

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

MONOGRÁFICO

26

ier

Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA. MONOGRÁFICO
REVISTA DE CIENCIAS.
Nº 26 (2014). Logroño (España).
P. 1-235, ISSN: 1131-5423



DIRECTORA

Purificación Ruiz Flaño

CONSEJO DE REDACCIÓN

Luis Español González
Rubén Esteban Pérez
Rafael Francia Verde
Juana Hernández Hernández
Luis Miguel Medrano Moreno
Patricia Pérez-Matute
Enrique Requeta Loza
Rafael Tomás Las Heras

CONSEJO CIENTÍFICO

José Antonio Arizaleta Urarte
(Instituto de Estudios Riojanos)
José Arnáez Vadillo
(Universidad de La Rioja)
Susana Caro Calatayud
(Instituto de Estudios Riojanos)
Eduardo Fernández Garbayo
(Universidad de La Rioja)
Rosario García Gómez
(Universidad de La Rioja)
José M.ª García Ruiz
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)
Javier Guallar Otazua
(Universidad de La Rioja)
Teodoro Lasanta Martínez
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)
Joaquín Lasierra Cirujeda
(Hospital San Pedro, Logroño)
Luis Lopo Carramiñana
(Dirección General de Medio Natural del Gobierno de La Rioja)
Fernando Martínez de Toda
(Universidad de La Rioja)
Alfredo Martínez Ramírez
(Centro de Investigación Biomédica de La Rioja –CIBIR–)
Juan Pablo Martínez Rica
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)
José Luis Nieto Amado
(Universidad de Zaragoza)
José Luis Peña Monné
(Universidad de Zaragoza)
Félix Pérez-Lorente
(Universidad de La Rioja)
Diego Troya Corcuera
(Instituto Politécnico y Universidad Estatal de Virginia, Estados Unidos)
Eduardo Viladés Juan
(Hospital San Pedro, Logroño)
Carlos Zaldívar Ezquerro
(Dirección General de Medio Natural del Gobierno de La Rioja)

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN

Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26071 Logroño
publicaciones.ier@larioja.org

Suscripción anual España (1 número y monográfico): 15 €
Suscripción anual extranjero (1 número y monográfico): 20 €
Número suelto: 9 €
Número monográfico: 9 €

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

Monográfico Núm. 26

INVESTIGACIÓN EN EL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN
DE LA UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Coordinadores

ÓSCAR CIAURRI RAMÍREZ Y LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ



Gobierno de La Rioja
Instituto de Estudios Riojanos
LOGROÑO

2014

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja / coordinadores, Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González. -- Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2014

235 p. : gráf. ; 24 cm -- (Zubía. Monográfico, ISSN 1131-5423; 26). -- D.L. LR 413-2012

1. Universidad de La Rioja - Departamento de Matemáticas y Computación. I. Ciaurri Ramírez, Óscar. II. Español González, Luis. III. Instituto de Estudios Riojanos. IV. Serie

167 (460.21)

51:37.02 (460.21)

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse ni transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electro-óptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito de los titulares del copyright.

- © Logroño, 2014
Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26001-Logroño, La Rioja (España)
- © Diseño del interior: Juan Luis Varona (Universidad de La Rioja), a partir de los archivos LaTeX proporcionados por los autores.
- © Imagen de la cubierta: Composición fractal realizada por *José Pérez Valle*.
- © Imagen de la contracubierta: Fotografía de la Nebulosa Trífida (M20), en la constelación de Sagitario, tomada en Murillo de Río Leza por la *Agrupación Astronómica de La Rioja* el 25 de agosto de 2014.

Producción gráfica: Gráficas Isasa S.L. (Arnedo, La Rioja)

ISSN 1131-5423

Depósito Legal: LR 413-2012

Impreso en España - Printed in Spain

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González (*Coordinadores*) 7–9

PRÓLOGO

José Luis Ansorena (*Director del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja*) 11–12

JOSÉ LUIS ANSORENA

Espacios de funciones derivables
Spaces of differentiable functions 13–18

JESÚS ARANSAY, JOSÉ DIVASÓN, CÉSAR DOMÍNGUEZ,
FRANCISCO GARCÍA, JÓNATHAN HERAS, ARTURO JAIME,
LAUREANO LAMBÁN, ELOY MATA, GADEA MATA, JUAN JOSÉ OLARTE,
VICO PASCUAL, BEATRIZ PÉREZ, ANA ROMERO, ÁNGEL LUIS RUBIO,
JULIO RUBIO, EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN

Informática para las Matemáticas, Matemáticas para la Informática,
Informática Aplicada
*Computer Science for Mathematics, Mathematics for Computer Science,
Applied Computer Science* 19–37

ALBERTO ARENAS, ÓSCAR CIAURRI, EDGAR LABARGA,
LUZ RONCAL, JUAN LUIS VARONA

Series de Fourier no trigonométricas: una perspectiva familiar
Nontrigonometric Fourier series: a familiar point of view 39–54

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ, JUDIT MÍNGUEZ CENICEROS

Aproximación racional y polinomios ortogonales
Rational approximation and orthogonal polynomials 55–76

PILAR BENITO, DANIEL DE-LA-CONCEPCIÓN, JESÚS LALIENA,
SARA MADARIAGA, JOSÉ M. PÉREZ-IZQUIERDO

Algunos aspectos del álgebra no asociativa
Some aspects on nonassociative algebra 77–96

**ROBERTO CASTELLANOS FONSECA, CLARA JIMÉNEZ-GESTAL,
JESÚS MURILLO RAMÓN**
Didáctica de la Matemática: cuándo el cómo cuenta tanto (casi) como el qué
Mathematics Education: when how is (almost) as important as what 97–117

LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ
Investigaciones sobre Julio Rey Pastor realizadas desde La Rioja
entre 1982 y 2000
*Researches about Julio Rey Pastor made from La Rioja
between 1982 and 2000* 119–141

**JOSÉ IGNACIO EXTREMIANA ALDANA, LUIS JAVIER HERNÁNDEZ PARICIO,
MARÍA TERESA RIVAS RODRÍGUEZ**
Modelos de Quillen, espacios y flujos exteriores y algunas aplicaciones
Quillen models, exterior spaces and flows, and some applications 143–164

**JOSÉ ANTONIO EZQUERRO, DANIEL GONZÁLEZ,
JOSÉ MANUEL GUTIÉRREZ, MIGUEL ÁNGEL HERNÁNDEZ-VERÓN,
ÁNGEL ALBERTO MAGREÑÁN, NATALIA ROMERO, MARÍA JESÚS RUBIO**
Resolución de ecuaciones no lineales mediante procesos iterativos
Solving nonlinear equations by iterative processes 165–200

**MANUEL IÑARREA, WAFAA KANAAN, VÍCTOR LANCHARES,
ANA ISABEL PASCUAL, JOSÉ PABLO SALAS**
Sistemas dinámicos: de los átomos al sistema solar
Dynamical systems: from the atoms to the solar system 201–219

JAVIER PÉREZ LÁZARO
Regularidad de la función maximal de Hardy-Littlewood
Regularity of the Hardy-Littlewood maximal function 221–227

ESPACIOS DE FUNCIONES DERIVABLES

JOSÉ LUIS ANSORENA¹

RESUMEN

Analizamos el contexto en el que los espacios de Besov fueron introducidos y explicamos la aportación del autor a su conocimiento.

Palabras clave: Análisis funcional, funciones diferenciables, espacios de Besov.

We analyze the mathematical context in which Besov spaces were introduced and we explain the contribution of the author to the knowledge those spaces.

Key words: Functional Analysis, differentiable functions, Besov spaces.

1. EL CONCEPTO DE TAMAÑO DE UNA FUNCIÓN

Jean Dieudonné, matemático francés miembro del grupo Bourbaki, en el prólogo a la edición original del tratado *Calcul infinitésimal* [8, página 15] dijo, en traducción libre, que «Los objetivos del Análisis Matemático podrían resumirse en tres palabras: mayorar, minorar y aproximar». En realidad, la diferencia entre mayorar y minorar está más en el punto de vista que en el concepto, que en ambos casos coincide con lo que los matemáticos llamamos acotar. De manera que, según Jean Dieudonné, podríamos resumir el Análisis Matemático en dos palabras: acotar y aproximar.

Si trabajamos en el ámbito de los números reales es sencillo hacernos una idea acerca de qué estamos considerando. Acotar es hacer (para ser más preciso, demostrar) desigualdades y aproximar es hacer límites. Sin embargo, sobre todo a partir del siglo XX, los científicos llegaron a la conclusión de que para desarrollar muchas de las ideas que aparecen en las Matemáticas son necesarios conjuntos más sofisticados. En el contexto del Análisis Matemático comienzan a estudiarse conjuntos cuyos elementos son funciones. Son los llamados *espacios de funciones*. Su

1. Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)
Correo electrónico: jose.luis.ansorena@unirioja.es

estudio toma un gran impulso partir de la tesis doctoral de Henri Lebesgue *Intégrale, longueur, aire*, defendida en 1902 (ver [10]), hasta el punto de originar una rama del Análisis Matemático, el llamado *Análisis Funcional*, cuya base fue establecida, sobre todo, por Stephen Banach en su tratado *Théorie des opérations linéaires* [6], publicado en 1932.

Si queremos hacer Análisis Matemático (es decir, acotar y aproximar) dentro de espacios de funciones necesitamos una medida del tamaño de las funciones. Y enseguida nos damos cuenta de que no hay una única manera de *calibrar* funciones. Quizás la forma más sencilla sea fijar nuestra atención en los mayores valores que toma la función. Es decir, a cada función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le asignamos el número, que denotamos $\|f\|_\infty$, definido mediante

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Un lector crítico puede argumentar que este calibrador (*norma* en la jerga matemática) desprecia qué sucede con la función en muchas zonas de la recta real. Si le hacemos caso, nos vemos obligados a introducir una norma en la que todos los valores que toma la función contribuyan. La noción de integral nos permite definir uno adecuado a este propósito. A cada función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le asignamos

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Si tenemos en cuenta que quizás no todas las zonas de la recta real tengan la misma importancia (o sea, la densidad puede ser variable), debemos introducir una función de ponderación (que llamamos w) para calcular el tamaño. Obtenemos la norma

$$\|f\|_{1,w} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| w(x) dx.$$

Sin embargo, Ernst Fischer y Frigyes Riesz se dieron cuenta (ver sus trabajos de 1907 [9, 13]) de que los espacios funcionales con mejores propiedades —y con una teoría más útil y sencilla— son los espacios de Hilbert $L_2(w)$, formados por funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para los que la norma dada por

$$\|f\|_{2,w} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 w(x) dx \right)^{1/2}$$

es finita. También interesante y útil es la gama de espacios $L_p(w)$, introducida por Frigyes Riesz en 1909 en [14], donde p es un índice positivo cualquiera y la norma considerada es

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}.$$

A decir verdad, cuando el índice p es menor que uno, el calibrador de arriba ya no es una norma sino una *cuasi-norma* (y lo mismo ocurrirá más adelante en otros casos), pero éste es un detalle en el que no insistiremos.



De izquierda a derecha, Frigyes Riesz, Stephen Banach y Oleg Vladimirovich Besov.

Estos espacios de funciones tienen su versión discreta, cuando consideramos en lugar de funciones de variable real funciones de variable discreta, o sea sucesiones. Ahora tomamos una sucesión de ponderación $w = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots)$ y un índice $0 < p < \infty$. A cada sucesión $\alpha = (a_1, \dots, a_n, \dots)$ le asignamos el número

$$\|\alpha\|_{p,w} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p w_n \right)^{1/p}.$$

En realidad, hacer tanto sumas infinitas como integrales son operaciones que pueden enmarcarse dentro de la integración abstracta introducida por Johann Radon en 1913 en [12], de modo que estos espacios de sucesiones para los que esta norma es finita también están incluidos en la gama de espacios L_p .

Además, en Matemáticas aparecen de manera natural funciones de varias variables. Si observamos que las variables involucradas pueden tener *diferente naturaleza* es razonable considerar espacios en los que el calibrador utilizado en una de las variables sea diferente al calibrador utilizado en la otra. Llegamos así a los espacios de norma mixta. Por ejemplo, para una función de dos variables $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, consideramos dos funciones de densidad w_0, w_1 , y dos índices p_0, p_1 , y definimos la norma

$$\|f\|_{p_0,p_1,w_0,w_1} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(s,t)|^{p_1} w_1(t) dt \right)^{p_0/p_1} w_0(s) ds \right)^{1/p_0}.$$

2. FUNCIONES DERIVABLES

Gran parte de las ecuaciones funcionales se expresan en términos de variaciones infinitesimales de la función incógnita, es decir, de derivadas. Los matemáticos sabemos que es posible controlar (acotar) el tamaño de una función a partir del tamaño de su función derivada pero que, en general, no puede controlarse el tamaño de la derivada a partir del de la función (las funciones analíticas constituyen

una bella excepción a este principio). De manera que incluir derivadas añade un ingrediente nuevo en el juego de los espacios de funciones.

Podría decirse que toda mi labor investigadora se ha centrado en el estudio de la derivación, es decir, en estudiar espacios de funciones definidos mediante derivadas. Permittedme que, olvidando otros aspectos, os hable de mi contribución al estudio de los espacios de Besov, un tipo de espacios clásico en el contexto de los espacios de funciones derivables. Dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ consideramos su función incremental

$$\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$$

y, para controlar su tamaño y el de sus derivadas, consideramos la norma mixta

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-p_0}(|t|) |\Delta_t f^{(m)}(x)|^{p_0} dx \right)^{p_0/p_1} dt \right)^{1/p_0},$$

donde p_0, p_1 son índices positivos quizás infinitos (en cuyo caso debemos considerar la norma del supremo), $m \in \mathbb{N}$, y ω es una cierta función de ponderación. Usualmente la función de ponderación considerada es una función *potencial*, de la forma $\omega(t) = |t|^a$ con $0 \leq a < 1$, de modo que $m+a$ representa el *grado de derivabilidad* de las funciones del espacio. Este tipo de espacios fueron introducidos por Oleg Vladimirovich Besov en 1961 en [7]. Si consideramos otro tipo de ponderaciones obtenemos los *espacios de Besov de derivabilidad generalizada*, que fueron introducidos en mi tesis doctoral [2].

El manejo de espacios definidos a través de derivadas o incrementos no es sencillo. Por ello es importante, para su comprensión y uso, disponer de descripciones alternativas (caracterizaciones) de estos espacios. Nosotros nos centraremos en descripciones de tres tipos:

- **Caracterizaciones de Littlewood-Paley.** Fijamos una función, que llamamos ϕ , con buenas propiedades. Intentamos dar una caracterización del espacio en la que, en lugar del tamaño de la función incremental de las funciones f , consideramos el tamaño de las *convoluciones*

$$F(t, x) = \phi_t * f(x) = t \int_{-\infty}^{\infty} \phi(ty) f(x-y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Es decir, perseguimos expresar la pertenencia de la función f al espacio de Besov en términos de que una adecuada norma mixta de la función F sea finita. En la versión discreta de este tipo de resultados, caracterizamos la pertenencia de f al espacio de Besov en términos de una norma mixta calculada sobre $\phi_{2^j} * f(x)$ ($j \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$).

- **Descripciones en términos de análisis multiresolución.** Consideramos la función madre, que llamamos ψ , de una base de ondículas hilbertiana, en el sentido introducido por Pierre Gilles Lemarié y Yves Meyer en [11]. A

partir de esta función madre construimos, mediante traslación y dilatación, la base de ondículas

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Toda función f (para ser más preciso, toda distribución temperada, concepto popularizado por Laurent Schwartz, ver [15]) tiene una expresión única como una suma infinita

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}$$

para unos ciertos coeficientes reales $c_{j,k}$, de modo que podemos intentar describir el tamaño de f en términos del tamaño de la sucesión de coeficientes, es decir, calculando una adecuada norma mixta sobre la sucesión doble $(c_{j,k})$.

- **Descomposiciones atómicas.** Un intervalo diádico es un intervalo de la forma $2^j[k, k+1]$, donde j y k son números enteros. Un átomo asociado a este intervalo (o sea, un (j, k) -átomo) es una función indefinidamente derivable con una cantidad suficiente de momentos nulos, de tamaño acotado y que es nula lejos del intervalo. Puesto que los átomos son funciones fácilmente manejables, es interesante caracterizar las funciones en un cierto espacio como aquéllas que pueden escribirse como una suma infinita de la forma

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} a_{j,k},$$

donde cada $a_{j,k}$ es un (j, k) -átomo y la sucesión de coeficientes $(c_{j,k})$ tiene una cierta condición de tamaño, expresada de nuevo como una norma mixta.

Resultados en esta línea logrados con mi aportación, y aplicaciones de los mismos, para espacios de Besov de derivabilidad generalizada, pueden encontrarse en los trabajos [3, 4, 5].

En Matemáticas, siempre que aparece un concepto (un tipo de conjuntos que tienen una determinada *estructura*) tenemos que considerar las aplicaciones biyectivas que conservan la estructura (es decir, los isomorfismos). Los conjuntos estudiados en el Análisis Funcional son espacios vectoriales en los que hay una noción de aproximación (o, lo que es lo mismo, una noción de continuidad). El marco más general que engloba su estudio es el de los llamados *espacios vectoriales topológicos*. Los isomorfismos, en este marco, son las aplicaciones lineales continuas y con inversa continua. Los espacios de Besov se engloban dentro de la clase más usual y estudiada de espacios vectoriales topológicos, la de los llamados espacios quasi-Banach. Desde un punto de vista teórico, es interesante identificar, o distinguir, mediante isomorfismo, los espacios de Besov. Este avance, en el que he participado, ha sido realizado recientemente:

TEOREMA (Ver [1]). *Dos espacios de Besov de derivabilidad generalizada son isomorfos si y sólo si los índices p_0, q_0 de ambos espacios coinciden. En particular el grado de derivabilidad no interviene en la clase por isomorfismo de los espacios.*

REFERENCIAS

- [1] F. ALBIAC Y J. L. ANSORENA, On the mutually non isomorphic $\ell_p(\ell_q)$ spaces II, *Math. Nachr.* (en prensa).
- [2] J. L. ANSORENA, *Teoría de pesos y descomposiciones atómicas en espacios de funciones*, Tesis Doctoral, Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, Serie II, Sección 2, Zaragoza, 1994.
- [3] J. L. ANSORENA Y Ó. BLASCO, Characterization of weighted Besov spaces, *Math. Nachr.* **171** (1995), 5–17.
- [4] J. L. ANSORENA Y Ó. BLASCO, Atomic decomposition of weighted Besov spaces, *J. London Math. Soc. (2)* **53** (1996), 127–140.
- [5] J. L. ANSORENA Y Ó. BLASCO, Convolution multipliers on weighted Besov spaces, *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)* **4** (1998), 47–68.
- [6] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, reimpresión del original de 1932, Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993.
- [7] O. V. BESOV, Investigation of a class of function spaces in connection with imbedding and extension theorems, *Trudy. Mat. Inst. Steklov.* **60** (1961), 42–81 (en ruso).
- [8] J. DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968.
- [9] F. FISCHER, Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Paris* **144** (1907), 1022–1024.
- [10] H. L. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France*, reimpresión del original de 1932, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [11] P. G. LEMARIÉ Y Y. MEYER, Ondelettes et bases hilbertiennes, *Rev. Mat. Iberoamericana* **2** (1986), 1–18.
- [12] J. RADON, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl. Abteilung IIa* **122** (1913), 1022–1024.
- [13] F. RIESZ, Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C. R. Acad. Paris* **144** (1907), 615–619.
- [14] F. RIESZ, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.* **69** (1909), 449–497.
- [15] L. SCHWARTZ, Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques, *Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.)* **21** (1945), 57–74.



ZUBÍA

26



Gobierno de La Rioja
www.larioja.org



**Instituto
de Estudios
Riojanos**