UNICIENCIA Vol. 27, N°. 1, [95-118]. Enero – junio 2013 ISSN 1101 – 0275
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia

LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS: UNA EXPERIENCIA EN EL AULA CON EL USO DEL GEOGEBRA, SEGÚN EL MODELO DE VAN HIELE

THE TEACHING OF THE PYTHAGOREAN THEOREM: CLASSROOM EXPERIENCE WITH THE USE OF GEOGEBRA ACCORDING TO VAN HIELE MODEL

Gilberto Vargas Vargas
gilbertovargasvargas@gmail.com
Colegio Técnico Profesional de Puriscal.
Puriscal, Costa Rica

Ronny Gamboa Araya
rgamboa@una.ac.cr
Universidad Nacional.
Heredia, Costa Rica

Recibido el 2 marzo de 2011. Corregido el 29 agosto de 2011. Aceptado el 18 de octubre de 2012.

Resumen: El presente artículo presenta los resultados de una experiencia llevada a cabo con estudiantes de secundaria, respecto al tema del teorema de Pitágoras y su recíproco, apoyado con el uso del GeoGebra y en el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. Para esto se diseñó una estrategia metodológica que se implementó, con doce actividades, en un grupo de noveno año de educación secundaria de Costa Rica, en el II trimestre 2009. Se comparó el nivel de razonamiento mostrado por ellos con aquellos que trabajaron este tópico desde un enfoque tradicional. El estudio fue de tipo cualitativo. Entre los principales resultados obtenidos se destacan: Aquellos estudiantes que desarrollaron las actividades apoyados por el GeoGebra se sintieron más motivados a estudiar Matemáticas, en especial geometría, que aquellos que lo hicieron con el enfoque tradicional. Lla estrategia metodológica empleada logró que muchos de los estudiantes con bajas notas se motivaran a "competir" y a discutir ideas matemáticas con aquellos que tenían mejores calificaciones, por lo que se puede afirmar que esta estrategia ayudó a reforzar la confianza de estos en su interacción con los demás.

Palabras claves: Razonamiento, geometría, enseñanza, modelo de Van Hiele, teorema de Pitágoras, GeoGebra.

Abstract: The present article has as purpose to present the results of an experience carried out with high school students with on the issue of the Pythagorean theorem and its reciprocal supported the use of GeoGebra and in the Van Hiele geometric reasoning model. For this it was designed and it implemented a methodological strategy, with twelve activities, to a group of ninth year of secondary education of Costa Rica, in the II trimester 2009, and compared the level of reasoning displayed by them with those who worked on this topic a traditional approach. The study was of qualitative type. Among the main findings highlighted that students who developed the activities supported by the GeoGebra felt more motivated to study Mathematics, especially Geometry, than those who did so under the traditional approach and the methodological strategy used in managed make many of the students who had low grades were motivated to "compete" and discuss mathematical ideas with students who had better grades than them, so that we can say that this strategy helped to strengthen their confidence in their interaction with others.

Keywords: reasoning, geometry, teaching, Van Hiele, Phytagoras, GeoGebra.

Han sido varios los cambios de programas de estudio que se han dado en la educación costarricense. Estos, aunque bien intencionados, han tenido algunas fallas en varios aspectos, tales como la falta de capacitación para la aplicación de los cambios, la sobrecarga laboral de los profesores, la falta de recursos apropiados y la casi ausencia del componente tecnológico en los programas de estudio que, entre otras, han provocado parte del problema que se ha dado con la educación matemática y, en especial, con la geometría (Murillo, 2003).

Todo ello ha provocado que los objetivos propuestos por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) en los programas de estudio no se hayan podido lograr. Muestra de esta problemática son los resultados obtenidos en las pruebas nacionales de Matemáticas, los cuales no han sido muy alentadores, dado su bajo rendimiento. El porcentaje de estudiantes que obtiene una nota superior al mínimo es muy pequeño, como se observa en las tablas 1 y 2, según los datos del MEP (2003a, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008). Al analizar el rendimiento por temas se observa la baja promoción obtenida en los temas “funciones” y “geometría”, en el periodo 2003-2008.

Tabla 1
Promedios de notas de bachillerato a nivel nacional por temas evaluados en el período 2003-2008

Temas	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Álgebra	69,2	66,8	70,4	72,0	71,8	82,5
Funciones	56,2	50,1	46,4	40,3	41,0	47,6
Función exponencial y logarítmica	63,9	60,0	57,2	62,7	69,4	71,3
Geometría	57,5	49,6	49,4	47,7	52,4	50,1
Trigonometría	57,4	56,4	57,6	50,5	62,2	70,6

Fuente: Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo, MEP.

En el caso de las pruebas de noveno año, estas se aplicaron por última vez en el 2007. En ellas, el promedio de aprobación era muy bajo. Al igual que en las pruebas de bachillerato, el tema de geometría, junto con el de álgebra, constituían los de más bajos resultados, como puede observarse en la tabla 2, según el MEP (1999, 2000, 2001, 2002, 2003b).

Tabla 2
Promedios de notas de pruebas de noveno año a nivel nacional por temas evaluados 1999-2003[1]

Temas	1999	2000	2001	2002	2003
Números reales	48,8	49,6	61,2	67,5	63,3
Algebra	39,8	41,2	43,1	51,2	48,5
Geometría	42,1	46,7	52,3	49,6	43,9
Trigonometría	53,6	46,4	59,5	54,4	53,7

Fuente: Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo, MEP.

Al respecto, Barrantes y Alfaro (2003) afirman que “(…) existe una crisis en la enseñanza de la matemática en la educación media, los exámenes de Bachillerato son el reflejo de esa problemática” (p. 177). Dentro de esa crisis en la enseñanza de las Matemáticas, la geometría es una de las áreas con mayor problemática: precisamente las pruebas nacionales son un indicador de ello.

Esta situación se agrava año tras año y parece que la solución está lejana. Según lo mencionan Barrantes (2003) y Alfaro (2003), los mismos profesores y estudiantes indican, en el caso de la

[1] A pesar de que se hizo la petición al MEP en repetidas ocasiones no fue posible obtener datos más actuales.

geometría, que las pruebas tienen un nivel de dificultad que va de aceptable a óptimo y que todo parece indicar que el problema está en la forma en cómo se aborda el tema en el aula, dado que es común que los docentes y alumnos se avoquen a prepararse para la prueba, y dejen de lado procesos importantes para el aprendizaje de esta disciplina. Además, Barrantes (2003) señala que los profesores de Matemáticas consideran que los temas de geometría y funciones son los más difíciles a nivel de bachillerato, mientras que a nivel de noveno año son geometría y álgebra. Las causas de estas deficiencias están "(…) en la forma de llevar a cabo el proceso global de enseñanza y aprendizaje de esta asignatura" (Barrantes, 2003, p. 156).

A partir de lo anterior, surge la necesidad de realizar un análisis de la forma en cómo se están enfocando la enseñanza de la geometría en Costa Rica y la creación de estrategias metodológicas que permitan un mejor aprendizaje de la disciplina por parte del estudiante. Por ello, es posible que parte de la respuesta al problema respecto a la enseñanza de las Matemáticas, y en particular de la geometría, esté en volver nuestra mirada a los programas de estudio vigentes, pero enfocando las fuerzas hacia otro punto de partida, el uso de la tecnología, específicamente de software para la enseñanza de la geometría.

Para detectar las debilidades que se presentan en todos los niveles, el tema de la enseñanza de la geometría debe abordarse desde muchos y variados puntos de vista. El uso de software tiene mucho que aportar a la solución de este problema, ya que podría proporcionarle al sistema educativo otra perspectiva para analizar la problemática planteada.

Con el propósito de contribuir en el logro de aprendizajes significativos en la geometría, a continuación se presenta los resultados de una experiencia llevada a cabo con estudiantes de secundaria, respecto al tema del teorema de Pitágoras y su recíproco. Se presentarán aspectos relacionados con la enseñanza de dicho tópico y lo que plantea el MEP en cuanto a este; además se describirán las actividades realizadas con estudiantes de secundaria de Costa Rica y los resultados obtenidos.

MARCO TEÓRICO

Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

La caracterización del modelo de Van Hiele se hace a través de cinco niveles. En cada uno ellos el estudiante muestra una serie de particularidades respecto a su razonamiento geométrico. A continuación se hace una descripción del modelo de Van Hiele, tomada principalmente de los autores Fouz y De Donosti (2005), Jaime (1993), Jaime y Gutiérrez (1994) y Beltranetti, Esquivel y Ferrari (2005).

Nivel 1: Las figuras geométricas son reconocidas por su forma como un todo por el individuo, no diferencia partes ni componentes de esta. Puede, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a ellas por su nombre. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y comparadas con elementos familiares de su entorno.

Nivel 2: El individuo puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas, pero no logra establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de estas. Las propiedades de ellas las establece de forma empírica a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones de la geometría las establece a partir de propiedades, no le es posible elaborar definiciones.

Nivel 3: El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas se derivan de otras; establece interrelaciones entre estas y sus familias. Construye las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado. Sin embargo, su razonamiento lógico continúa basado en la manipulación. Sigue demostraciones; pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones.

Nivel 4: En este nivel ya realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, y ve su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. El individuo comprende y maneja las relaciones entre propiedades y las formaliza en sistemas axiomáticos, por lo que ya entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas. Puede desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, percibe la posibilidad de una prueba; sin embargo, no reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.

Nivel 5: El individuo está capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí. Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría. Capta la geometría en forma abstracta. Este último nivel, por su alto grado de abstracción, debe ser considerado en una categoría aparte, tal como lo sugieren estudios sobre el tema. Alsina, Fortuny y Pérez (1997) y Gutiérrez y Jaime (1991) afirman que solo se desarrolla en estudiantes de la universidad, con una buena capacidad y preparación en geometría.

Además de los niveles anteriores, los Van Hiele propusieron cinco fases de aprendizaje que guían al docente en el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel a otro. A continuación se presentan estas cinco fases y una breve descripción de ellas (Fouz y De Donosti, 2005, y Jaime, 1993).

Fase 1: Información. En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en este. Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

Fase 2: Orientación dirigida. Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes), para que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos que deben formar. Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor tiene que seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades, y debe orientar a sus alumnos hacia la solución, cuando lo necesiten.

Fase 3: Explicitación. Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico correspondiente al tema de estudio. El tipo de trabajo que se debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolverse los ejercicios anteriores, elementos, propiedades y relaciones que se han observado o utilizado.

Fase 4: Orientación libre. En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos. El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades: más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas.

Fase 5: Integración. Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar; integran estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que poseían anteriormente. El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos.

El paso por cada una de estas fases y su observación puede potenciar, en gran medida, la posibilidad de que un estudiante pueda avanzar del nivel en el que se encuentra y así poder desarrollar sus habilidades y capacidad de razonamiento geométrico.

La enseñanza del teorema de Pitágoras y su recíproco

González (2008) afirma que el teorema de Pitágoras es la relación matemática que ocupa los primeros lugares en el recuerdo de las épocas escolares. El autor indica que Loomis (1852–1940) recopiló, durante años múltiples, pruebas dadas del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia que luego plasmó, en 1927, en la obra titulada The Pythagorean Proposition, en la cual recopilaba un total de 370 pruebas o demostraciones. La importancia otorgada a este tema se ha visto también reflejada en las investigaciones, con fines didácticos, que se han realizado en torno a él.

Barreto (2009) realizó un estudio llamado Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico, en el cual hace referencia a los procesos cognitivos que deben desarrollar los estudiantes para resolver problemas geométricos y en donde se analizan, además, diversas comprobaciones del teorema de Pitágoras en su acepción geométrica (comparación de áreas). Por ejemplo, expone la demostración de Bhaskara que asocia la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ con el área de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo (Figura 1); además, con el fin de generalizar este tipo de comprobación con fines didácticos, analiza otras extensiones utilizando otras figuras construidas sobre los lados del triángulo rectángulo, tales como semicírculos, triángulos equiláteros y otros polígonos.

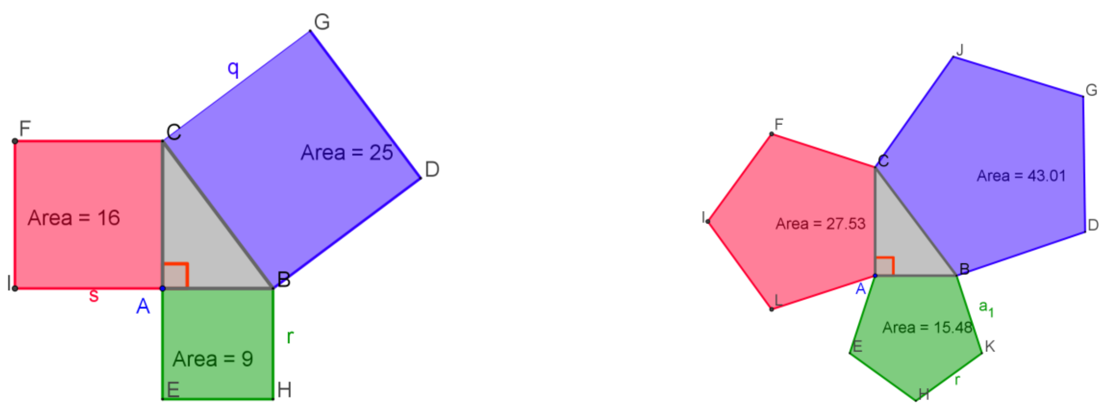


Figura 1. Comprobación del teorema de Pitágoras usada por Barreto (2009) dibujada con GeoGebra

Gurrola y Jáuregui (2008), en su artículo Didáctica del teorema de Pitágoras, desarrollan una secuencia didáctica, planteada como taller, donde se reconstruyen algunas de las demostraciones más famosas del teorema de Pitágoras. En este se emplean diversas técnicas con una secuencia de actividades que pretende sensibilizar a los profesores sobre diferentes representaciones del teorema de Pitágoras. Una de estas actividades era el uso de tablas, las cuales los participantes debían completar con ayuda de una guía que se les proporcionaba y de la cual debían extraer conclusiones respecto a la relación entre los datos tabulados. Los autores también reportan actividades con el uso de rompecabezas o puzzle (que se pueden confeccionar en papel) y de software de geometría para "reconstruir" algunas de las demostraciones del teorema de Pitágoras.

Por su parte, Dalcín (2007) expone un estudio sobre el recíproco del teorema de Pitágoras. Recalca la necesidad de incluir elementos históricos para su enseñanza, como el hecho de que los egipcios utilizaban las ternas pitagóricas para construir ángulos rectos, lo que evidencia que ellos conocían y aplicaban dicha propiedad para resolver problemas de su entorno. Expone, además, una demostración de Euclides del recíproco del teorema de Pitágoras, correspondiente a la proposición 48 del Libro I de los Elementos. Al final de su exposición indica que el objetivo primordial es el "rescate" del recíproco del teorema de Pitágoras que es olvidado por la mayoría de los egresados de secundaria, a pesar de que dicha proposición es uno de los resultados más arraigados.

Ruiz (2000), con el fin de profundizar en la capacidad de los individuos para organizar los aprendizajes previos y la estrategia que poseen para incorporar un conocimiento nuevo al bagaje de lo que dispone, utilizó un instrumento con el que, en referencia al teorema de Pitágoras, "midió" la presencia de este conocimiento adquirido con antelación, la utilidad que tiene (según la opinión de los estudiantes) y si eran capaces de aplicarlo como parte de la resolución de un problema.

El estudio se aplicó a estudiantes universitarios. El autor indica que la investigación confirma que estos conocieron detalles del teorema de Pitágoras mediante una educación que llama enciclopédica, repetitiva o declarativa, lo que justifica que posean un resultado medianamente aceptable al reconocer el nombre del autor del teorema y de completar la expresión $a^2 + b^2 = c^2$; sin embargo, apunta que fueron pocos los estudiantes que lograron, o al menos intentaron, resolver el problema que se les planteó. De acuerdo con lo que afirma este autor, existe una gran división entre lo que se enseña en las aulas de secundaria y aquello que los alumnos recuerdan y, más aún, con lo que ellos pueden emplear al resolver un problema con el uso del teorema de Pitágoras. Esto debe llevar a reflexionar sobre la manera en que se lleva a cabo la didáctica de la geometría y, en particular, de este tema.

Respecto a lo anterior, el MEP no especifica ninguna directriz en que se refiera a la didáctica de la enseñanza de este teorema; solamente aporta los objetivos y contenidos que brinda en sus programas de estudio oficiales. Aunque no hay investigaciones realizadas, la práctica y experiencia docente señala que el enfoque de enseñanza del teorema de Pitágoras se realiza de una forma algorítmica y deja de lado el proceso de construcción del conocimiento por parte del estudiante y la comprobación de esta proposición.

Ante esta situación, cabe la inquietud de hacer una propuesta didáctica en la que el teorema de Pitágoras sea abordado y estudiado desde una perspectiva en la cual el estudiante pueda construir su conocimiento, usando en el proceso los avances tecnológicos a los que se tienen acceso, así como los software de geometría actuales y donde, además, pueda ser guiado, en el proceso de aprendizaje, mediante una teoría que le permita mejorar su nivel de razonamiento geométrico.

METODOLOGÍA

Con el propósito de contribuir al mejoramiento de la enseñanza del teorema de Pitágoras y su recíproco, se diseñó una estrategia metodológica que se apoyó en el uso del software GeoGebra. Esta está formada en total por doce actividades y sus respectivas guías de trabajo. Se implementó en un grupo de noveno año de educación secundaria de Costa Rica, en el II trimestre 2009, y se comparó el nivel de razonamiento mostrado por ellos, con el de aquellos que abordaron este tópico con un enfoque tradicional.

El estudio fue de tipo cualitativo y se trabajó con dos secciones de noveno año. El grupo que de un enfoque tradicional se denotará como ET, mientras que el que utilizó la estrategia metodológica diseñada se identificará como EM. Las actividades realizadas fueron similares para cada grupo, versaban sobre la misma temática en ambos y cada una se adecuó según se contara con el uso del software o no.

Con el propósito de describir y comparar el desenvolvimiento de los estudiantes en las actividades implementadas, según la estrategia metodológica respectiva (ET o EM), y ante la imposibilidad de realizar un reporte detallado para cada uno de los alumnos de los grupos participantes, se seleccionaron seis estudiantes de cada uno de ellos, según el promedio de las notas obtenidas en el I y II trimestre del 2009 $\left(\overline{X} = \dfrac{\text{Nota I trimestre} + \text{Nota II trimestre}}{2}\right)$. En la tabla 3 se puede observar la información de los estudiantes seleccionados por grupo. Para cada uno de estos alumnos se realizó un análisis de su desempeño en las actividades realizadas.

Tabla 3
Cantidad de estudiantes seleccionados por grupo, según promedio de las notas obtenidas en el I y II trimestre del 2009, para describir y comparar el desenvolvimiento en las actividades implementadas

$\overline{X}$	Cantidad de estudiantes seleccionados del ET	Cantidad de estudiantes seleccionados del EM	Total
$\overline{X} < 65$	2	2	4
$65 \leq \overline{X} < 85$	2	2	4
$85 \leq \overline{X} < 100$	2	2	4
Total	6	6	12

Cada una de las doce actividades desarrolladas respondía a una o más de las cinco fases que el modelo de Van Hiele propone y su fin consistía en lograr identificar el nivel de razonamiento geométrico en el que se encontraba cada estudiante, de acuerdo con el modelo propuesto. Los temas que abordaban las actividades estaban relacionados con el teorema de Pitágoras, su derivado, prueba de Perigal para esta proposición y resolución de problemas con lo enunciado en esta proposición.

Las técnicas empleadas para la recolección de la información consistieron en la revisión de bibliografía, la observación participante, la entrevista a profundidad y el cuestionario. Para ubicar a los estudiantes en alguno de los niveles del modelo de Van Hiele, se analizó el tipo de respuestas que aportaron, con el propósito de identificar en cuál se encontraba, por las características o conductas que se esperaban de estos.

En este documento se expone lo referente a la implementación y los resultados de una de las actividades. En esta se pretendía que el estudiante, mediante la manipulación del software o material concreto, "comprobara" la relación que postula el teorema de Pitágoras. Esta actividad consistía en una prueba del teorema de Pitágoras, basada en la disección ideada por el matemático inglés Henry Perigal (1801–1889), la cual se expone a continuación.

Sobre el mayor de los cuadrados construidos sobre los catetos se determina el centro y se trazan dos rectas, paralela y perpendicular a la hipotenusa del triángulo. Con las cuatro piezas obtenidas más el cuadrado construido sobre el otro cateto podemos cubrir el cuadrado construido sobre la hipotenusa. (González, 2008, p. 119)

A los estudiantes del EM se les presentó una aplicación del software que contenía un triángulo rectángulo y los cuadrados construidos a partir de las medidas de sus catetos e hipotenusa (Figura 2).

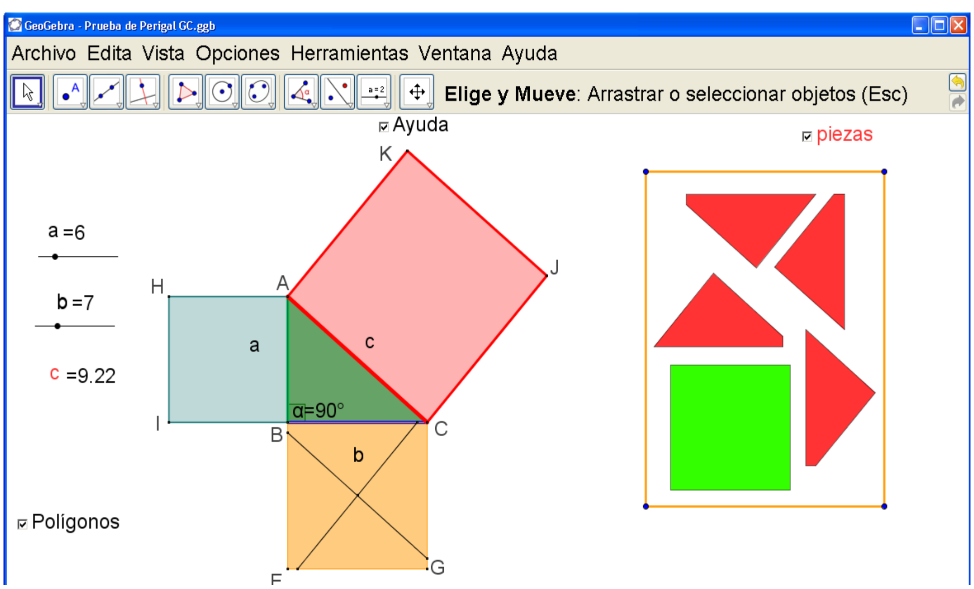


Figura 2. Aplicación presentada a los estudiantes del EM para deducir el teorema de Pitágoras

En un recuadro aparte estaban las secciones o piezas resultantes de la disección de Perigal, hecha en el cuadrado construido sobre el mayor de los catetos y la pieza correspondiente al cuadrado realizado sobre el menor de los lados del triángulo (similar a un rompecabezas). La medida de los catetos podía ser variada con la ayuda de un deslizador ubicado en la parte izquierda de la aplicación. Al realizar algún cambio sobre dichas longitudes, las secciones o piezas se modificaban en tamaño y forma.

El objetivo de esta aplicación era que los estudiantes movieran las piezas del recuadro, con ayuda del mouse, para "cubrir" los cuadrados construidos sobre los catetos (según "se ajusten") y luego las desplazaran sobre el que se construyó a partir de la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo, lo cubrieran totalmente y verificaran la relación entre las áreas de dichos cuadrados. Al ser una prueba dinámica, el estudiante podía generar múltiples familias de triángulos rectángulos en los que siempre se cumpliría la conclusión obtenida.

En el caso de los estudiantes del ET, la actividad se varió ya que no contaban con el apoyo del GeoGebra. La diferencia radicó en que a ellos se les proporcionaron las figuras dibujadas en papel para ser recortadas y manipuladas de manera que pudieran completar la actividad. Es decir, la actividad consistía en un rompecabezas que ellos debían armar siguiendo las instrucciones de la guía.

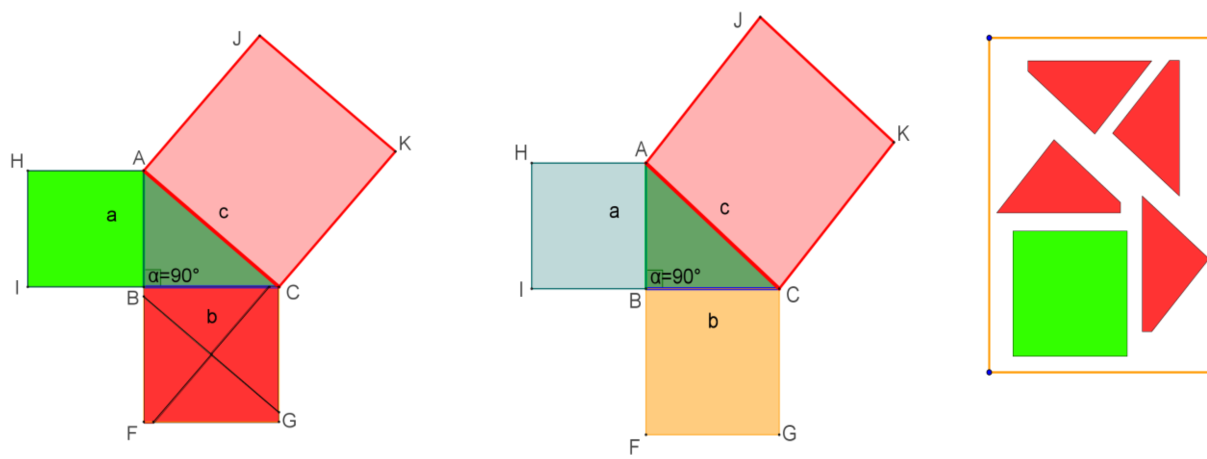


Figura 3. Figuras dibujadas en papel presentadas a los estudiantes del ET

Para este caso, los estudiantes debían recortar el □ABIH y seccionar el cuadrado □BCGF siguiendo la disección (líneas) indicada en él mismo (figura de la izquierda). Las piezas resultantes, que se muestran separadas y en el recuadro en la Figura 3, las debían emplear a modo de rompecabezas y colocarlas sobre la figura adicional proporcionada (la del centro). Para ello, primero debían cubrir el □ACKJ con dichas piezas y, luego de esto, tenían la posibilidad de cubrir los □BCGF y □ABIH para verificar que las áreas coincidían. El objetivo, al igual que en el EM, era comprobar la relación que postula del teorema de Pitágoras

ANÁLISIS

Con el desarrollo de la actividad anteriormente descrita, se esperaba que los estudiantes, al resolverla, mostraran una serie de características o conductas que les permitieran encontrar la relación que el teorema de Pitágoras establece.

A continuación se presenta el análisis del desenvolvimiento de los estudiantes seleccionados en cada uno de los grupos, las características que se esperaban por parte de los alumnos en la resolución de la actividad y el tipo de razonamiento mostrado por ellos. Es importante señalar que los nombres utilizados no corresponden al nombre real de los participantes.

Características esperadas de los estudiantes del ET

En esta actividad se esperaba que cada uno de los estudiantes del ET mostrara las siguientes características:

- ✓ Logra colocar las piezas proporcionadas sobre el □ACKJ, es decir, sobre el cuadrilátero construido sobre la hipotenusa.
- ✓ Establece una relación entre la suma de las áreas de las piezas proporcionadas y el área del □ACKJ.
- ✓ Verifica la relación de igualdad entre la medida conjunta del área de los cuadrados construidos sobre los catetos y la suma de las medidas de las áreas de las piezas proporcionadas.
- ✓ Establece una relación entre el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y el área de los cuadrados construidos sobre los catetos.
- ✓ Establece correctamente, en un triángulo rectángulo, la relación entre la medida de la hipotenusa y de los catetos, sabiendo que sus longitudes son z, x, y respectivamente.
- ✓ Expresa correctamente, desde el punto de vista matemático, sus ideas utilizando simbología adecuada.

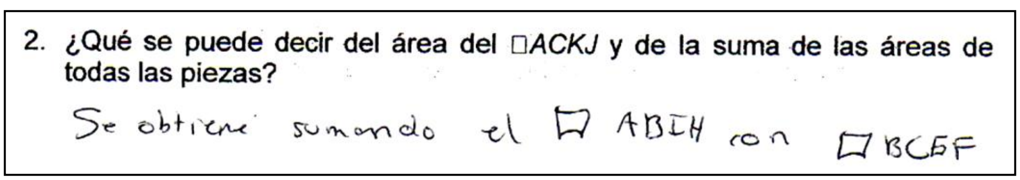
La siguiente tabla resume el logro de los estudiantes del ET, según las características descritas anteriormente:

Tabla 4
Resumen del logro de los estudiantes del ET según las características esperadas

Características / Participantes	a.	b.	c.	d.	e.	f.
David	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí
Isabel	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
María	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Mónica	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Esteban	Sí	No	No	Sí	No	Sí
Mariana	Sí	No	No	Sí	Sí	No

Análisis ET

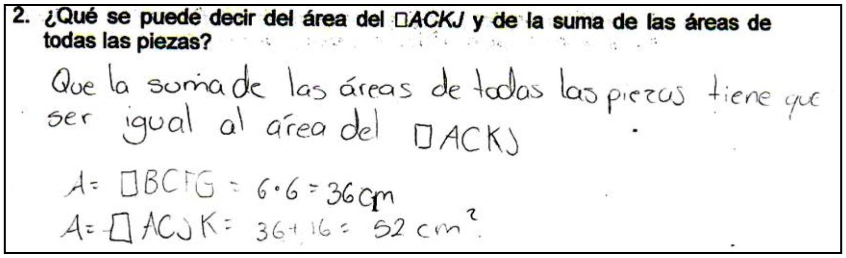
Los estudiantes debían colocar las piezas que ellos mismos recortaron, a partir de la figura que se les brindó, sobre el □ACKJ. A pesar de que todos ellos lograron colocar las piezas en su lugar, tres de los estudiantes no consiguieron establecer la relación entre el área conjunta de ellas y el área del □ACKJ. David menciona que a partir de la suma de los cuadrados □ABIH y □BCGF, se obtiene el □ACKJ, como se puede observar en la Figura 4. En esta respuesta él se refiere, probablemente, a las áreas de estos cuadrados.


2. ¿Qué se puede decir del área del □ACKJ y de la suma de las áreas de todas las piezas?

Se obtiene sumando el □ ABIH con □ BCGF

Figura 4. Respuesta de David sobre relación entre áreas en un triángulo rectángulo

Por otro lado, dos de los alumnos sí lograron llegar a la conclusión de que la suma de las áreas de las piezas proporcionadas es igual al área del □ACKJ. Isabel expresa esto de una forma clara, como se puede ver en la Figura 5.


2. ¿Qué se puede decir del área del □ACKJ y de la suma de las áreas de todas las piezas?

Que la suma de las áreas de todas las piezas tiene que ser igual al área del □ACKJ

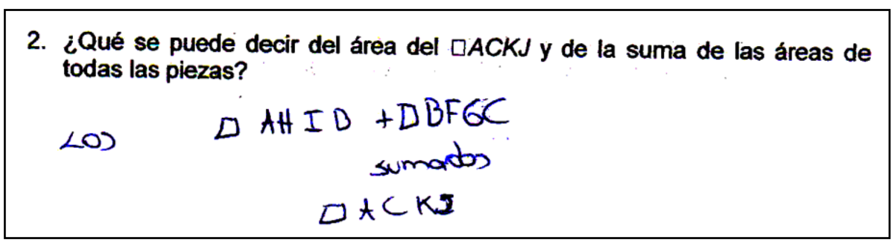
A= □BCFG = 6·6 = 36cm

A= □ACJK = 36+16 = 52 cm²

Figura 5. Respuesta de Isabel sobre relación entre áreas en un triángulo rectángulo

Se puede observar como Isabel expresa la relación existente entre la suma de las áreas de las piezas proporcionadas y el área del □ACKJ, inclusive proporciona medidas numéricas para los cuadriláteros □ABIH, □BCGF, y □ACKJ. Sin embargo, no indica a partir de dónde las obtiene.

Esteban, por su parte, aunque indica en su respuesta que la suma de los cuadriláteros □ABIH, □BCGF corresponde al □ACKJ, no se refiere a las áreas de las piezas ni a las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, como puede observarse en la Figura 6, lo que denota un error en el manejo del lenguaje matemático.


2. ¿Qué se puede decir del área del □ACKJ y de la suma de las áreas de todas las piezas?

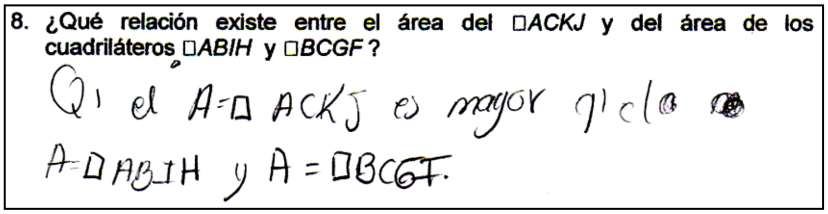
Los □ AHID +□BFGC sumados □ACKJ

Figura 6. Respuesta de Esteban sobre relación entre áreas en un triángulo rectángulo

Al observar la respuesta de Esteban, puede concluirse que tiene una idea de la relación que debe darse entre las áreas de los cuadriláteros, aunque no hace referencia directa de esta utilizando el término área. Cuando a los estudiantes se les pidió que reacomodaran las piezas recortadas sobre los cuadrados construidos con base en las medidas de los catetos, todos ellos lo realizaron sin ningún problema y verificaron que esta piezas eran "parte" de dichos cuadrados.

Posteriormente a los estudiantes se les preguntó, nuevamente, sobre la relación existente entre la medida del área de los cuadrados construidos sobre los catetos y la medida del área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo, con el propósito de verificar si a través de la actividad que estaban realizando lograban identificar que se estaban comparando las áreas de estos cuadrados. Lo que se buscaba era que los alumnos analizaran la relación en su "totalidad" y no por partes o "piezas".

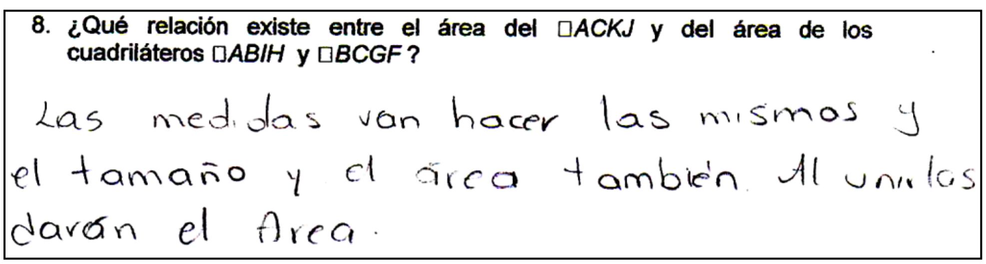
Dos de los estudiantes no establecieron esta relación. Por ejemplo, en la Figura 7 se puede observar la respuesta de María, quien establece una relación completamente diferente. Ella indica que la medida del área del cuadrado □ACKJ, construido sobre la hipotenusa, es mayor que la de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo. Esta respuesta es probablemente producto de una singular manera de entender lo que se le consultó, ya que es posible que entendiera que las debía comparar en forma individual.


8. ¿Qué relación existe entre el área del □*ACKJ* y del área de los cuadriláteros □*ABIH* y □*BCGF*?

Q1 el A=□ ACKJ es mayor q' c la
A=□ABJH y A=□BCGF.

Figura 7. Respuesta de María sobre relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados y el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa

Por otra parte, Isabel sí establece correctamente la relación entre las medidas de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo. Otros estudiantes como Mónica y Esteban también lo indican, pero a la hora de expresar su idea no lo hacen claramente, como sí se puede observar en la Figura 8.

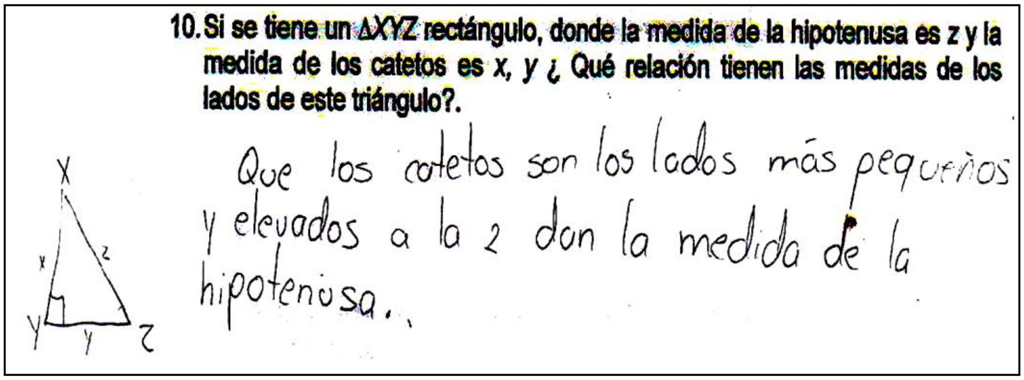

8. ¿Qué relación existe entre el área del □*ACKJ* y del área de los cuadriláteros □*ABIH* y □*BCGF*?

Las medidas van hacer las mismos y
el tamaño y el área también. Al unirlos
darán el Area.

Figura 8. Respuesta de Mónica sobre relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados y el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa

Entre algunas de las inconsistencias o errores que presentaron los estudiantes al expresar sus ideas respecto al teorema de Pitágoras se destaca la mención de conceptos erróneos –como que la suma de las medidas de los catetos es igual a la medida de la hipotenusa- y el olvido de indicar que dicha proposición solo se cumple en un triángulo rectángulo.

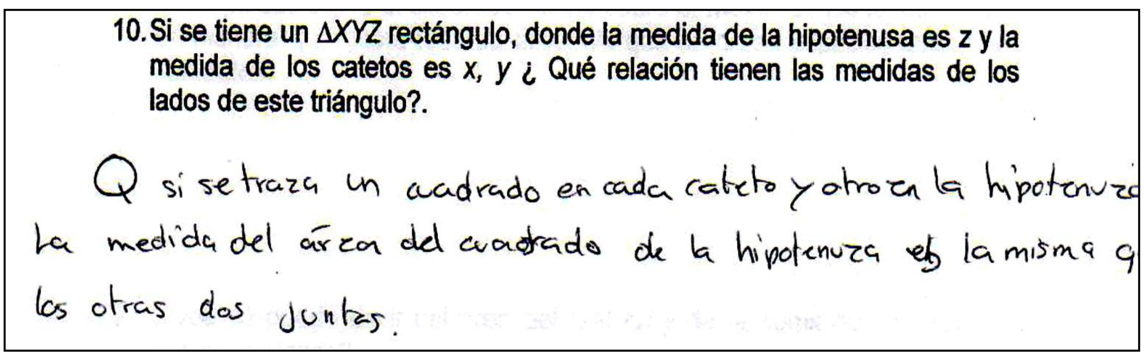
Al final de la guía se les pedía a los estudiantes indicar simbólicamente la relación aprendida para un triángulo rectángulo donde la hipotenusa y los catetos poseían longitudes z, x y y unidades lineales, respectivamente. Tres de los alumnos indican una relación correcta; sin embargo, no les es posible expresarla de una manera simbólica. Por ejemplo, aunque Isabel indica una relación entre los catetos de longitudes x, y con la hipotenusa de medida z, esta no es expresada en forma simbólica y es incorrecta (Figura 9).


10. Si se tiene un ΔXYZ rectángulo, donde la medida de la hipotenusa es z y la medida de los catetos es *x, y* ¿ Qué relación tienen las medidas de los lados de este triángulo?.

Que los catetos son los lados más pequeños y elevados a la 2 don la medida de la hipotenusa..

Figura 9. Respuesta de Isabel sobre relación de los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo

En el caso de David, él hace una apreciación correcta entre el área de los cuadrados que pueden ser trazados sobre los catetos con aquel que puede ser dibujado sobre la hipotenusa, sin expresarla de forma simbólica, como se muestra en la Figura 10.


10. Si se tiene un ΔXYZ rectángulo, donde la medida de la hipotenusa es z y la medida de los catetos es *x, y* ¿ Qué relación tienen las medidas de los lados de este triángulo?.

Q si se traza un cuadrado en cada cateto y otro en la hipotenuza La medida del área del cuadrado de la hipotenuza es la misma q los otras dos juntas.

Figura 10. Respuesta de David sobre relación los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

Características esperadas de los estudiantes del EM

Para esta actividad, las características esperadas en el EM correspondían a las mismas que se requerían del ET. La siguiente tabla resume el logro de los estudiantes del EM.

Tabla 5
Resumen del logro de los estudiantes del EM según las características esperadas

Características / Participantes	a.	b.	c.	d.	e.	f.
Carlos	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Lucía	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Raúl	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Diego	Sí	Sí	Sí	Sí	SI	No
Jimena	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Julia	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Análisis EM

Los estudiantes del EM comenzaron la actividad moviendo las piezas del rompecabezas con ayuda del mouse para adaptarse a sus posibilidades. Todos los estudiantes lograron, después de cierto periodo, realizar con éxito el primer reto que consistía en cubrir el cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo “sin que sobraran o faltaran espacios”. A partir de esta experiencia todos los estudiantes llegaron a la conclusión de que la suma de las áreas de las piezas proporcionadas era igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo. La diferencia fue la redacción que le dieron a sus respuestas.

Por ejemplo, en la Figura 11 se puede observar que Carlos indica “suma de las piezas” en lugar de señalar “la suma de las áreas de las piezas”, pero su conclusión es “correcta”. Las respuestas dadas por los otros participantes son similares y apuntan a la igualdad de las áreas entre el cuadrado □ACKJ y las piezas proporcionadas. También indican que al variar las medidas de los lados del triángulo, y por ende variar el tamaño de las piezas, siempre es posible cubrir el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo.

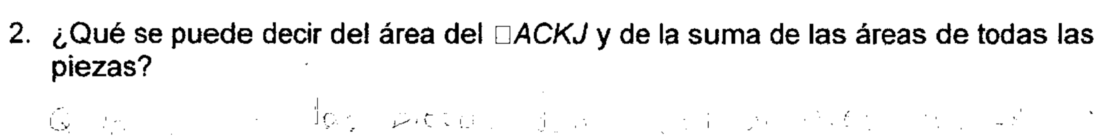
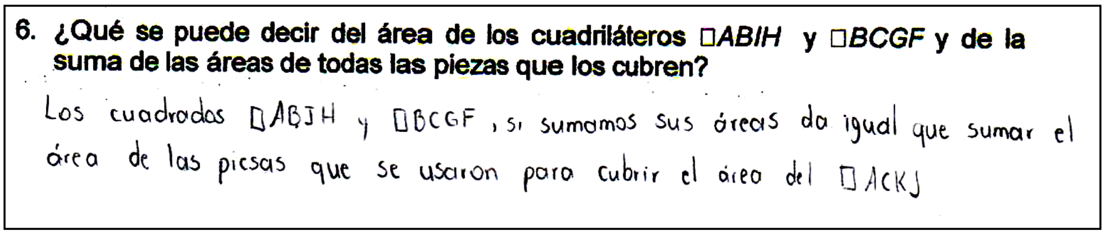

2. ¿Qué se puede decir del área del □*ACKJ* y de la suma de las áreas de todas las piezas?

Figura 11. Respuesta de Carlos sobre relación entre las piezas del rompecabezas y el cuadrado construido sobre la hipotenusa

Luego de esta actividad, los estudiantes debían mover las piezas para intentar cubrir con ellas los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo, cosa que luego de algunos ensayos, todos lograron hacer. Las conclusiones que los estudiantes extraen a partir de esto son muy similares entre sí. A continuación se exponen algunas de ellas.

Lucía, por ejemplo, expresa que la suma de las medidas de las áreas de estos cuadrados corresponde a la suma de las áreas de las piezas que se usaron para cubrir el □ACKJ, como puede observarse en la Figura 12. Es posible observar que Lucía no solo relaciona el área conjunta de las piezas con el área de los cuadrados construidos sobre los catetos, sino también con el área del cuadrado realizado sobre la hipotenusa del triángulo.


6. ¿Qué se puede decir del área de los cuadriláteros □*ABIH* y □*BCGF* y de la suma de las áreas de todas las piezas que los cubren?

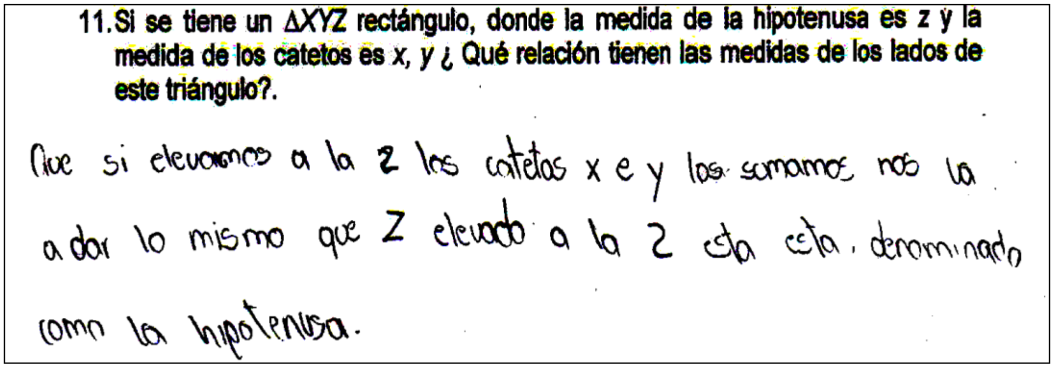
Los cuadrados □ABJH y □BCGF, si sumamos sus áreas da igual que sumar el área de las picsas que se usaron para cubrir el áreo del □ACKJ

Figura 12. Respuesta de Lucía sobre relación entre las piezas del rompecabezas y los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo

Al establecer la relación entre las medidas de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo y aquel construido sobre su hipotenusa, todos llegaron a la conclusión de que la suma de estas es igual a la medida del área del cuadrado construido sobre el lado mayor del triángulo rectángulo. Al igual que en el caso de los estudiantes del ET, los alumnos del EM insisten en afirmar que la suma de la longitud de los catetos da como resultado la longitud de la hipotenusa. Esto representa un indicio de que no todos tienen claro que se deben elevar al cuadrado las longitudes mencionadas para establecer la relación entre ellos, es decir, no logran “abstraer” el concepto de área para relacionarlo con el teorema de Pitágoras.

Es importante mencionar que, con ayuda del GeoGebra, los estudiantes tuvieron la oportunidad de variar las medidas de los catetos y la hipotenusa, y verificar que la relación hallada por ellos se seguía cumpliendo para “todos los casos”, aunque no lo pudieran expresar simbólicamente, como ya se mencionó.

Finalmente a los alumnos se les pidió que plantearan la relación existente entre los lados con medidas x, y, z de un ΔXYZ rectángulo, donde z correspondía a la medida de la hipotenusa. Tres de ellos afirman que al sumar x, y se obtiene z, Se presenta nuevamente una imprecisión entre los argumentos expuestos. Una estudiante indica que la suma de las longitudes de los catetos elevados al cuadrado corresponde a la hipotenusa y omite indicar que es la medida de la hipotenusa elevada al cuadrado. Solo dos alumnos afirmaron que al elevar al cuadrado las longitudes de los catetos y sumarlos se obtiene la medida de la hipotenusa elevada al cuadrado. Julia y Raúl son ejemplo de ello. A continuación se presenta la respuesta de Raúl (Figura 13).



11. Si se tiene un ΔXYZ rectángulo, donde la medida de la hipotenusa es z y la medida de los catetos es x, y ¿ Qué relación tienen las medidas de los lados de este triángulo?.

Que si elevamos a la 2 los catetos x e y los sumamos nos la a dar lo mismo que Z elevado a la 2 esta esta. denominado como la hipotenusa.

Figura 13. Respuesta de Raúl sobre relación entre los lados x, y, z de un ΔXYZ rectángulo donde z es la longitud de la hipotenusa

Al analizar el uso correcto del lenguaje por parte de los estudiantes para comunicar sus ideas y expresar sus conclusiones desde el punto de vista matemático, fue posible constatar que existe falta de rigurosidad en ellos ya que algunos, como Carlos, Diego y Jimena, expresan sus respuestas de forma tal que da la "impresión" de que tienen una "idea" de lo que se les solicita; sin embargo, no se cuidan de algunos detalles, por ejemplo, indicar que las medidas de los catetos y de la hipotenusa van elevadas al cuadrado. Esto puede deberse a que no están familiarizados con expresar ellos mismos conclusiones en la clase de Matemáticas.

CONCLUSIONES

A continuación se presentan las principales conclusiones obtenidas a partir de los resultados analizados en la investigación realizada una vez completadas las doce actividades en cada grupo y según los objetivos planteados en el estudio.

Sobre los objetivos de la investigación

Fue posible describir, de acuerdo con el modelo de razonamiento Geométrico de Van Hiele, el nivel de razonamiento que mostraron los estudiantes al desarrollar el tema del teorema de Pitágoras y su recíproco, apoyado con el GeoGebra. Se planteó una comparación entre el nivel de razonamiento mostrado por aquellos estudiantes que desarrollaron este con apoyo del software respecto a aquellos que estudiaron el tema con un enfoque tradicional.

También fue posible evaluar la estrategia metodológica implementada desde el punto de vista de los estudiantes participantes en estudio, los cuales manifestaron su satisfacción por haber sido parte de una experiencia de esta naturaleza. Aquellos estudiantes que desarrollaron las actividades apoyados por el GeoGebra se sintieron más motivados a estudiar Matemáticas, y en especial geometría, que aquellos que lo hicieron con el enfoque tradicional.

Es posible afirmar que el uso de software de Geometría contribuye a motivar al estudiante, además de que representa una forma nueva y atractiva de estudiar geometría.

Sobre la estrategia metodológica

El docente debe tener mucho cuidado con la elección de las preguntas que formulará a los estudiantes como parte de una estrategia didáctica, ya que estas deben guiar al estudiante a través de lo que se quiere analizar. Además, es importante que se preparen preguntas que ayuden al estudiante a poner a prueba, de diversas formas, sus descubrimientos.

La implementación de estrategias que propicien en el estudiante aprendizajes significativos requiere, de parte del docente, de una inversión de tiempo, previo a la clase, mucho mayor que para una clase tradicional. Al principio, inclusive, se avanza mucho más lento que en una clase tradicional. Sin embargo, este esfuerzo se ve compensado con los resultados que se obtienen en cuanto a la capacidad que el estudiante adquiere para analizar hechos matemáticos.

La estrategia metodológica empleada en esta investigación, con el apoyo del GeoGebra, logró hacer que muchos de los estudiantes que tenían bajas notas se motivaran a "competir" y a discutir ideas matemáticas con estudiantes que tenían mejores notas que ellos, por lo que se puede afirmar que esta estrategia ayudó a reforzar la confianza de estos en su interacción con los otros.

Sobre el uso del GeoGebra

Al usar un software como apoyo para diseñar una estrategia didáctica, se deben tomar en cuenta las limitaciones propias del programa, como la exactitud con que brinda los resultados de cálculos o medidas, ya que estas pueden provocar percepciones falsas en el estudiante y llevarlo a establecer conclusiones erróneas.

El uso del GeoGebra en el análisis de las situaciones planteadas a los estudiantes les permitió emitir juicios más acertados sobre la situación analizada que a aquellos que usaron solamente lápiz y papel. Esto puede deberse a que los primeros tuvieron la oportunidad de analizar varias representaciones del problema al mismo tiempo, lo que les permitió tener un punto de vista más amplio que aquellos que usan representaciones en lápiz y papel, ya que no les fue posible manipular sus representaciones ni analizar más que los ejemplos que se les plantearon (dos o tres como máximo).

Los estudiantes que usaron representaciones con software de geometría se sintieron más motivados a explorar, a plantear conjeturas y a probarlas, que aquellos estudiantes que usan representaciones tradicionales plasmadas con lápiz y papel. Los estudiantes expresaron que el uso del software les dio autonomía en el aula, les permitió explorar y aclarar sus dudas; además de ser algo novedoso que los sacó de la rutina del aula.

El uso del GeoGebra reforzó las apreciaciones de tipo visual hechas por los estudiantes, ya que les permitió realizar medidas directas y manipular los objetos con el fin de afirmar o desechar una apreciación realizada sobre una propiedad geométrica en una situación dada. Esto pone en ventaja a los estudiantes que utilizan este tipo de programas sobre aquellos que usan solo representaciones hechas con lápiz y papel, ya que pueden verificar si las propiedades de un objeto o representación geométrica se cumplen siempre o bajo qué condiciones.

Se pudo observar que el GeoGebra les proporcionó a los estudiantes del EM una herramienta de fuerte tendencia visual, puesto que algunos, a pesar de responder correctamente la mayoría de los cuestionamientos, no justificaron sus conclusiones más que de dicha forma. Es importante tomar esto en cuenta al planear una actividad que involucre el GeoGebra y plantear preguntas guías que le permitan al estudiante complementar la observación visual con otros argumentos que lo orienten a establecer justificaciones de sus conclusiones.

Los estudiantes participantes en el estudio evidenciaron que se les dificultaba resolver una situación generalizándola de forma simbólica. Sin embargo, estos mismos se desenvuelven bien al aplicar un algoritmo para resolver una situación similar. El uso del GeoGebra pudo haber ayudado a los estudiantes del EM a ir un poco más allá en la resolución de algunas situaciones en donde los estudiantes del ET no respondieron del todo y en las que se les pedía una argumentación lógica que justificara una situación. El GeoGebra les permitió manipular el objeto en estudio y analizar diversos ejemplos que cumplían con las características de la situación planteada y en los que podían observar cómo cambiaban las medidas del objeto y cómo se relacionaban entre sí las diversas representaciones que podía analizar, verificando, al mismo tiempo, conjeturas que surgían durante el análisis. Todo esto les brindaba un criterio un poco más amplio que les permitía resolver o intentar resolver de manera lógica la situación planteada.

La dificultad de los estudiantes participantes en el estudio para expresarse de una manera matemáticamente correcta puede ser producto de la poca o nula importancia que se le otorga al aprendizaje del lenguaje matemático en los diferentes niveles escolares. La experiencia obtenida al observar el desempeño de los estudiantes, cuando resolvían las diferentes actividades, evidenció que, en muchas ocasiones, la razón principal de no responder a un cuestionamiento correspondía, precisamente, al mal manejo o a la falta de vocabulario necesario para expresar sus ideas correctamente. Por esta razón, coincidimos con lo afirmado por Goncalves (2006) en cuanto al modelo de razonamiento planteado por Van Hiele, en el sentido de que la organización del lenguaje se va construyendo de forma conjunta con la estructuración geométrica visual y abstracta del pensamiento. Por lo que el profesor tendrá que conocer el nivel de dominio del lenguaje geométrico de sus alumnos, para adaptarse a este, y procurar que él avance en complejidad hacia uno más estructurado y abstracto.

Referencias

Alfaro, A. (2003). Rendimiento por temas en las pruebas nacionales de matemáticas en tercer ciclo y bachillerato. *UNICIENCIA*, *20*(1), 157-167, Universidad Nacional.

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para ESO*. Madrid, España: Síntesis.

Barrantes, H. (2003). Pruebas nacionales de Matemáticas: resultados y opiniones. *UNICIENCIA*, *20*(1), 149-156, Universidad Nacional.

Barrantes, H. y Alfaro, C. (2003). El Bachillerato de Matemática 2003: Un debate relevante. *UNICIENCIA*, *20*(1), 169-180, Universidad Nacional.

Barreto, J. (2009). Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas 70*, 35-51. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_01.pdf

Beltrametti, M., Esquivel, M. y Ferrarri, E. (2005). *Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes de Profesorado en Matemática*. Recuperado de http://www.unne.edu.ar/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-019.pdf

Dalcín, M. (2007). Reciproco de Pitágoras. En Soarem (Organizadora) Trabajo realizado en el marco del curso *Enseñar geometría con su historia-desde los orígenes hasta la edad media*, impartido por las profesoras Irene Zapico y Silvia Tajeyan. Modalidad virtual, marzo-abril de 2007. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/34%20Dalcin.pdf

Fouz, F. y De Donosti, B. (2005). *Modelo del Van Hiele para la didáctica de la geometría. Un paseo por la geometría*. Recuperado de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf

Goncalves, R. (2006). Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en geometría. *Revista de Ciencias de la Educación*, *27*, 84-98. Universidad de Carabobo, Venezuela.

González, P. (2008). Un teorema llamado de Pitágoras. *Sigma Revista de Matemáticas*, *32*(8), 103-130. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_32/8_pitagoras.pdf

Gurrola, F. y Jáuregui, R. (2008). Didáctica del teorema de Pitágoras. En R. Cantoral, F. Fasarelli, A. Garciadiego, A; R. Stein, C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of History and Pedagogy of Mathematics, The HPM Satellite Meeting of IMCE 11 [Actas de Historia y Pedagogía de las Matemáticas, La HPM Reunión Mundial del ICME*]. México: Centro Cultural del México

Contemporáneo. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/Gustavo/HPM_Proceddings_Extenso.pdf

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1991). El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática, 3*(2), 49-65.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrias en el plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia, España.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels [Un modelo para evaluar los niveles de Van Hiele]. En J. da Ponte & J. Matos (Eds.), *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME-18th) [Actas de la Conferencia Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME-18th)]*, 41-48. Lisboa, Portugal.

Ministerio de Educación Pública. (1999). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Tercer ciclo.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2000). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Tercer ciclo.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2001). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Tercer ciclo.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2002). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Tercer ciclo.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2003a). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Bachillerato.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2003b). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Tercer ciclo.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2004). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Bachillerato.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2005). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Bachillerato.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2006). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Bachillerato.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2007). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Bachillerato.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica

Ministerio de Educación Pública. (2008). *Informe nacional: Resultados de las pruebas nacionales de la educación formal. Bachillerato.* Departamento de Estadística y División de Control de Calidad y Macroevaluación del Sistema Educativo. San José, Costa Rica

Murillo, M. (2003). Los programas de Matemática en la enseñanza secundaria: Lo que los profesores opinan. *UNICIENCIA, 20*(1), 19-26, Universidad Nacional.

Ruiz, H. (2000). ¿Cómo y que se recuerda del teorema de Pitágoras? *Ciencia y Desarrollo, 26,* 151, 67-73, México. Recuperado de http://www.conacyt.mx/comunicacion/revista/218/Articulos/CyD151mar-abr2000.pdf