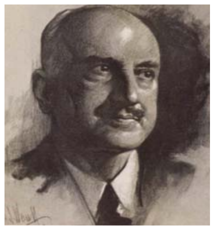
PITÁGORAS NOS DIO UN SISTEMA PARA CONSTRUIR UNA ESCALA MUSICAL

La música y las matemáticas: generando las notas musicales

MUCHOS DE LOS TÉRMINOS QUE APLICAMOS CUANDO APRENDEMOS SOLFEO, TIENEN UNA GRAN RELACIÓN CON LAS MATEMÁTICAS

Juan Francisco Martínez-Cerdá
Doctorando en el eLearn Center de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC), Barcelona
jmartinezcer@uoc.edu

«Si todas las artes aspiran a ser como la música, todas las ciencias aspiran a ser como las matemáticas.»
George Santayana
(1863-1952)



A la hora de establecer relaciones entre la música y las matemáticas, es interesante abordar el tema desde un punto de vista próximo y cercano a nuestros alumnos. Desde esta perspectiva vamos a empezar hablando del diapasón, una pieza metálica que seguramente los jóvenes han podido tocar y hacer sonar en las clases de música. Esta lámina de acero en forma de U, cuando se la golpea y se la hace vibrar, genera un sonido casi inaudible, que normalmente suele escucharse acercándolo al oído. El diapasón más utilizado es el denominado la 440, que genera un sonido sencillo que llamamos nota musical la, que tiene exactamente 440 Hz. (hercios), y con la que se afinan todos los instrumentos de una banda o una orquesta. (Nota 1)

Pues bien, mientras hablamos del diapasón ya estamos, en realidad, estableciendo lazos con las matemáticas: concretamente cuando hacemos referencia a la palabra 'sonido' y a la palabra 'hercios'. Esto es así porque el sonido viene originado por las oscilaciones de la presión del aire, provocadas por ejemplo por la vibración del parche de un tambor, de los platillos o de una caña existente en la boquilla de un clarinete o un saxofón. Estos cambios de presión en el aire son convertidos en ondas mecánicas en nuestro oído, y finalmente percibidas por el cerebro. Y estas variaciones de la presión del aire se transmiten de un modo análogo a cuando tiramos una piedra en un estanque, y tienen –y llegamos aquí a las matemáticas– unas ecuaciones matemáticas que las describen mediante funciones sinusoidales, y que vienen dadas por

Imagen 1 Diapasón

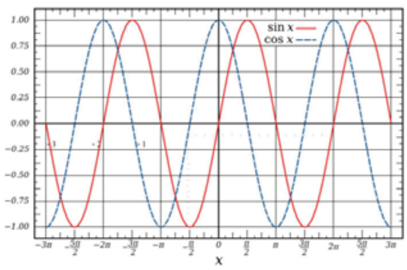


Imagen 2 Onda sinusoidal

factores como la distancia, la velocidad o la presión atmosférica existente. (Nota 2). Por eso no suenan igual los instrumentos los días soleados que los lluviosos, o una sirena de una ambulancia cuando se nos acerca que cuando se nos aleja. Ver imagen 2. onda sinusoidal.

Por otro lado, los hercios son las unidades que expresan la cantidad de vibraciones que emite una fuente sonora por unidad de tiempo. Así, nuestra nota la con 440 Hz. nos dice que en cada segundo se efectúan 440 vibraciones por parte de los brazos del diapasón. Del mismo modo que con nuestro coche vamos a 70 km/h., pudiendo ir más rápido o más lento en función de los metros que recorramos en una hora, con nuestro instrumento musical podremos emitir una vibración que se repetirá más o menos veces por segundo como dicho instrumento nos permita, medición que se efectuará mediante hercios, y que nos generará las diferentes notas musicales.

Profundizando un poco más en la parte matemática, tenemos que reseñar la existencia de un teorema del año 1822 del matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) que afirma, en términos sencillos, que cualquier sonido musical es la combinación de diversos sonidos sencillos. De este modo, cualquier sonido puede ser duplicado mediante la combinación de, por ejemplo, diferentes diapasones: las ondas de cada uno de ellos se agruparán generando una nueva onda mecánica que configurará la nota final. (Nota 3). Este teorema es vital para la música, puesto que nos explica el porqué con diferentes instrumentos podemos generar las mismas notas musicales. ver imagen 3. Fourier.

Representaciones musicales

Otro punto interesante de relaciones entre la música y las matemáticas tiene que ver con la escritura o representación de un sonido o de una nota en particular sobre un papel, acción que puede ser realizada mediante un pentagrama, como todos vosotros sabéis. En dicho pentagrama, podemos ver qué nota musical es. Pero también mediante las fórmulas matemáticas correspondientes podríamos representar dicha nota mediante sus hercios: más hercios implicarían un sonido más agudo, mientras que menos hercios conllevarían un sonido más grave.

Hablando de pentagrama, es interesante comentar que muchos de los términos que aplicamos cuando aprendemos solfeo, tienen también una relación con las matemáticas. Así, aspectos como la altura –término puramente geométrico– o tono de una nota, que nos dice si un sonido es grave (pocos hercios) o agudo (muchos hercios), su duración, su intensidad (un sonido fuerte o débil) son, por ejemplo, factores que son perfectamente medibles y, por ello, matemáticos.

Diferentes figuras musicales

Otro aspecto a comentar tiene relación con las diferentes figuras musicales que se utilizan en la notación musical más común, y que está basada en diversas operaciones matemáticas: 1 redonda = 2 blancas, 1 blanca = 2 negras, 1 negra = 2 corcheas, 1 corchea = 2 semicorcheas, etc. Esto es otro ejemplo más de relaciones entre las matemáticas y la música . (Nota 4) Ver Imagen 4. Figuras musicales.

Como se puede apreciar, sumando la duración de dos figuras iguales se obtiene la figura con una duración inmediatamente más larga, habiendo realizado una suma. O una multiplicación por el número dos. Este funcionamiento de las figuras y su duración está basado en estas sencillas operaciones aritméticas.

Otra relación entre la música y las matemáticas tiene que ver con la escritura o representación de sonidos o notas en un papel

Selección de los sonidos

Teniendo en cuenta todo lo comentado, podemos plantearnos ahora cómo proceder a afinar un conjunto de instrumentos, es decir, cómo seleccionar unos sonidos que juntos sean agradables para el oído humano, descartando el resto de sonidos posibles. En términos matemáticos, tenemos que seleccionar las frecuencias de unos sonidos que sirvan para hacer música, olvidándonos del resto de frecuencias. Debemos, en definitiva, crear una escala musical. Y para ello, nos bastarán las matemáticas más básicas que apren-

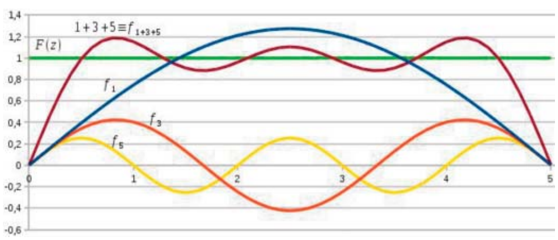


Imagen 3 Fourier

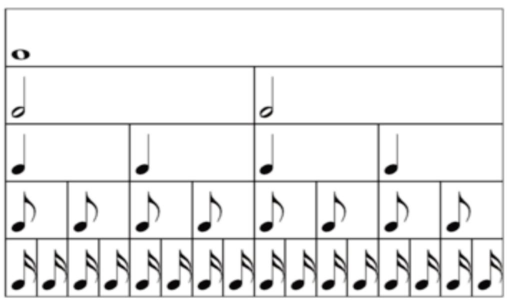


Imagen 4 Figuras musicales

demos cuando somos niños: solamente necesitamos los números 1, 2 y 3. Veámoslo a continuación.

Pitágoras

Pitágoras de Samos (aproximadamente 582 a. C. – 507 a. C.), además de ser famoso por un teorema atribuido a él, pero ya usado en tiempos anteriores en Babilonia, fue un matemático griego que nos dio un sistema para construir una escala musical mediante la denominada afinación pitagórica. Así, dedujo que un sonido musical producido por una cuerda es más agudo cuando más corta es dicha cuerda, y que para generar la octava siguiente más alta de una nota, había que dividir entre dos la longitud de dicha cuerda. Además, generó una fórmula para conocer todas las notas de la escala: partiendo de una nota cualquiera, basta generar seis quintas (un salto que comprende cinco notas de la escala musical) consecutivas por encima y una por debajo, lo que da lugar a las siete notas de la escala. De este modo, continuando las quintas, obtendríamos toda la escala cromática. (Nota 5). Ver imagen 5: Quintas.

Ahora sabemos qué es el sonido, qué produce el tono de una nota, cómo la podemos representar, cómo podemos dar su duración...

Octavas

Para la generación de las octavas desde un punto de vista matemático, hay que tener en cuenta el funcionamiento de las frecuencias, que hemos dicho que representan a las notas musicales mediante las ondulaciones de una cuerda. De este modo, si una onda se desplaza por una cuerda de longitud l, y tarda un tiempo t en llegar al final y volver hasta el inicio, lo que nos daría todo un ciclo de onda, pues entonces si la cuerda es la mitad de larga, veremos que la onda volverá justamente en la mitad del tiempo a su principio, hecho que provocará que si en un segundo teníamos, por ejemplo con la nota la, 440 ondulaciones por segundo, para su octava tendremos 880 ondulaciones por segundo. O sea, que para conseguir una octava superior, bastará multiplicar por dos la frecuencia –los hercios– de la nota original.

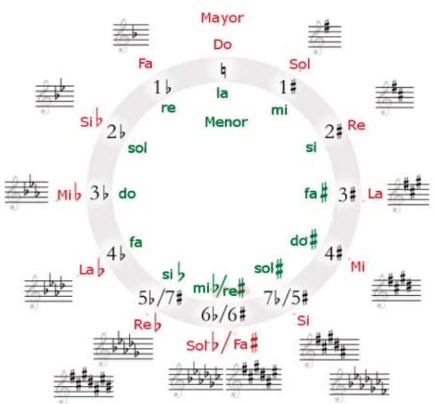


Imagen 5 Quintas

Para visualizar mejor lo que pasa en una cuerda, podemos pensar que si tiramos una pelota a una pared que está de nosotros d metros, y nos llega rebotada después de 2 segundos, bastará acercarse la mitad de la distancia d/2 a la pared, para observar que nos llega en un segundo, es decir, en la mitad de tiempo. De este modo, con la mitad de una cuerda las ondas llegan en la mitad de tiempo a su origen, y vuelven a ser rebotadas, por lo que en el mismo tiempo, hay el doble de vibraciones. De ahí que una nota y su octava tengan un factor múltiplo de 2 entre sus frecuencias.

La totalidad de la escala

Para encontrar el resto de notas musicales que nos genera la totalidad de la escala musical, a través de las quintas consecutivas que hemos comentado anteriormente, pues en lugar de multiplicar por 2, lo que tendremos que hacer es multiplicar la frecuencia por 3/2 que, mira por dónde, es la fracción más simple posible, puesto que solamente implica a los números naturales más pequeños que generan un número fraccionario: el 2 y el 3. Así, las diferentes frecuencias de las notas musicales vendrán dadas por una multiplicación iterativa por la razón 3/2. Por ejemplo, si partimos del la estándar para la afinación, podemos encontrar el resto de notas multiplicando poco a poco por 3/2 (para encontrar todas las notas de la escala) y por 1/2 (para encontrar la octava correcta). Como podemos observar, utilizando solamente este mínimo conjunto de números y operaciones matemáticas podemos generar algo tan extremadamente rico como la escala musical.

Resumiendo un poquito lo explicado anteriormente, ahora sabemos qué es el sonido, qué produce el tono de una nota, cómo la podemos representar, cómo podemos dar su duración, y cómo se genera una escala musical. Y todo ello haciendo solamente sumas y multiplicaciones de los números más elementales respecto a cualquier sonido que queramos coger como nota origen.

Música y simetrías

Para acabar este breve artículo, me gustaría hablar de las simetrías y la música. En matemáticas, dos objetos son simétricos respecto a unas operaciones cuando uno de los objetos puede ser obtenido del otro mediante la aplicación de dichas operaciones. En un papel, por ejemplo, todos podemos realizar traslaciones, rotaciones y reflexiones de cualquier figura que dibujemos, siendo todas estas acciones operaciones de simetría: copiando íntegramente el objeto en otra posición del folio que estemos utilizando después de haberlo dejado igual que estaba respecto al punto de vista que teníamos antes del cambio, o des-

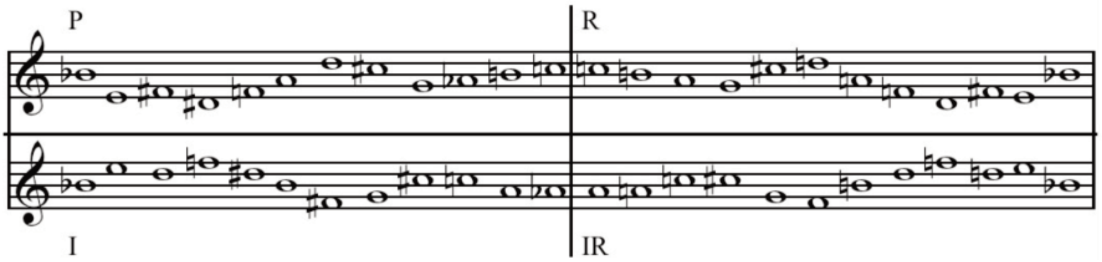


Imagen 6 Simetría

pués de haberlo girado del mismo modo que giran las agujas de un reloj, o después de haberlo dibujado copiando la imagen que obtenemos de dicho dibujo en un espejo.

Así, del mismo modo que podemos generar una frase que sea simétrica, como las frases «Dábale arroz a la zorra el abad» y «Anita lava la tina», que pueden ser leídas cada una de ellas al revés y nos resultan las mismas frases (porque ambas son frases palíndromas), o de igual manera que existen los números capicúas, como el 77, el 303 o el 11411, pues los compositores musicales han tenido siempre en cuenta las simetrías que podrían obtenerse de las piezas y composiciones que creaban. Así, el fragmento de partitua (Nota 6) de las Variaciones para orquesta, op. 31 (1926-1928) de Arnold Schönberg es un ejemplo de simetría existente en una pieza musical: concretamente, las notas del compás superior izquierda (P) están reflejadas en el compás superior derecha (R) con relación a un eje de simetría vertical, y ambos están reflejados en los compases inferiores (I, IR) con respecto a un eje de simetría horizontal. Ver imagen 6. Simetría.

Notas

Nota 1. Imagen procedente de la web:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diapason.jpg
Usuario: http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Yrithinnd
Nota 2. Imagen procedente de la web:
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sine_and_Cosine.svg
Autor: http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Inductiveload
Nota 3. Imagen procedente de la web:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Analiza_fourierowska_impulsu_prostok%C4%85tnego.jpeg?uselang=es
Autor: Persino
Nota 4. Imagen procedente de la web:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:YB0104_Valeur_relative_notes.png
Autor: http://fr.wikipedia.org/wiki/Utilisateur:Yves30
Nota 5. Imagen procedente de la web:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circle_of_fifths_deluxe_4-ES.png
Autor: http://en.wikipedia.org/wiki/User:Just_plain_Bill
Nota 6. Imagen procedente de la web:
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Schoenberg_-_Variations_for_Orchestra_op._31_tone_row_mirror_forms.png
Autor: http://en.wikipedia.org/wiki/User:Hyacinth