Un algoritmo para la planeación de trayectorias basado en un enjambre de partículas que realiza movimientos circulares se puede apreciar en [59] donde se emplean potenciales exponenciales para modelar la interacción entre partículas como también los obstáculos y el objetivo.

Otro trabajo relacionado se observa en [60] y [61] donde se proponen algoritmos de enjambres basados en características hidrodinámicas con el fin de poder coordinar un grupo de robots que puedan realizar tareas de exploración. Aquí se discute la importancia de la cooperación de robots para atender amenazas emergentes. En este trabajo se expone que modelos físicos permiten proponer algoritmos para coordinar enjambres de robots móviles en tiempo real en ambientes dinámicos con la capacidad de evadir obstáculos. La finalidad de este tipo de algoritmos consiste en generar sistemas multiagentes autónomos para la teledetección de amenazas.

Particularmente en [60] se considera la dinámica de varios cuerpos empleando un modelo hidrodinámico de autómatas tipo *lattice gas*, aquí se considera una vecindad de proximidad hexagonal para representar las ecuaciones de Navier Stokes. El autómata se inspira en el comportamiento de gases y se emplea para proponer un algoritmo de enjambres para el movimiento cooperativo de robots.

Por su parte en [61] se emplea un modelo de *lattice gas* el cual es una colección de partículas interconectadas de forma cuadrada, triangular, hexagonal o de otra forma topológica de malla. Los estados termodinámicos del gas pueden ser representados de esta forma considerando las colisiones presentes entre las partículas. Implementando una correcta configuración de malla y reglas de colisión se puede tener el comportamiento similar dado por las ecuaciones de Navier Stokes.

En [62] se presenta el diseño de controladores descentralizados para dirigir un enjambre de robots con la capacidad de evitar colisiones con ellos y obstáculos al mismo tiempo que se acercan al objetivo.

Por otro lado, en [63] se presenta el control de la formación para tareas de seguimiento de un enjambre de robots. En esta estrategia de control los individuos se mueven todos como un grupo dentro de una región dinámica. En este trabajo se expone que se pueden lograr diferentes formaciones del enjambre.

Un trabajo adicional se puede apreciar en [64] donde se propone un algoritmo distribuido con conducta de escape imitando el comportamiento de cardúmenes de peces. Con este enfoque se proporciona un método alternativo para equipos de robots con el fin de lograr algunas de las tareas de emergencia cuando la comunicación entre robots es restringida.

Un enfoque donde se emplea el algoritmo PSO para la planeación de movimientos de robots móviles se presenta en [65] y [66]. En [67] se emplea un algoritmo híbrido ACO/PSO (*Ant Colony Optimization/Particle Swarm Optimization*) para controlar un enjambre de robots donde cada individuo puede comunicarse con sus vecinos en un determinado rango.

Sobre otras aplicaciones de navegación, en [68] se propone un algoritmo de enjambre para sistemas multirrobot basado en interacción local. De la misma forma en [69] se propone un algoritmo para el control de la formación de un enjambre de robots basado en la división de la comunidad y la agrupación jerárquica, con este enfoque se busca tener formaciones estables para un enjambre de robots.

En robótica móvil el problema de localización y mapeo simultáneo SLAM (*Simultaneous Localization and Mapping*) es un problema de gran importancia, en [70] se presenta la aplicación de la técnica BF (*Bacterial Foraging*) cuando el mapa del ambiente y la localización del robot son desconocidos.

Desde el punto de vista de enjambres de partículas autopropulsadas con características hidrodinámicas en [71] y [72] se proponen mecanismos de control para enjambres de robots inspirados en estos modelos.

En [73] se muestra el interés que se ha tenido en los últimos años para emplear robots móviles con el fin de localizar fuentes de riesgo químico, en este trabajo se trata la tarea de seguimiento de rastros químicos CPT (*Chemical Plume Tracing*) bajo la perspectiva de dinámica de fluidos, esta propuesta se realiza considerando el teorema de la divergencia. El algoritmo CPT propuesto emplea el principio de fluxotaxis con el cual se busca el seguimiento del flujo de masa para localizar una fuente emisora de partículas químicas. En [73] solo se toma la parte correspondiente a la divergencia del flujo de la ecuación de Navier Stokes. Sobre los resultados presentados se observa que el algoritmo permite el seguimiento de la fuente incluso en la presencia de obstáculos y bajo diferentes regímenes de flujo como laminar o turbulento.

Finalmente en [74] se presenta una propuesta para describir en términos estocásticos el comportamiento macroscópico de un enjambre de robots. En esta propuesta se considera el conjunto de individuos como un gas.

5.2. Algoritmos de optimización basados en enjambres

Según [75] el comportamiento de seres vivos es una buena fuente de inspiración para el desarrollo de algoritmos de optimización. En particular, la forma como los individuos buscan alimento es un método que la naturaleza ha perfeccionado con el tiempo. La coordinación y cooperación en grupos de individuos permiten tener técnicas de búsqueda más eficientes.

En primer lugar es de resaltar la propuesta original de un algoritmo de optimización basado en un enjambre de partículas lo cual se denominó PSO (*Particle Swarm Optimization*), propuesta realizada por Russell Eberhart y James Kennedy en 1995 [76]. Adicionalmente se tienen algoritmos inspirados en colonias de hormigas ACO (*Ant Colony Optimization*) [77], murciélagos BA (*Bat Algorithm*) [78], luciérnagas FA (*Firefly Algorithm*) [79], abejas BCO (*Bee Colony Optimization*) [80] y bacterias BFO (*Bacterial Foraging Optimization*) [81].

De las variaciones que consideran la formación de un vórtice se tiene la presentada en [82], donde se realiza una similitud con la forma como un fluido se comporta en un sumidero (drenaje) formando un vórtice, este algoritmo se denomina PSA (*Particle Swirl Algorithm*).

Otra variación del algoritmo PSO consiste en incorporar un término de turbulencia presentándose al respecto varias propuestas. En [83] se incluye este operador en el algoritmo PSO tradicional como una variable estocástica de locura. Según [84] con este operador se busca mantener la diversidad de la población. Desde un punto de vista de algoritmos evolutivos el término de turbulencia tiene la misma función que un operador de mutación [85]. Por otro lado, en [34] se propone el algoritmo TPSO (*Turbulence in the Particle Swarm Optimization*) donde se incluye la turbulencia para resolver el problema de la convergencia prematura, con esta propuesta se busca impulsar las partículas perezosas para llevarlas a explorar nuevos espacios de búsqueda. TPSO utiliza un umbral de velocidad mínima para controlar la velocidad de las partículas y también evita la aglomeración de partículas manteniendo la diversidad de la población en el espacio de búsqueda. Un enfoque adicional sobre el factor de turbulencia consiste en realizar una perturbación al enjambre proporcional a la distancia entre una partícula en consideración y otra la cual se toma de forma aleatoria, según [86] y [87] este factor de turbulencia ayuda a escapar al enjambre de mínimos locales.

5.2.1 Algoritmos de optimización basados en enjambres con elementos caóticos

Sobre otras variaciones del algoritmo PSO en [88], se propone incorporar un operador caótico de mutación. En este trabajo se incorporan secuencias caóticas de Zaslavskii, en lugar de secuencias aleatorias como una estrategia para la diversificación de la población, con lo cual se espera mejorar el desempeño de los algoritmos PSO. Con este enfoque se busca evitar la convergencia temprana a un mínimo local. Resultados del proceso

de optimización en problemas clásicos, muestran que esta variación del algoritmo PSO presenta buen desempeño.

Con el fin de evitar el estancamiento en mínimos locales en [89] se propone un algoritmo híbrido que combina la alta velocidad de convergencia de la optimización por enjambre de partículas con la ventaja de incorporar caos para evadir óptimos locales. En este algoritmo la varianza de la aptitud de la población se utiliza para establecer la convergencia prematura de la población.

Por su parte en [90], [91] se propone un algoritmo PSO el cual incorpora un sistema caótico basado en el método de descenso más empinado. En este algoritmo se emplea una función objetivo virtual con perturbaciones.

Una propuesta donde la población inicial se genera utilizando un método de correlación caótica se puede observar en [92]. Con este enfoque se busca mejorar la diversidad de la población. La convergencia prematura se establece por la relación entre la varianza de la aptitud de la población y un umbral establecido. En el caso de presentarse convergencia prematura se adiciona una perturbación caótica para ayudar a saltar a las partículas de óptimos locales.

Con el mismo objetivo de evadir mínimos locales en [93] se propone un algoritmo caótico de optimización denominado CPSO (*Chaotic Particle Swarm Optimization*) donde se incluye un factor de inercia adaptativo AIWF (*Adaptive Inertia Weight Factor*) y un elemento caótico de búsqueda local CLS (*Chaotic Local Search*). En este trabajo se expone que el caos es la principal característica de los sistemas no lineales los cuales dependen de las condiciones iniciales produciendo movimientos con periodos infinitos lo cual es el principio que se emplea en el algoritmo propuesto.

El algoritmo CAS (*Chaotic Ant Swarm Algorithm*) es una propuesta basada en inteligencia de enjambre inspirada en la conducta autoorganizada de las hormigas y su comportamiento caótico [94]. En [95] se presenta una variación de este algoritmo la cual se denomina MCAS (*Modified Chaotic Ant Swarm*) donde se restringe el espacio de búsqueda de las variables y se incorpora información de la mejor posición observando las mejores posiciones de las hormigas.

Por otro lado, en [96] se propone el algoritmo CASO (*Chaotic Ant Swarm Optimization*) el cual incorpora una componente caótica al algoritmo de búsqueda basado en colonia de hormigas. Los autores emplean el algoritmo para solucionar el problema de despacho de energía en sistemas térmicos de generación.

5.2.2 Algoritmos de optimización basados en enjambres con elementos de mecánica cuántica

Una mejora del algoritmo PSO se realiza en [97], donde se propone incorporar elementos de mecánica cuántica y del oscilador armónico. Cuando se emplean elementos de mecánica cuántica el algoritmo es denominado QPSO (*Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization*) y al incluir componentes del oscilador armónico es llamado HQPSO

(*Harmonic-oscillator Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization*). En este trabajo se observa la efectividad del algoritmo en un problema clásico de economía, donde se implementan los algoritmos QPSO y HQPSO, comparando su desempeño con otros algoritmos PSO. El algoritmo HQPSO propuesto en [97] considera funciones potenciales que garantizan que las partículas se muevan en un ambiente cuántico. Al respecto una distribución potencial muy común en mecánica cuántica corresponde al oscilador armónico.

En el algoritmo QPSO el estado de las partículas es descrito mediante la ecuación de onda que proviene de la ecuación de Schrodinger, el comportamiento dinámico de la partícula difiere del enfoque convencional PSO ya que la posición y velocidad de la partícula no se pueden conocer simultáneamente. La probabilidad que la partícula pueda aparecer en una determinada posición está dada por la función de densidad de probabilidad que depende del campo potencial asociado a la partícula [98].

Por su parte en [93] se propone que órbitas caóticas ergódicas de un sistema dinámico puede alcanzar eventualmente un punto óptimo en una función objetivo lo cual permite tener una buena aproximación al problema de optimización con una alta probabilidad. Dado que un algoritmo PSO puede quedarse atrapado en mínimos locales los autores en [93] incorporan una búsqueda local caótica CLS (*Chaotic Local Search*) bajo este principio.

Un algoritmo donde las partículas se representan mediante un qubit (quantum bit) o bit cuántico se presenta en [99]. Esta representación se realiza mediante una esfera de Bloch, donde cada partícula presenta tres posiciones en el espacio de búsqueda y cada posición corresponde a una solución.

Con el fin de aumentar la diversidad de la población y evitar la convergencia prematura, en [100] se propone un algoritmo QPSO que emplea secuencias caóticas para inicializar la posición del ángulo de origen de las partículas. De la misma forma para evitar la convergencia prematura y lograr una buena dirección de las partículas en el proceso evolutivo, en [101] se emplean conceptos de mecánica cuántica y el mecanismo inmunológico para la propuesta de un algoritmo PSO. Otro enfoque para evitar la convergencia prematura se observa en [102] donde se propone el algoritmo de optimización por enjambre de partículas con comportamiento cuántico el cual también incorpora perturbaciones de Cauchy para desviar la posición media.

Finalmente en [103] se puede observar un algoritmo QPSO que emplea un método de interpolación lineal para mejorar la capacidad de búsqueda local como también la precisión y la convergencia del algoritmo QPSO. La interpolación lineal se utiliza para aproximar la función objetivo en torno a un punto previamente seleccionado con una buena calidad en el espacio de búsqueda. De esta forma se utiliza la búsqueda local para establecer un punto de prueba prometedor que luego se utiliza para actualizar la mejor posición individual.

6. Discusión

Con esta revisión se pueden apreciar las características más importantes de los modelos de partículas como también de los algoritmos de optimización. Aunque parecen estar por separado estos campos de investigación es posible identificar elementos que los relacionan.

Al considerar estas relaciones es posible tener un panorama más amplio de tal forma que se puede mejorar el desempeño de los algoritmos como también refinar los modelos desarrollados para enjambres de partículas.

Las características más relevantes que se identificaron son la capacidad de exploración, evasión de obstáculos, turbulencia y vorticidad. En el caso de la exploración los modelos permiten emular el comportamiento de los seres vivos para buscar alimento, por su parte, en las aplicaciones se emplea este concepto para mejorar los procesos de búsqueda. La evasión de obstáculos es uno de los aspectos de gran importancia en la navegación de robots móviles como también en los algoritmos de optimización permitiendo evadir malas soluciones. Finalmente la turbulencia y vorticidad es un fenómeno que ocurre normalmente en fluidos y que también se puede observar en enjambres de partículas y en aplicaciones de optimización. En términos generales estos conceptos son empleados para mantener la diversidad del enjambre como también para desplazar al enjambre de sus puntos de equilibrio.

7. Conclusiones

En el presente documento se revisaron los diferentes modelos de partículas que incorporan elementos relacionados con la formación de vórtices. En esta revisión también se apreciaron conceptos comunes como es la interacción entre individuos y relaciones con parámetros físicos.

Es posible apreciar una similitud de los métodos de simulación de fluidos basados en partículas y los modelos de partículas para describir el comportamiento de enjambres, lo cual permite relacionar el número de Reynolds y los parámetros de los modelos de partículas.

En los modelos de partículas activas Brownianas se observó que la incorporación de ruido puede influir en la aparición de flujo turbulento.

Fue de apreciar que la mayor parte de aplicaciones de enjambres con características hidrodinámicas se encuentran enfocadas a robótica móvil.

Se observó que el comportamiento de vorticidad es útil para lograr la evasión de obstáculos lo cual puede ser aplicado en el desarrollo de un algoritmo de optimización.

Para el desarrollo de un algoritmo de optimización con características de flujo laminar y turbulento es de gran importancia poder controlar estos comportamientos para lograr evadir mínimos locales y tener una convergencia rápida. De igual forma se deben escoger

las características más adecuadas de cada modelo de partículas que permitan tener un algoritmo de optimización eficiente.

Referencias

- [1] P. Romanczuk, L. Schimansky-Geier, «Mean-field theory of collective motion due to velocity alignment», *Ecological Complexity*, Vol. 10, 2012, pp. 83-92.
- [2] D. Strömbom, «Collective motion from local attraction», *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 283, 2011, pp. 145-151.
- [3] T. Kolokolnikov, J. Carrillo, A. Bertozzi, R. Fetecau, M. Lewis, «Emergent behaviour in multi-particle systems with non-local interactions», *Physica D*, Vol. 260, 2013, pp. 1-4.
- [4] H. Berg, «Random walks in biology», *Ed. Expanded. USA: Princeton University Press*, 1993.
- [5] D. Sedighzadeh, E. Masehian, «Particle swarm optimization methods, taxonomy and applications», *International Journal of Computer Theory and Engineering*, Vol. 1, N.º 5, 2009, pp. 486-502.
- [6] Y. Çengel, J. Cimbala, «Mecánica de fluidos, fundamentos y aplicaciones», 1ª ed. México: McGraw-Hill, 2007.
- [7] C. Jiménez, «Simulación numérica directa en turbulencia», *El Hombre y la Máquina*, N.º 22, 2004, pp. 26-33.
- [8] O. López, «Modelamiento computacional de la calle de vórtices de karman por dinámica de vorticidad», *Mecánica Computacional*, Vol. 21, 2002, pp. 274-292.
- [9] M. Kalland, «A Navier-Stokes solver for single and two phase flow», *Faculty of Mathematics and Natural Sciences University of Oslo*, 2008.
- [10] S. Armfield, «Finite difference solutions of the Navier-Stokes equations on staggered and non-staggered grids», *Computers & Fluids*, Vol. 20, N.º 1, 1991, pp. 1-17.
- [11] C. Duarte, J. Niño, «Introducción a la mecánica de fluidos», 1ª ed. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2004.
- [12] J. Chen, K. Yang, Y. Yuan, «SPH-based visual simulation of fluid», *IEEE Proceedings of 4th International Conference on Computer Science & Education*, 2009, pp. 690-693.
- [13] M. Desbrun, M. Gascuel, «Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies», *Proceedings of EG Workshop on Animation and Simulation*, 1996, pp. 61-76.
- [14] A. Grahm, «Interactive simulation of contrast fluid using smoothed particle hydrodynamics», *UMEA University Sweden*, 2008.
- [15] J. Vázquez, «Fundamentos matemáticos de la mecánica de fluidos», 1ª ed. Madrid: Departamento de Matemáticas - Universidad Autónoma de Madrid, 2003.
- [16] A. Ordemann, «Vortex-swarming of the zooplankton Daphnia», *The Biological Physicist*, Vol. 2, N.º 3, 2002, pp. 5-10.
- [17] R. Mach, F. Schweitzer, «Modeling vortex swarming in Daphnia», *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol. 69, N.º 2, 2007, pp. 539-562.
- [18] T. Vicsek, A. Czirók, B. Eshel, I. Cohen, O. Shochet, «Novel type of phase transition in a system of self-driven particles», *Physical Review Letters*, Vol. 75, N.º 6, 1995, pp. 1226-1229.
- [19] H. Levine, W. Rappel, I. Cohen, «Self-organization in systems of self-propelled particles», *Physical Review E*, Vol. 63, N.º 1, 2000, pp. 017101.
- [20] F. Schweitzer, «Active Brownian particles with internal energy depot», *Trafic and Granular Flow '99*, 2000, pp. 161-172.
- [21] W. Ebeling, F. Schweitzer, B. Tilch, «Active Brownian particles with energy depots modeling animal mobility», *Biosystems*, Vol. 49, N.º 1, 1999, pp. 17-29.
- [22] F. Schweitzer, W. Ebeling, B. Tilch, «Statistical mechanics of canonical-dissipative systems and applications to swarm dynamics», *Physical Review E*, Vol. 64, N.º 2, 2001, pp. 021110.
- [23] U. Erdmann, W. Ebeling, V. Anishchenko, «Excitation of rotational modes in two-dimensional systems of driven Brownian particles», *Physical Review E*, Vol. 65, N.º 6, 2002, pp. 061106.
- [24] A. Ordemann, G. Balazsi, F. Moss, «Pattern formation and stochastic motion of the zooplankton Daphnia in a light field», *Physica A*, Vol. 325, 2003, pp. 260-266.
- [25] R. Mach, F. Schweitzer, «Multi-agent model of biological swarming», *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 2801, 2003, pp. 810-820.
- [26] E. Ben-Jacob, I. Cohen, A. Czirók, T. Vicsek, D. Gutnick, «Chemomodulation of cellular movement, collective formation of vortices by swarming bacteria, and colonial development», *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 238, N.º 1-4, 1997, pp. 181-197.

- [27] [27] E. Ben-Jacob, «Learning from bacteria about natural information processing», *Annals of the New York Academy of Sciences*, Vol. 1178, 2009, pp. 78-90.
- [28] [28] E. Steager, C. Kim, M. Kim, «Dynamics of pattern formation in bacterial swarms», *Physics of Fluids*, Vol. 20, N.º 7, 2008, pp. 073601 1-5.
- [29] [29] T. Umeda, K. Inoue, «Possible role of contact following in the generation of coherent motion of dictyostelium cells», *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 219, N.º 3, 2002, pp. 301-308.
- [30] [30] A. Mikhailov, V. Calenbuhr, «From cells to societies: models of complex coherent action», 1st ed. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [31] [31] T. Vicsek, A. Zafeiris, «Collective motion», *Physics Reports*, Vol. 517, 2012, pp. 71-140.
- [32] [32] Gabriel Baglietto, Ezequiel V. Albano, Julián Candia, «Gregarious versus individualistic behavior in Vicsek swarms and the onset of first-order phase transitions», *Physica A*, Vol. 392, 2013, pp. 3240-3247.
- [33] [33] W. Ebeling, U. Erdmann, «Nonequilibrium statistical mechanics of swarms of driven particles», *Complexity*, Vol. 8, N.º 4, 2003, pp. 23-30.
- [34] [34] J. Liu, C. Chang, «Novel orthogonal momentum-type particle swarm optimization applied to solve large parameter optimization problems», *Journal of Artificial Evolution and Applications*, 2008, pp. 1-9.
- [35] [35] W. Ebeling, F. Schweitzer, «Self-organization, active Brownian dynamics, and biological applications», *Nova Acta Leopoldina NF*, Vol. 88, N.º 332, 2003, pp. 169-188.
- [36] [36] R. Mach, F. Schweitzer, «Modeling vortex swarming in Daphnia», *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol. 69, Num. 2, 2007.
- [37] [37] P. Chavanis, «Brownian particles with long and short range interactions», *Physica A*, Vol. 390, 2011, pp. 1546-1574.
- [38] [38] D. Wu, S. Zhu, «Effects of diversity and coupling on transport properties of globally coupled active Brownian particles», *Physica A*, Vol. 392, 2013, pp. 1280-1286.
- [39] [39] W. Ebeling, «Active Brownian motion of pairs and swarms of particles», *Acta Physica Polonica B*, Vol. 38, N.º 5, 2007, pp. 1657.
- [40] [40] U. Erdmann, W. Ebeling, «Collective motion of brownian particles with hydrodynamic interactions», *Fluctuation and Noise Letters*, Vol. 3, N.º 2, 2003, pp. 145-154.
- [41] [41] D. Helbing, P. Molnár, F. Schweitzer, «Computer simulations of pedestrian dynamics and trail formation», *Evolution of Natural Structures*, 1994, pp. 229-234.
- [42] [42] W. Ebeling, L. Schimansky, «Swarm dynamics attractors and bifurcations of active Brownian motion», *The European Physical Journal Special Topics*, Vol. 157, N.º 1, 2008, pp. 17-31.
- [43] [43] W. Guo, C. Wang, L. Du, D. Mei, «Effects of time delay on transport processes in an active Brownian particle», *Physica A*, Vol. 392, 2013, pp. 4210-4215.
- [44] [44] O. Chepizhko, V. Kulinskii, «The hydrodynamic description for the system of self-propelled particles: Ideal Viscek fluid», *Physica A*, Vol. 415, 2014, pp. 493-502.
- [45] [45] R. Lukeman, «Modeling collective motion in animal groups: From mathematical analysis to field data», *The University of British Columbia*, 2009.
- [46] [46] R. Lukeman, Y. Li, L. Edelstein, «A conceptual model for milling formations in biological aggregates», *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol. 71, N.º 2, 2009, pp. 352-382.
- [47] [47] S. You, D. Kwon, Y. Park, S. Kim, M. Chung, C. Kookim, «Collective behaviors of two-component swarms», *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 261, N.º 3, 2009, pp. 494-500.
- [48] [48] I. Couzin, J. Krause, N. Franks, S. Levin, «Effective leadership and decision making in animal groups on the move», *Letters to Nature*, Vol. 433, 2005, pp. 513-516.
- [49] [49] T. Zohdi, «Mechanistic modeling of swarms», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, N.º 21-26, 2009, pp. 2039-2051.
- [50] [50] C. McInnes, «Vortex formation in swarms of interacting particles», *Physical Review E*, Vol. 75, 2007, pp. 032904.
- [51] [51] F. Vecil, P. Lafitte, J. Linares, «A numerical study of attraction/repulsion collective behavior models: 3D particle analyses and 1D kinetic simulations», *Physica D*, Vol. 260, 2013, pp. 127-144.
- [52] [52] J. A. Carrillo, S. Martin, V. Panferov, «A new interaction potential for swarming models», *Physica D*, Vol. 260, pp. 2013, pp. 112-126.
- [53] [53] D. Grossman, I. Aranson, E. Jacob, «Emergence of agent swarm migration and vortex formation through inelastic collisions», *New Journal of Physics*, Vol. 10, 2008, pp. 1-11.
- [54] [54] J. Cohen, «Models and simulation of collective motion biomimetic robots and bacteria», USA: Massachusetts Institute of Technology, 2007.

- [55] [55] W. Alt, «Nonlinear hyperbolic systems of generalized Navier-Stokes type for interactive motion in biology», *Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, 2003, pp. 431-461.
- [56] [56] J. Carrillo, M. Fornasier, G. Toscani, F. Vecil, «Particle, kinetic, and hydrodynamic models of swarming», *Boston: Birkhäuser, Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences*, 2009, pp. 297-336.
- [57] [57] N. Mecholsky, «A continuum model for flocking: Obstacle avoidance, equilibrium, and stability», *University of Maryland*, 2010.
- [58] [58] G. Venayagamoorthy, L. Grant, S. Doctor, «Collective robotic search using hybrid techniques: Fuzzy logic and swarm intelligence inspired by nature», *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Vol. 22, N.º 3, 2009, pp. 431-441.
- [59] [59] M. Mabrouk, C. McInnes, «Wall following to escape local minima for swarms of agents using internal states and emergent behavior», *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 2008, pp. 24-31.
- [60] [60] K. Stantz, S. Cameron, R. Robinett, M. Trahan, J. Wagner, J. «Dynamical behavior of multi-robot systems using lattice gas automat», *Proceedings of SPIE's 13th Annual International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation, and Controls*, 1999, pp. 1-13.
- [61] [61] S. Cameron, G. Loubriel, R. Robinett III, K. Stantz, M. Trahan, J. Wagner, «Adaptive remote-sensing techniques implementing swarms of mobile agent», *Proceedings of the SPIE The International Society for Optical Engineering*, 1999, pp. 160-177.
- [62] [62] B. Ren, H. Pei, Z. Sun, S. Ge, T. Lee, «Decentralized cooperative control for swarm agents with high-order dynamics», *Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics*, 2009, pp. 90-95.
- [63] [63] S. Hou, C. Cheah, J. Slotine, «Dynamic region following formation control for a swarm of robots», *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2009, pp. 1929-1934.
- [64] [64] H. Min, Z. Wang, «Design and Analysis of Group Escape Behavior for Distributed Autonomous Mobile Robots», *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2011, pp. 6128-6135.
- [65] [65] G. Rigatos, «Multi-robot motion planning using swarm intelligence», *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 5, N.º 2, 2008, pp. 139-144.
- [66] [66] J. Hereford, «A distributed particle swarm optimization algorithm for swarm robotic applications», *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2006, pp. 1678-1685.
- [67] [67] Y. Meng, O. Kazeem, «A hybrid ACO/PSO control algorithm for distributed swarm robots», *Proceedings of IEEE Swarm Intelligence Symposium SIS*, 2007, pp. 273-280.
- [68] [68] A. Gasparri, A. Priolo, G. Ulivi, «A Swarm Aggregation Algorithm for Multi-Robot Systems based on Local Interaction», *IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, 2012, pp. 1497-1502.
- [69] [69] S. Chen, X. Ding, X. Chen, «Formation Control of Robot Swarm Based on Community Division and Multilevel Topology Design via Pining», *The 26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 2014, pp. 1631-1636.
- [70] [70] A. Chatterjee, F. Matsuno, «Bacterial foraging techniques for solving EKF-based SLAM problems», *International Control Conference ICC*, 2006, pp. 1-6.
- [71] [71] M. Pac, A. Erkmen, I. Erkmen, «Control of robotic swarm behaviors based on smoothed particle hydrodynamics», *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2007, pp. 4194-4200.
- [72] [72] M. Shimizu, A. Ishiguro, T. Kawakatsu, Y. Masubuchi, M. Doi, «Adaptive swarming by exploiting hydrodynamic interaction based on stokesian dynamics method», *IEEE SICE Annual Conference (Volume: 2)*, 2003, pp. 1546-1551.
- [73] [73] D. Spears, D. Thayer, D. Zanzhitzky, «Foundations of swarm robotic chemical plume tracing from a fluid dynamics perspective», *International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics*, Vol. 2, N.º 4, 2009, pp. 745-785.
- [74] [74] D. Spears, W. Kerr, W. Spears, «Fluid-like swarms with predictable macroscopic behavior», *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 4324, 2009, pp. 175-190.
- [75] [75] B. Siva, «A survey of bio inspired optimization algorithms», *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)*, Vol. 2, N.º 2, 2012, pp. 137-151.
- [76] [76] R. Eberhart, J. Kennedy, «Particle swarm optimization», *IEEE International Conference on Neural Networks*, 1995, pp. 1942-1948.
- [77] [77] M. Dorigo, T. Stützle, «The ant colony optimization metaheuristic: algorithms, applications, and advances», *Handbook of Metaheuristics*, Vol. 57, Chapter 9, 2002, pp. 250-285.
- [78] [78] X. Yang, «A new metaheuristic bat-inspired algorithm», *Studies in Computational Intelligence*, Vol. 284, 2010, pp. 65-74.
- [79] [79] X. Yang, «Firefly algorithm, lévy flights and global optimization», *Research and Development in Intelligent Systems XXVI*, 2009, pp. 209-218.
- [80] [80] R. Akbari, A. Mohammadi, K. Ziarati, «A powerful bee swarm optimization algorithm», *IEEE 13th International Multitopic Conference INMIC*, 2009, pp. 1-6.

- [81] [81] K. Passino, «Biomimicry of bacterial foraging for distributed optimization and control», *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 22, N.º 3, 2002, pp. 52-67.
- [82] [82] S. Menser, J. Hereford, «A new optimization technique», *Proceedings of the IEEE SoutheastCon*, 2006, pp. 250-255.
- [83] [83] J. Fieldsend, S. Singh, «A multi-objective algorithm based upon particle swarm optimisation, an efficient data structure and turbulence», *Workshop on Computational Intelligence UKCI*, 2002, pp. 37-44.
- [84] [84] A. Cervantes, «Clasificación mediante enjambre de prototipos», *Madrid, España: Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Informática*, 2009.
- [85] [85] K. Deb, N. Padhye, «Development of efficient Particle Swarm Optimizers by using concepts from eVolutionary algorithms», *Proceedings of the 12th annual conference on Genetic and eVolutionary computation, GECCO '10*. Portland, Oregon: ACM, 2010, pp. 55-62.
- [86] [86] S. He, Q. Wu, J. Wen, J. Saunders, P. Patton, «A particle swarm optimizer with passive congregation», *Biosystems*, Vol. 78, N.º 1-3, 2004, pp. 135-147.
- [87] [87] J. Vlachogiannis, K. Lee, «A comparative study on particle swarm optimization for optimal steady-state performance of power systems», *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 21, N.º 4, 2006, pp. 1718-1728.
- [88] [88] L. Dos Santos, «A quantum particle swarm optimizer with chaotic mutation operador», *Chaos Solitons y Fractals*, Vol. 37, N.º 5, 2006, pp. 1409-1418.
- [89] [89] M. Chen, T. Wang, J. Feng, Y. Tang, L. Zhao, «A Hybrid Particle Swarm Optimization Improved by Mutative Scale Chaos Algorithm», *Fourth International Conference on Computational and Information Sciences*, 2012, pp. 321-324.
- [90] [90] K. Tatsumi, T. Ibuki, T. Tanino, «Chaotic particle swarm optimization with an intensive search around the personal and global bests», *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, 2012, pp. 1333-1338.
- [91] [91] K. Tatsumi, T. Ibuki, S. Nakashima, T. Tanino, «Improved chaotic particle swarm optimization with a perturbation-based chaotic system for a virtual quartic function», *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, 2013, pp. 208-213.
- [92] [92] J. Li, Y. Cheng, K. Chen, «Chaotic Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Adaptive Inertia Weight», *the 26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 2014, pp. 1310-1315.
- [93] [93] P. Acharjee, S. Goswami, «Chaotic particle swarm optimization based robust load flow», *Electrical Power and Energy Systems*, Vol. 32, N.º 2, 2010, pp. 141-146.
- [94] [94] L. Li, H. Peng, X. Wang, «An optimization method inspired by chaotic ant behavior», *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 16, N.º 08, 2006, pp. 2351-2364.
- [95] [95] L. Yu-Ying, W. Qiao-Yan, L. Li-Xiang, «Modified chaotic ant swarm to function optimization», *The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications*, Vol. 16, N.º 1, 2009, pp. 58-63.
- [96] [96] J. Cai, X. Ma, L. Li, Y. Yang, H. Peng, X. Wang, «Chaotic ant swarm optimization to economic dispatch», *Electric Power Systems Research*, Vol. 77, N.º 10, 2007, pp. 1373-1380.
- [97] [97] L. Dos Santos, V. Cocco, «Particle swarm approach based on quantum mechanics and harmonic oscillator potential well for economic load dispatch with valve-point effects», *Energy Conversion and Management*, Vol. 49, N.º 11, 2008, pp. 3080-3085.
- [98] [98] K. Tazuke, N. Muramoto, N. Matsui, T. Isokawa, «An Application of Quantum-Inspired Particle Swarm Optimization to Function Optimization Problems», *the 2013 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, 2013, pp. 1-6.
- [99] [99] X. Liu, X. Liu, «Quantum Particle Swarm Optimization Based on Bloch Coordinates of Qubits», *Ninth International Conference on Natural Computation (ICNC)*, 2013, pp. 554-558.
- [100] [100] H. Yu, X. Tiantian, H. Pu, «An Improved Quantum Particle Swarm Optimization and Its Application in System Identification», *the 26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 2014, pp. 1132-1134.
- [101] [101] L. Jun-Hui, L. Na, «Parallel Adaptive Immune Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization Algorithm (PAIQPSO)», *Second International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application*, 2012, pp. 435-438.
- [102] [102] L. Xu, L. Zhang, J. Dang, «Quantum-behaved particle swarm optimization with Cauchy disturbance for power economic dispatch», *4th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics*, 2012, pp. 268-271.
- [103] [103] S. Jiang, S. Yang, «An Improved Quantum-behaved Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Linear Interpolation», *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, 2014, pp. 769-775.