O CLARINETE - UMA INTRODUÇÃO À ANÁLISE FÍSICA DO INSTRUMENTO

I. A. Hümmelgen
Laboratório de Materiais, Departamento de Física,
Universidade Federal do Paraná
Curitiba - PR

Resumo

Neste trabalho, analisa-se o clarinete sob o ponto de vista da Física, partindo do tratamento de problemas simples como a determinação dos modos de vibração da coluna de ar confinada em tubos cilíndricos e paulatinamente transitando para situações mais complexas. Descrevem-se algumas das peculiaridades do instrumento e o modo pelo qual a sua tessitura pode ser ampliada, com o objetivo de não se restringir ao simples comportamento de um tubo cilíndrico.

I. Introdução

Apesar de nem sempre parecer óbvio, a Física e a Matemática fornecem os elementos necessários para compreender e explicar o funcionamento de instrumentos musicais de sopro, classe em que se enquadra o clarinete.

Esses elementos somente foram desenvolvidos quando a maioria dos instrumentos de sopro, que são atualmente encontradas numa orquestra sinfônica, já existiam, pelo menos em sua forma mais primitiva. Apesar disso, nos séculos XIX e XX a ciência pôde colaborar mais intensa e efetivamente no desenvolvimento e aprimoramento dos instrumentos já existentes, bem como no desenvolvimento de novos.

A intenção do presente artigo é explicar o funcionamento e as características peculiares do clarinete, usando, como ferramentas, a Física e a Matemática. Apesar de existirem textos de acústica musical, nos quais o tema é tratado, dificilmente isso ocorre em língua portuguesa e em linguagem tão acessível quanto à que será utilizada nesse artigo. O detalhamento dos textos disponíveis normalmente não é tão grande quanto o aqui apresentado, de forma que somente podem ser compreendidos por pessoas que tenham conhecimento mais avançado em problemas relacionados à acústica musical. Em função disso, o tratamento matemático do problema, nesse artigo, é tal, que o desenvolvimento usado deveria ser compreendido por um aluno de curso superior, interessado, que tenha cursado as cadeiras de Cálculo do ciclo básico de um curso de Ciências Exatas ou Engenharia. O artigo visa, portanto, desmistificar o funcionamento do instrumento.

II. Considerações Preliminares

II.1 Escala Musical

A escala musical é composta por um conjunto de notas, cada uma delas correspondendo a uma determinada freqüência sonora. Normalmente, utiliza-se como referência uma nota Lá, que possui uma freqüência de 440 Hz, que é representada em partituras musicais escritas para piano, conforme indicado na Fig. 1. Em outros instrumentos, dependendo da afinação, essa nota pode aparecer escrita de forma diferente (dependendo do instrumento, faz-se uma transcrição ou transposição, visando adaptar a posição das notas com relação ao pentagrama à tessitura do instrumento, como por exemplo, num clarinete em Sib).

É possível aumentar-se a freqüência até o ponto em que se obtém uma nova nota Lá (uma oitava acima), que fisicamente corresponde a uma freqüência dobrada (esse segundo Lá tem então uma freqüência de 880 Hz). Do mesmo modo, conforme representado na Fig. 2, pode-se diminuir a freqüência até o ponto em que se obtém uma outra nota Lá (uma oitava abaixo da primeira) que possui uma freqüência que é a metade da inicial (220 Hz). Esse processo pode, a princípio, ser repetido o quanto se queira.

Analisando-se essas três notas, verifica-se que o Lá mais agudo (880 Hz) possui uma freqüência 2^n vezes a freqüência do Lá mais grave (220 Hz), onde n (nesse caso n=2) representa o número de oitavas compreendidas no intervalo entre essas duas notas. De forma simplificada, isso corresponde a dizer que, cada vez que se sobe uma oitava, se dobra a freqüência.

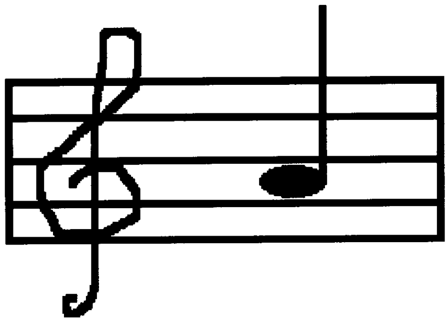

Fig. 1 - A nota representada no pentagrama equivale a Lá, cuja freqüência é de 440 Hz.

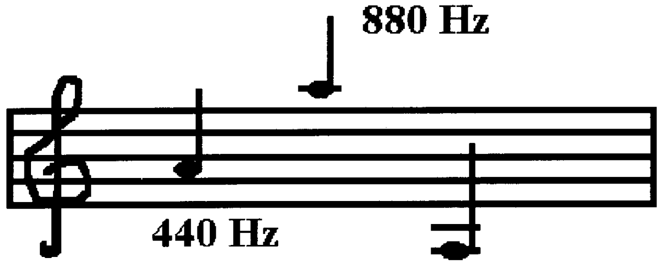

Fig. 2 - Pentagrama contendo três notas Lá, separadas por um intervalo de uma oitava. As notas mais elevadas, de freqüência mais alta, correspondem aos sons mais agudos.

Esse mesmo princípio de organização de freqüências em intervalos musicais chamados de oitavas, pode ser utilizado para intervalos menores. Ou seja, divide-se ainda cada oitava em subintervalos. Na música ocidental isso é feito dividindo-se uma oitava em doze intervalos tais que se mantenha uma relação fixa entre as freqüências que delimitam o intervalo e que caracterizam as notas. Esses doze intervalos permitem construir a escala cromática (Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si) [1].

Matematicamente, procede-se como segue. Toma-se o intervalo correspondente a uma oitava e subdivide-se esse intervalo em doze subintervalos, tomando-se o cuidado de, como na relação de freqüências entre oitavas, manter fixa a relação entre as freqüências que delimitam o subintervalo, isto é, manter fixa a relação de freqüências entre duas notas separadas por um semitom. Dessa forma, a relação entre as freqüências de notas separadas de um semitom (como por exemplo, Fá e Fá#) é de $2^{1/12} = 1{,}0594631$. Essa relação permanece constante para quaisquer notas separadas por um semitom. Já a relação entre freqüências de notas separadas por cinco semitons é, nesse caso, igual a $2^{5/12} = 1{,}3348399$, ou matematicamente:

$$f_{Lá\#} = 2^{1/12}\ f_{Lá} = 1{,}0594631\ f_{Lá} = 466{,}16 \text{ Hz}$$

e

$$f_{Fá} = 2^{5/12}\ f_{Dó} = 1{,}3348399\ f_{Dó} =$$

$$= 1{,}3348399 \text{ x } 261{,}63 \text{ Hz} = 349{,}23 \text{ Hz}$$

onde *f* representa a freqüência da onda sonora correspondente à nota musical representada pelo subíndice. Essa relação entre freqüências é válida para qualquer oitava, sendo válida mesmo para intervalos maiores que uma oitava, desde que se considere o número de semitons que compõem o intervalo entre as notas musicais analisadas. Utilizando esse procedimento, pode-se construir uma escala musical, cujas notas têm as freqüências apresentadas na tabela I (as notas apresentadas compõem três oitavas, e são aquelas presentes no teclado de um piano, iniciando pelo terceiro Dó, contado a partir do Dó mais grave). As freqüências apresentadas em negrito são aquelas relacionadas matematicamente na discussão apresentada acima. As notas e freqüências apresentadas na tabela não compreendem a totalidade da tessitura do piano, cujo teclado compreende o intervalo de Lá (27,50 Hz) a Dó (4186,00 Hz), portanto, mais de sete oitavas.

II.2 Ondas Sonoras

Uma onda sonora se propagando livremente no espaço pode, na aproximação de onda plana, ser matematicamente representada como segue:

$$p\ (x,t) = p_i \, .\cos(-kx + 2\pi ft + \phi),$$

onde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{e} \quad f = \frac{1}{T}$$

Tabela I: Diversas notas (três oitavas) contidas no teclado de um piano e suas respectivas freqüências. As freqüências em negrito são discutidas no texto.

	1ª oitava	2ª oitava	3ª oitava
Dó	130,81	**261,63**	523,25
Dó#	138,59	277,18	554,37
Ré	146,83	293,66	587,33
Ré#	155,56	311,13	622,25
Mi	164,81	329,63	659,26
Fá	174,61	**349,23**	698,46
Fá#	185,00	369,99	739,99
Sol	196,00	392,00	783,99
Sol#	207,65	415,30	830,61
Lá	220,00	**440,00**	880,00
Lá#	233,08	**466,16**	922,33
Si	246,94	493,88	987,77

e sendo *p(x,t)* a variação de pressão em relação à pressão local média, p_i a amplitude da onda, λ o período espacial da onda (ou comprimento de onda) e *T* o período temporal da onda (ver Fig. 3).

A situação é um pouco mais complexa quando se analisa graficamente a variação da pressão que se verifica quando uma nota é executada num instrumento musical. A variação de pressão de um instrumento de sopro pode, dependendo da nota musical executada, ter aproximadamente a forma apresentada na Fig. 4.

Apesar de a variação da pressão não mais poder ser representada de forma simples, como no caso anterior, o fato de *p* ser ainda uma função periódica (de período espacial representado na Fig. 4), permite que ela seja representada matematicamente por uma expansão em série de Fourier. Essa representação pode ser feita tanto no domínio espacial como no temporal.

$$p(x) = p_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varepsilon_1\right) + p_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{\lambda}{2}}x + \varepsilon_2\right) + \ldots$$

ou

$$p(t) = p_1{}' \cos\left(2\pi ft + \varepsilon_1'\right) + p_2{}' \cos\left(2\pi ft + \varepsilon_2'\right) + \ldots$$

Nessas expressões, os coeficientes p_i e p_i' representam as amplitudes dos harmônicos, sendo p_1 a amplitude fundamental, cuja freqüência f é a freqüência da nota musical correspondente. As intensidades relativas dos diversos coeficientes

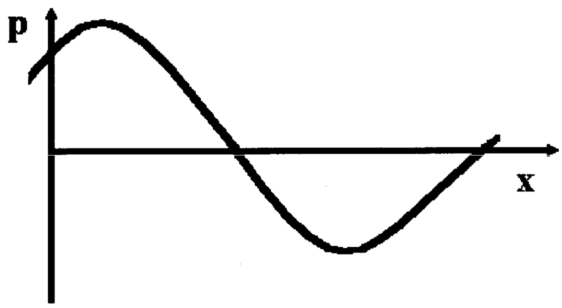

Fig. 3 - Representação de uma onda sonora plana. O desvio da pressão em relação ao valor médio da pressão varia senoidalmente com a posição.

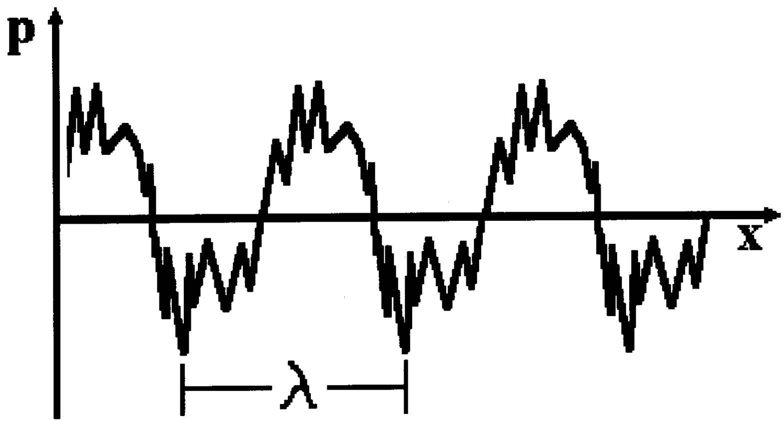

Fig. 4 - Representação de uma onda sonora emitida por um instrumento de sopro. Apesar de essa onda ser periódica, ela não mais pode ser representada por uma função senoidal. É necessário que ela seja representada matematicamente por uma série de Fourier.

p_i e dos diversos termos da série determinam o timbre, que caracteriza o instrumento: instrumentos diferentes podem ser identificados pelo seu timbre mesmo quando executam uma mesma nota musical, por apresentarem diferentes intensidades dos harmônicos na composição do som emitido. É pela distribuição de harmônicos (timbre) que uma pessoa pode identificar os diversos instrumentos de uma orquestra.

III. Propriedades acústicas de um tubo cilíndrico

Para que um tubo possa ser utilizado na construção de um instrumento musical de sopro, é necessário que as ondas acústicas estacionárias formadas nesse tubo mantenham uma relação fixa entre as freqüências dos modos de vibração da coluna de ar confinada pelo tubo e que as freqüências dos modos de vibração mais elevados sejam aproximadamente múltiplos inteiros da freqüência do modo fundamental [2]. Essa restrição limita tremendamente as formas de tubo utilizáveis para a construção de instrumentos de sopro. Surgem três candidatos, que por razões técnicas, acabam se restringindo a dois: tubo cilíndrico e tubo cônico. O tubo cônico é utilizado, por exemplo, nos saxofones e oboés, enquanto que o tubo cilíndrico aparece no fagote e no clarinete [3]. A forma não utilizada por razões técnicas, constitui um corne cujo raio de cavidade é descrito pela expressão $r = Cx^7$, onde r representa o raio da cavidade, *C* é uma constante e *x,* a distância ao vértex (ponto para o qual r=0). Essa forma inviabiliza a construção de instrumentos, pois o tubo correspondente seria muito curto e excessivamente largo (formato semelhante a um prato de metal, usado em instrumentos de percussão) [2].

Como o objeto de discussão, no presente trabalho, é o clarinete, limitar-se-á a análise ao tubo cilíndrico [4]. Para tanto, considerar-se-á um tubo com seu eixo de simetria coincidindo com o eixo da coordenada *x,* conforme representado na Fig. 5.

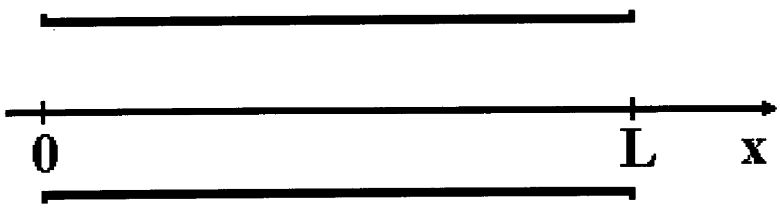

Fig. 5 - Representação esquemática em corte de um tubo cilíndrico de comprimento L.

Escrevendo a expressão de uma onda plana se deslocando na direção *x* (considerando ambos os sentidos) como

$$p(x,t) = \left[Ae^{-ikx} + Be^{ikx} \right] e^{i\omega t}$$

e o volume de fluxo acústico como

$$U(x,t) = \left(\frac{S}{rc}\right)\left[Ae^{-ikx} - Be^{+ikx}\right]e^{-iwt}$$

onde *S* é a área da seção do tubo, ρ é a densidade do ar e *c*, a velocidade do som, pode-se então escrever a impedância acústica, definida como:

$$Z(x) = \left[\frac{p(x)}{U(x)}\right]$$

É conveniente fazer-se uma analogia entre a impedância acústica e a impedância elétrica, visando facilitar a compreensão do significado dessa grandeza. A impedância elétrica desempenha o papel da resistência à passagem de corrente elétrica, quando se aplica sobre determinado objeto uma tensão V(x,t), alternada. De forma análoga, a impedância acústica é a grandeza que contém a informação sobre a resistência imposta por um objeto à passagem de ar quando submetido a uma diferença de pressão.

Utilizando as expressões acima, pode-se calcular a impedância de saída do tubo *Z(x=L)*

$$Z(x = L) = \frac{\left[Ae^{-ikL} + Be^{ikL}\right]e^{iwt}}{\left[Ae^{-ikL} - Be^{ikL}\right]e^{iwt}} \; Z_0$$

onde

$$Z_{0=} = \frac{\rho c}{S}$$

Já a impedância de entrada do tubo, Z_{IN}, pode ser escrita

$$Z(x = o) = Z_{IN} = \left[\frac{A + B}{A - B}\right]Z_0$$

ou ainda

$$Z_{IN} = \left[\frac{Z_L \cos(kL) + iZ_0 sin(kL)}{iZ_L sin(kL) + Z_0 \cos(kL)}\right]$$

No caso particular do clarinete, a extremidade onde se localiza a campânula, localizada em x = 0, pode ser considerada como uma extremidade de tubo perfeitamente aberta, implicando em $Z_{IN} = 0$. A outra extremidade, por sua vez, localizada em x = L, representa a extremidade que contém a boquilha do instrumento. Nessa região, a palheta produz o maior distúrbio de pressão na coluna de ar do instrumento, funcionando como origem das excitações acústicas da coluna de ar. Fisicamente, isto equivale a considerar o tubo como sendo fechado nessa extremidade, o que implica em $Z(L) = \infty$. Introduzindo essa condição nas equações acima, pode-se obter a freqüência e ou o comprimento de onda para os modos de vibração da coluna de ar do clarinete (a freqüência e o comprimento de onda se relacionam diretamente, pela velocidade *c* do som no meio, $\lambda f = c$). Basta, para tanto, obter as soluções da equação:

$$-iZ_0 \cot g(kL) = 0\,,$$

que são

$$kL = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \Rightarrow L = \left(\frac{2n-1}{4}\right)\lambda$$

Estas ondas estacionárias estão representadas na Fig. 6, para os casos n = 1 e n = 2. É interessante observar que, no primeiro modo de vibração, o comprimento do tubo equivale a um quarto do comprimento de onda; no segundo modo de vibração, o comprimento do tubo equivale a três quartos de comprimento de onda. Pode-se obter as relações para os demais harmônicos, desde que se leve em consideração que, num tubo fechado, são produzidos somente os harmônicos ímpares da fundamental. Essa análise deve ser considerada como uma primeira aproximação pois, na realidade, é necessário fazer-se uma correção relacionada à terminação do tubo [4]. Os resultados obtidos são tanto melhores quanto maior for a razão entre o comprimento do tubo e o seu diâmetro.

Utilizando somente o primeiro modo de vibração (n=1), pode-se construir um instrumento musical, desde que o instrumento possua diversos tubos de diferentes comprimentos, o que permite que cada tubo tenha uma freqüência de onda estacionária característica, correspondendo portanto, a uma nota musical diferente. Esse fato é usado na construção da flauta de Pan, conforme apresentado esquematicamente na Fig. 7.

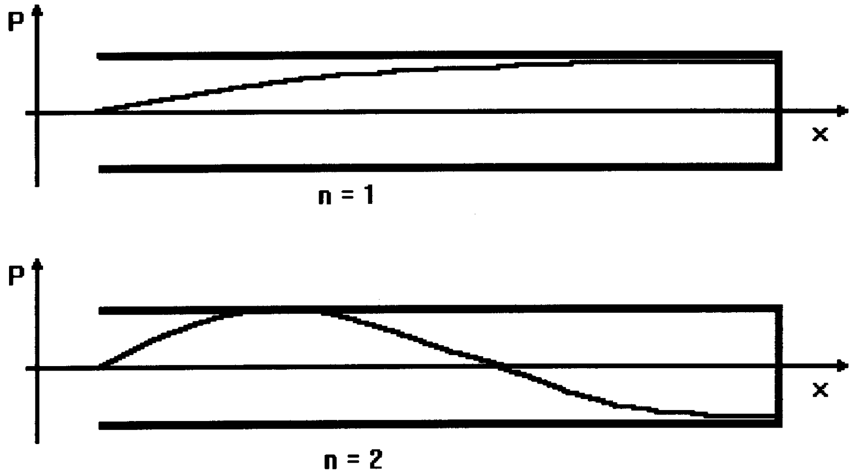

Fig. 6 - Apresentação da variação da pressão como função da posição em um tubo cilíndrico para o primeiro (n=1) e segundo (n=2) modos de vibração da coluna de ar do tubo.

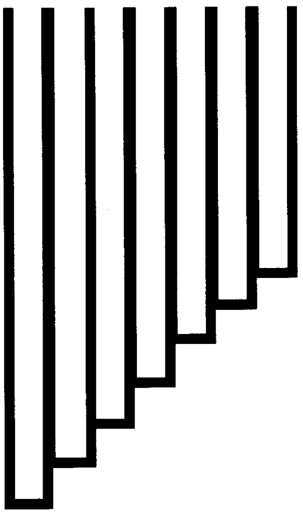

Fig. 7 - Flauta de Pan. É composta de um conjunto de tubos cilíndricos de diferentes comprimentos, cada um deles correspondendo a uma nota musical.

III.1. O efeito de furos laterais num tubo cilíndrico

A presença de furos laterais num tubo cilíndrico altera profundamente o comportamento acústico desse tubo. Um tubo com furo lateral se comporta acusticamente como se fosse mais curto, isto é, as freqüências de seus modos de vibração são iguais às freqüências de um tubo mais curto. O tubo passa então a ter um comprimento efetivo, chamado de comprimento acústico, que é diferente de seu comprimento físico. Além disso, o comprimento acústico de um tubo depende do tamanho do furo lateral: tubos de mesmo comprimento, que tenham furos laterais de tamanho diferente, possuem diferente comprimento acústico e, conseqüentemente, seus modos de vibração correspondem a diferentes freqüências. Na Fig. 8, esse efeito é esquematicamente mostrado.

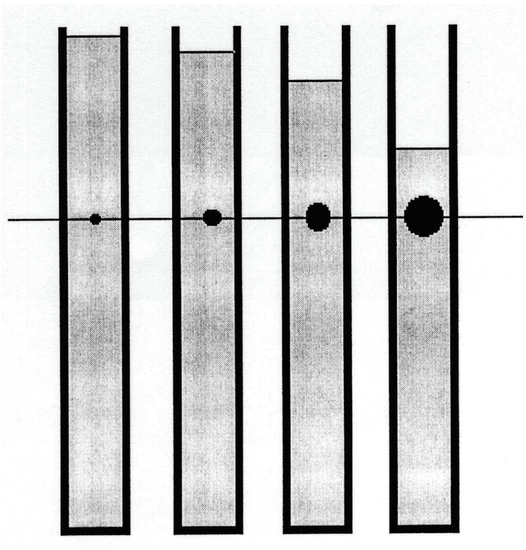

Fig. 8 - O comprimento acústico de um tubo cilíndrico contendo furo lateral depende do tamanho deste furo, conforme indicado pela parte sombreada.

É nesse fenômeno que se fundamenta o princípio de funcionamento dos instrumentos musicais de sopro. Abrindo-se furos laterais de diâmetro controlado, pode-se diminuir o comprimento acústico do tubo, fazendo com que os seus modos de vibração se desloquem para freqüências mais altas (notas mais agudas). Fazendo-se uso de vários furos e de chaves que permitam abri-los ou fechá-los conforme a necessidade, pode-se utilizar um único tubo e, variando-se seu comprimento acústico, obter-se uma gama relativamente grande de notas musicais.

IV. O clarinete

Os fenômenos e comportamentos físicos expostos anteriormente e associados aos furos laterais são utilizados na construção dos instrumentos de sopro, como por exemplo, saxofones, oboé, fagote, corne inglês e clarinete. O clarinete, objeto do presente artigo, apresenta cavidade central cilíndrica, tendo portanto algumas peculiaridades que o distinguem de outros instrumentos, como por exemplo, o saxofone, instrumento de cavidade central cônica.

IV. 1 O clarinete e o tubo cilíndrico fechado em uma das extremidades

Na prática, o clarinete pode, em boa aproximação, ser tratado como um tubo cilíndrico fechado em uma de sua extremidades, conforme indicado na Fig. 9.

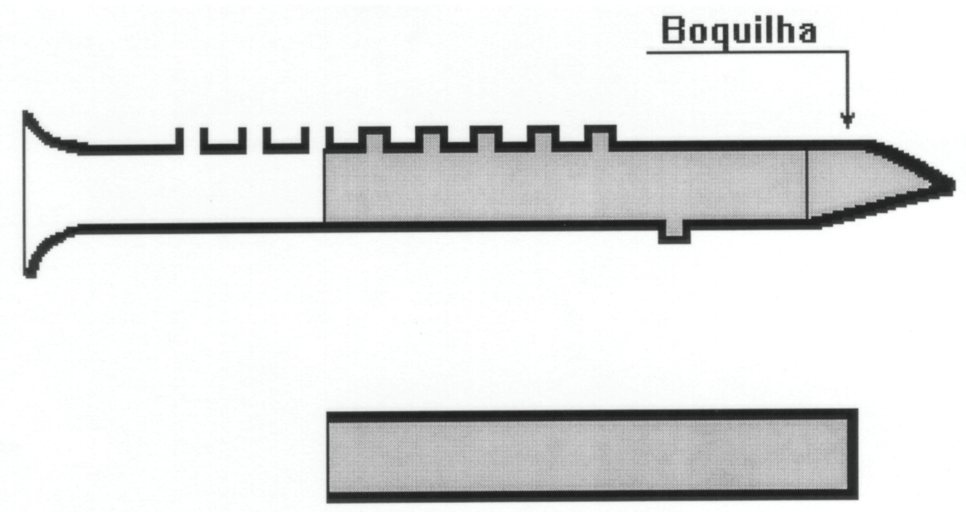

Fig. 9 - O clarinete com diversos furos laterais abertos se comporta como um tubo cilíndrico mais curto, como indicado.

Ao se abrir sucessivamente furos laterais do instrumento, a partir da extremidade aberta (oposta à boquilha), pela retirada dos dedos que usualmente tapam esses furos ou pela movimentação de chaves, o instrumentista varia o comprimento acústico do tubo. O construtor de instrumentos, por sua vez, procura dispor e dimensionar os furos laterais de forma que, ao serem abertos, permitam percorrer o conjunto de freqüências correspondente a um intervalo da escala cromática, mantendo a cavidade central aproximadamente cilíndrica [5]. É até interessante notar que, ao se abrir lentamente um furo lateral, a freqüência varia perceptivelmente. Este fato é usado por instrumentistas para executar o chamado “glissando” (ouvir, por exemplo, o início de *Rhapsody in Blue*, de George Gerschwin).

Usando esse princípio, é possível obter-se um instrumento de tessitura de mais de uma oitava. O problema seguinte consiste em tentar ampliar essa tessitura, de forma a tornar o instrumento musicalmente mais rico e atraente.

A solução encontrada consiste em suprimir a fundamental (1º modo de vibração da coluna de ar do tubo), fazendo com que o terceiro harmônico (2º modo de vibração) se constitua na freqüência fundamental da nota emitida. Na prática, o procedimento usado é o esquematicamente representado na Fig. 10. Abre-se um furo lateral (no clarinete, ele se encontra sob a chave, próxima ao barrilete, que é pressionada pelo dedo polegar esquerdo), que reduz sensivelmente a variação de pressão no local, induzindo localmente um nodo de pressão [6]. Dessa forma a onda correspondente a n=1 (Fig. 10) é suprimida, fazendo com que a freqüência fundamental da nota emitida corresponda à freqüência do 2º modo de vibração da coluna de ar (n=2, Fig. 10). Com essa chave aberta, o procedimento anteriormente citado, de abrir em seqüência os furos laterais do instrumento, pode ser repetido, obtendo-se então um incremento na tessitura do instrumento. Esse novo intervalo de freqüências corresponde ao 2º registro do instrumento.

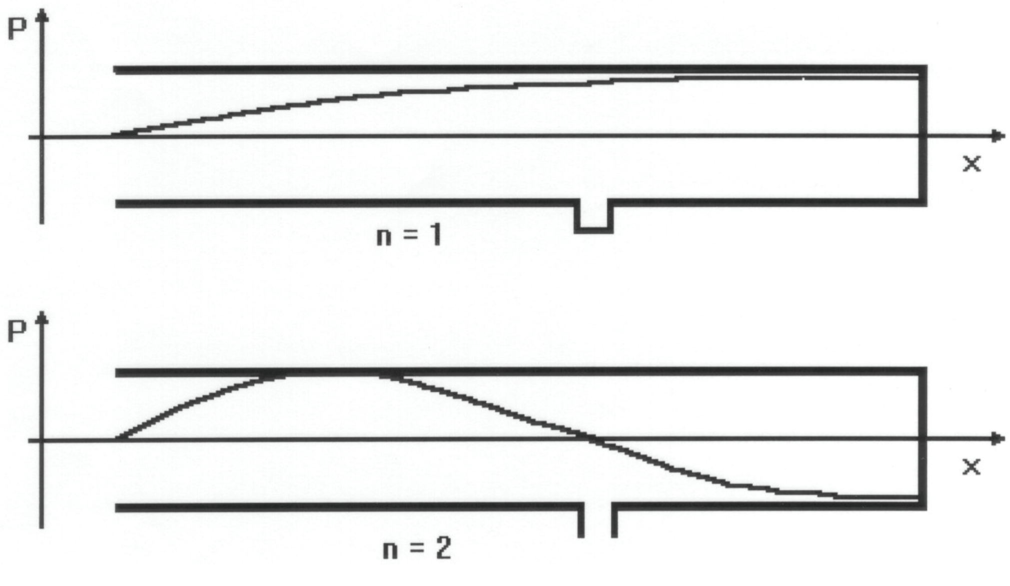

Fig. 10 - No clarinete, ao se abrir a chave localizada na parte inferior do instrumento, produz-se uma redução local da pressão que prioriza a formação do segundo modo de vibração do instrumento, de freqüência mais elevada (nota mais aguda).

Para que o instrumento seja útil musicalmente, ele precisa ser capaz de executar uma seqüência de notas correspondente à escala cromática, sem exclusão de qualquer nota. Por isso, o instrumento deve ser capaz de, no primeiro registro, iniciar a escala por uma nota (a mais grave) e possibilitar a execução das subseqüentes até o semitom imediatamente anterior aquele que corresponde à freqüência do 2º modo de vibração da coluna de ar, pois essa nota já é obtida no segundo registro. No segundo registro, mantém-se a chave de registro aberta e abrindo-se sucessivamente os furos laterais, percorre-se novo segmento da escala cromática no sentido dos sons mais agudos. Notas ainda mais agudas podem ser obtidas, utilizando-se combinações mais elaboradas de furos abertos e fechados que levem à supressão do 1º e 2º modos de vibração do instrumento.

Considerando especificamente o clarinete em Sib, tem-se a seguinte situação: A nota mais grave obtida é o Ré (146,83 Hz), que o clarinetista lê como sendo um Mi no pentagrama (esse problema tem origem pelo fato de o clarinete ser um instrumento com afinação em Sib). Abrindo-se sucessivamente furos laterais, chega-se até a nota Sol# (415,30 Hz), lida pelo clarinetista como um Lá. A nota seguinte, Lá (440 Hz), corresponde a três vezes a freqüência do Ré mais grave ou, de outra forma, como para o Ré mais grave (1º registro), o comprimento do tubo é igual a um quarto do comprimento de onda, o Lá pode ser obtido se o comprimento do tubo for igual a três quartos do comprimento de onda, que equivale a acionar o 2º modo de vibração da coluna de ar (passar ao segundo registro). Isso é feito pelo instrumentista ao acionar a chave próxima à boquilha, usando o polegar esquerdo.

V. Conclusão

Pelo que foi exposto acima, pode-se verificar que, entendendo o comportamento acústico de um tubo cilíndrico, é possível compreender o funcionamento de um instrumento de sopro, como o clarinete. O artigo descreve ainda as funções de algumas das modificações do tubo cilíndrico para o clarinete, que objetivam basicamente aumentar a sua tessitura, justificando-as fisicamente.

O presente trabalho, de forma alguma, pretende esgotar o assunto, mas apenas servir de introdução bastante acessível ao tema, cobrindo uma lacuna que é a de literatura de Física da música em língua portuguesa.

Um clarinete, para constituir um instrumento de boa qualidade, necessita ainda sofrer correções adicionais às características descritas no presente trabalho, inclusive pequenos desvios na forma da cavidade central. Muitas dessas correções foram desenvolvidas pelo acúmulo de experiência, por parte de artesãos, ao longo de muito tempo. Pequenos desvios na forma geométrica do tubo produzem conseqüências na afinação do instrumento e em sua qualidade tonal [7]. Uma análise mais pormenorizada desses detalhes técnicos não é, entretanto, objeto deste artigo.

Referências

1. J. R. PIERCE, "*Klang - Musik mit den Ohren der Physik*", Spektrum, Heidelberg, 1989.

2. A. H. BENADE, *"On Woodwind Instrument Bores",* The Journal of the Acoustical Society of America, v. **31,** p. 137-146, 1959.

3. A. H. BENADE, *"The Physics of Wood Winds"*, Scientific American v. **10**, 1960.

4. N. H. FLETCHER e T. D. ROSSING, "*The Physics of Musical Instruments"*, Springer, 1990.

5. A. H. BENADE, *"On the Mathematical Theory of Woodwind Finger Holes",* The Journal of the Acoustical Society of America v. **32**, p. 1591-1608, 1960.

6. A. H. BENADE, "*Fundamentals of Musical Acoustics",* Dover, 1990.

7. I. A. HÜMMELGEN, *"Barrel Displacement and Tone Quality in the Clarinet",* European Journal of Physics v. **16**, p. 187-190, 1995.