REVISTA DE CIENCIAS

ZUBÍA

MONOGRÁFICO

26

Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA. MONOGRÁFICO
REVISTA DE CIENCIAS.
Nº 26 (2014). Logroño (España).
P. 1-235, ISSN: 1131-5423

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN

Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26071 Logroño
publicaciones.ier@larioja.org

Suscripción anual España (1 número y monográfico): 15 €
Suscripción anual extranjero (1 número y monográfico): 20 €
Número suelto: 9 €
Número monográfico: 9 €

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

Monográfico Núm. 26

Investigación en el
Departamento de Matemáticas y Computación
de la Universidad de La Rioja

Coordinadores
Óscar Ciaurri Ramírez y Luis Español González

Gobierno de La Rioja
Instituto de Estudios Riojanos
LOGROÑO
2014

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja / coordinadores, Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González. -- Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2014
235 p. : gráf. ; 24 cm -- (Zubía. Monográfico, ISSN 1131-5423; 26). -- D.L. LR 413-2012

1. Universidad de La Rioja - Departamento de Matemáticas y Computación. I. Ciaurri Ramírez, Óscar. II. Español González, Luis. III. Instituto de Estudios Riojanos. IV. Serie

167 (460.21)
51:37.02 (460.21)

Producción gráfica: Gráficas Isasa S.L. (Arnedo, La Rioja)

ISSN 1131-5423
Depósito Legal: LR 413-2012

Impreso en España - Printed in Spain

ÍNDICE

Zubía. Monográfico 26 13–18 Logroño 2014

ESPACIOS DE FUNCIONES DERIVABLES

JOSÉ LUIS ANSORENA[1]

RESUMEN

Analizamos el contexto en el que los espacios de Besov fueron introducidos y explicamos la aportación del autor a su conocimiento.

Palabras clave: Análisis funcional, funciones diferenciables, espacios de Besov.

We analyze the mathematical context in which Besov spaces were introduced and we explain the contribution of the author to the knowledge those spaces.

Key words: *Functional Analysis, differentiable functions, Besov spaces.*

1. EL CONCEPTO DE TAMAÑO DE UNA FUNCIÓN

Jean Dieudonné, matemático francés miembro del grupo Bourbaki, en el prólogo a la edición original del tratado *Calcul infinitésimal* [8, página 15] dijo, en traducción libre, que «Los objetivos del Análisis Matemático podrían resumirse en tres palabras: mayorar, minorar y aproximar». En realidad, la diferencia entre mayorar y minorar está más en el punto de vista que en el concepto, que en ambos casos coincide con lo que los matemáticos llamamos acotar. De manera que, según Jean Dieudonné, podríamos resumir el Análisis Matemático en dos palabras: acotar y aproximar.

Si trabajamos en el ámbito de los números reales es sencillo hacernos una idea acerca de qué estamos considerando. Acotar es hacer (para ser más preciso, demostrar) desigualdades y aproximar es hacer límites. Sin embargo, sobre todo a partir del siglo XX, los científicos llegaron a la conclusión de que para desarrollar muchas de las ideas que aparecen en las Matemáticas son necesarios conjuntos más sofisticados. En el contexto del Análisis Matemático comienzan a estudiarse conjuntos cuyos elementos son funciones. Son los llamados *espacios de funciones*. Su

1. Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)
Correo electrónico: `joseluis.ansorena@unirioja.es`

estudio toma un gran impulso partir de la tesis doctoral de Henri Lebesgue *Intégrale, longueur, aire*, defendida en 1902 (ver [10]), hasta el punto de originar una rama del Análisis Matemático, el llamado *Análisis Funcional*, cuya base fue establecida, sobre todo, por Stephen Banach en su tratado *Théorie des opérations linéaires* [6], publicado en 1932.

Si queremos hacer Análisis Matemático (es decir, acotar y aproximar) dentro de espacios de funciones necesitamos una medida del tamaño de las funciones. Y enseguida nos damos cuenta de que no hay una única manera de *calibrar* funciones. Quizás la forma más sencilla sea fijar nuestra atención en los mayores valores que toma la función. Es decir, a cada función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ le asignamos el número, que denotamos $||f||_\infty$, definido mediante

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Un lector crítico puede argumentar que este calibrador (*norma* en la jerga matemática) desprecia qué sucede con la función en muchas zonas de la recta real. Si le hacemos caso, nos vemos obligados a introducir una norma en la que todos los valores que toma la función contribuyan. La noción de integral nos permite definir uno adecuado a este propósito. A cada función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ le asignamos

$$||f||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

Si tenemos en cuenta que quizás no todas las zonas de la recta real tengan la misma importancia (o sea, la densidad puede ser variable), debemos introducir una función de ponderación (que llamamos w) para calcular el tamaño. Obtenemos la norma

$$||f||_{1,w} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|w(x)\,dx.$$

Sin embargo, Ernst Fischer y Frigyes Riesz se dieron cuenta (ver sus trabajos de 1907 [9, 13]) de que los espacios funcionales con mejores propiedades —y con una teoría más útil y sencilla— son los espacios de Hilbert $L_2(w)$, formados por funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ para los que la norma dada por

$$||f||_{2,w} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 w(x)\,dx\right)^{1/2}$$

es finita. También interesante y útil es la gama de espacios $L_p(w)$, introducida por Frigyes Riesz en 1909 en [14], donde p es un índice positivo cualquiera y la norma considerada es

$$||f||_{p,w} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

A decir verdad, cuando el índice p es menor que uno, el calibrador de arriba ya no es una norma sino una *cuasi-norma* (y lo mismo ocurrirá más adelante en otros casos), pero éste es un detalle en el que no insistiremos.

Núm. 26 (2014), pp. 13–18
ISSN 1131-5423
Zubía Monográfico



De izquierda a derecha, Frigyes Riesz, Stephen Banach y Oleg Vladimirovich Besov.

Estos espacios de funciones tienen su versión discreta, cuando consideramos en lugar de funciones de variable real funciones de variable discreta, o sea sucesiones. Ahora tomamos una sucesión de ponderación $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots)$ y un índice $0 < p < \infty$. A cada sucesión $\alpha = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ le asignamos el número

$$||\alpha||_{p,w} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p w_n \right)^{1/p}.$$

En realidad, hacer tanto sumas infinitas como integrales son operaciones que pueden enmarcarse dentro de la integración abstracta introducida por Johann Radon en 1913 en [12], de modo que estos espacios de sucesiones para los que esta norma es finita también están incluidos en la gama de espacios L_p.

Además, en Matemáticas aparecen de manera natural funciones de varias variables. Si observamos que las variables involucradas pueden tener *diferente naturaleza* es razonable considerar espacios en los que el calibrador utilizado en una de las variables sea diferente al calibrador utilizado en la otra. Llegamos así a los espacios de norma mixta. Por ejemplo, para una función de dos variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, consideramos dos funciones de densidad w_0, w_1, y dos índices p_0, p_1, y definimos la norma

$$||f||_{p_0,p_1,w_0,w_1} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(s,t)|^{p_1} w_1(t)\, dt \right)^{p_0/p_1} w_0(s)\, ds \right)^{1/p_0}.$$

2. FUNCIONES DERIVABLES

Gran parte de las ecuaciones funcionales se expresan en términos de variaciones infinitesimales de la función incógnita, es decir, de derivadas. Los matemáticos sabemos que es posible controlar (acotar) el tamaño de una función a partir del tamaño de su función derivada pero que, en general, no puede controlarse el tamaño de la derivada a partir del de la función (las funciones analíticas constituyen una bella excepción a este principio). De manera que incluir derivadas añade un ingrediente nuevo en el juego de los espacios de funciones.

Podría decirse que toda mi labor investigadora se ha centrado en el estudio de la derivación, es decir, en estudiar espacios de funciones definidos mediante derivadas. Permitidme que, olvidando otros aspectos, os hable de mi contribución al estudio de los espacios de Besov, un tipo de espacios clásico en el contexto de los espacios de funciones derivables. Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ consideramos su función incremental

$$\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$$

y, para controlar su tamaño y el de sus derivadas, consideramos la norma mixta

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} w^{-p_0}(|t|) \left| \Delta_t f^{(m)}(x) \right|^{p_0} dx \right)^{p_0/p_1} dt \right)^{1/p_0},$$

donde p_0, p_1 son índices positivos quizás infinitos (en cuyo caso debemos considerar la norma del supremo), $m \in \mathbb{N}$, y w es una cierta función de ponderación. Usualmente la función de ponderación considerada es una función *potencial*, de la forma $w(t) = |t|^a$ con $0 \le a < 1$, de modo que $m + a$ representa el *grado de derivabilidad* de las funciones del espacio. Este tipo de espacios fueron introducidos por Oleg Vladimirovich Besov en 1961 en [7]. Si consideramos otro tipo de ponderaciones obtenemos los *espacios de Besov de derivabilidad generalizada*, que fueron introducidos en mi tesis doctoral [2].

El manejo de espacios definidos a través de derivadas o incrementos no es sencillo. Por ello es importante, para su comprensión y uso, disponer de descripciones alternativas (caracterizaciones) de estos espacios. Nosotros nos centraremos en descripciones de tres tipos:

- **Caracterizaciones de Littlewood-Paley.** Fijamos una función, que llamamos ϕ, con buenas propiedades. Intentamos dar una caracterización del espacio en la que, en lugar del tamaño de la función incremental de las funciones f, consideramos el tamaño de las *convoluciones*

  $$F(t,x) = \phi_t * f(x) = t \int_{-\infty}^{\infty} \phi(ty) f(x-y)\, dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

  Es decir, perseguimos expresar la pertenencia de la función f al espacio de Besov en términos de que una adecuada norma mixta de la función F sea finita. En la versión discreta de este tipo de resultados, caracterizamos la pertenencia de f al espacio de Besov en términos de una norma mixta calculada sobre $\phi_{2^j} * f(x)$ ($j \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$).

- **Descripciones en términos de análisis multiresolución.** Consideramos la función madre, que llamamos ψ, de una base de ondículas hilbertiana, en el sentido introducido por Pierre Gilles Lemarié y Yves Meyer en [11]. A partir de esta función madre construimos, mediante traslación y dilatación, la base de ondículas

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbb{Z}.$$

Toda función f (para ser más preciso, toda distribución temperada, concepto popularizado por Laurent Schwartz, ver [15]) tiene una expresión única como una suma infinita

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}$$

para unos ciertos coeficientes reales $c_{j,k}$, de modo que podemos intentar describir el tamaño de f en términos del tamaño de la sucesión de coeficientes, es decir, calculando una adecuada norma mixta sobre la sucesión doble $(c_{j,k})$.

- **Descomposiciones atómicas.** Un intervalo diádico es un intervalo de la forma $2^j[k,k+1]$, donde j y k son números enteros. Un átomo asociado a este intervalo (o sea, un (j,k)-átomo) es una función indefinidamente derivable con una cantidad suficiente de momentos nulos, de tamaño acotado y que es nula lejos del intervalo. Puesto que los átomos son funciones fácilmente manejables, es interesante caracterizar las funciones en un cierto espacio como aquéellas que pueden escribirse como una suma infinita de la forma

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}a_{j,k},$$

donde cada $a_{j,k}$ es un (j,k)-átomo y la sucesión de coeficientes $(c_{j,k})$ tiene una cierta condición de tamaño, expresada de nuevo como una norma mixta.

Resultados en esta línea logrados con mi aportación, y aplicaciones de los mismos, para espacios de Besov de derivabilidad generalizada, pueden encontrarse en los trabajos [3, 4, 5].

En Matemáticas, siempre que aparece un concepto (un tipo de conjuntos que tienen una determinada *estructura*) tenemos que considerar las aplicaciones biyectivas que conservan la estructura (es decir, los isomorfismos). Los conjuntos estudiados en el Análisis Funcional son espacios vectoriales en los que hay una noción de aproximación (o, lo que es lo mismo, una noción de continuidad). El marco más general que engloba su estudio es el de los llamados *espacios vectoriales topológicos*. Los isomorfismos, en este marco, son las aplicaciones lineales continuas y con inversa continua. Los espacios de Besov se engloban dentro de la clase más usual y estudiada de espacios vectoriales topológicos, la de los llamados espacios quasi-Banach. Desde un punto de vista teórico, es interesante identificar, o distinguir, mediante isomorfismo, los espacios de Besov. Este avance, en el que he participado, ha sido realizado recientemente:

Teorema (Ver [1]). *Dos espacios de Besov de derivabilidad generalizada son isomorfos si y sólo si los índices p_0, q_0 de ambos espacios coinciden. En particular el grado de derivabilidad no interviene en la clase por isomorfismo de los espacios.*

REFERENCIAS

[1] F. Albiac y J. L. Ansorena, On the mutually non isomorphic $\ell_p(\ell_q)$ spaces II, *Math. Nachr.* (en prensa).

[2] J. L. Ansorena, *Teoría de pesos y descomposiciones atómicas en espacios de funciones*, Tesis Doctoral, Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, Serie II, Sección 2, Zaragoza, 1994.

[3] J. L. Ansorena y Ó. Blasco, Characterization of weighted Besov spaces, *Math. Nachr.* **171** (1995), 5–17.

[4] J. L. Ansorena y Ó. Blasco, Atomic decomposition of weighted Besov spaces, *J. London Math. Soc. (2)* **53** (1996), 127–140.

[5] J. L. Ansorena y Ó. Blasco, Convolution multipliers on weighted Besov spaces, *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)* **4** (1998), 47–68.

[6] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, reimpresión del original de 1932, Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993.

[7] O. V. Besov, Investigation of a class of function spaces in connection with imbedding and extension theorems, *Trudy. Mat. Inst. Steklov.* **60** (1961), 42–81 (en ruso).

[8] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968.

[9] F. Fischer, Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Paris* **144** (1907), 1022–1024.

[10] H. L. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions, primitives professées au Collège de France*, reimpresión del original de 1932, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[11] P. G. Lemarié y Y. Meyer, Ondelettes et bases hilbertiennes, *Rev. Mat. Iberoamericana* **2** (1986), 1–18.

[12] J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl. Abteilung IIa* **122** (1913), 1022–1024.

[13] F. Riesz, Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C. R. Acad. Paris* **144** (1907), 615–619.

[14] F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.* **69** (1909), 449–497.

[15] L. Schwartz, Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques, *Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.)* **21** (1945), 57–74.

ZUBÍA

26

Gobierno de La Rioja
www.larioja.org

Instituto de Estudios Riojanos