

# Psicología y Didáctica de las matemáticas

CARMEN GÓMEZ-GRANELL y JAVIER FRAILE

IMIPAE



## Resumen

*En este trabajo se abordan las relaciones entre Psicología y Didáctica de las Matemáticas. La Psicología se ha interesado más tradicionalmente por el estudio del razonamiento matemático en general, prestando poca atención a la forma de enseñarlo. La Didáctica, por su parte, se ha orientado a generar técnicas y recursos de enseñanza poco fundamentados psicológicamente.*

*En la actualidad la propia evolución de ambas disciplinas ha hecho que la primera se interese por la adquisición de contenidos específicos y su instrucción y la segunda por las características cognitivas de los alumnos.*

*Sin embargo, por un lado, la investigación didáctica sigue siendo muy descriptiva. Por otro, tanto la investigación psicológica como la didáctica no considera suficientemente la perspectiva contextual. La incorporación de dicha perspectiva se plantea como una necesidad para avanzar en el conocimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje.*

**Palabras clave:** Enseñanza de las matemáticas; Currículum de matemáticas; Teorías del aprendizaje; Teorías de la instrucción; Cognición en contexto; Constructivismo.

---

## Psychology and Mathematic Didactics

### Abstract

*The relationships between Psychology and Mathematic Didactics are reviewed in this article. Psychology has traditionally been interested in studying mathematical reasoning but has paid little attention to how to teach it. Didactics, for its part, has oriented itself towards generating educational techniques and resources which lack a psychological basis. At present, the evolution of both disciplines has meant that Didactics has focussed on the acquisition and teaching of specific contents, and Psychology has focussed on students' cognitive characteristics. Nevertheless, didactic research is still very descriptive. Both psychological and didactic research, however, do not sufficiently take into account the contextual perspective. Hence, the incorporation of this perspective is viewed as necessary in order to advance current knowledge in teaching and learning processes.*

**Key words:** Mathematic Didactics; Mathematics Instruction; Mathematics Curriculum; Learning Theories; Instruction Theories; Cognition in context; Constructivism.

---

*Correspondencia con autores:* Instituto Municipal de Investigación en Psicología Aplicada a la Educación (IMIPAE). DSP del Area de Educación del Ayuntamiento de Barcelona. Plaza de España, 5. 08014 Barcelona.

«En un Oasis del desierto vivía un padre con sus tres hijos. Cuando el padre murió dispuso repartir su herencia entre sus tres hijos de la manera siguiente: la mitad para el hijo mayor, una tercera parte para el segundo y una novena para el tercero. El problema era que el total de la herencia constaba de 17 camellos. Los hijos, angustiados, no sabían cómo resolver el problema sin tener que recurrir a “descuartizar un camello”, hasta que un día pasó por allí un mercader y les dio la solución: He aquí la solución: yo añado mi camello y son 18. La mitad son 9, la tercera parte son 6 y la novena parte son 2. En total son 17 camellos y sobra uno, es decir, el mío.»

## INTRODUCCION

Es casi seguro que la mayoría de personas asistentes a este encuentro —es decir, los que no tienen una formación matemática— se estén preguntando en estos momentos en qué consiste el artificio mediante el cual se ha resuelto el problema y si realmente se ha resuelto o si la cosa «tiene truco» y en realidad el pastor nómada nos ha dado «gato por liebre» porque no sabemos muchas matemáticas. Las personas con formación matemática presentes en la sala, por el contrario, ya han descubierto, como buenos «expertos», el artificio y están pensando que la solución del pastor no tiene nada de correcta. Sin duda la solución aportada por el pastor no es «matemáticamente correcta», pero desde luego es pragmáticamente adecuada para salir del atolladero sin tener que descuartizar ningún camello.

Algunos constructivistas radicales, como Von Glassenfer o Watzlawick, utilizan este ejemplo para ilustrar lo que ellos llaman «un supuesto imaginario». Cuando alguien cree tener un problema irresoluble o difícil, «construye» un supuesto imaginario que es en realidad una perspectiva distinta para mirar el problema, lo que le permite, si no solucionarlo, sí al menos hacerlo desaparecer como obstáculo para seguir avanzando.

Pues bien, podríamos decir que con las relaciones entre Psicología y Didáctica<sup>1</sup> sucede algo así como con la historia de los camellos. Desde hace tiempo, al menos en este país, unos y otros venimos hablando insistentemente de la necesidad de colaborar e intercambiar perspectivas, pero también de la dificultad, a veces casi «imposibilidad» de hacerlo. La realidad es que cada uno de los colectivos se siente muchas veces molesto y poco identificado con la «imagen» que le atribuye —o que cree que le atribuye— el otro. Se trataría del problema de las «representaciones cruzadas discordantes» a que aludía César Coll en su ponencia de esta mañana<sup>2</sup>.

Como buenos «constructivistas» que somos todos aquí —seguramente no «radicales», pero sí constructivistas—, quizá sería una buena idea construir un «supuesto imaginario» que sería el de que, como decía César Coll esta mañana, existen numerosas razones para pensar que las divergencias y discrepancias entre la Psicología de la Educación y la Didáctica no son en la actualidad tantas ni tan reales como pudiera parecer en principio. Y que ambos colectivos comparten en gran medida, sin que ello implique la anulación de las diferencias o la pérdida de identidad de cada uno, intereses y preocupaciones, aspiraciones, objeto de estudio, marcos teóricos, metodología de investigación, etcétera.

Así pues, y con este «supuesto imaginario» como punto de partida (esperemos que también de «llegada»), abordaremos a continuación algunos aspectos de las relaciones entre Psicología y Didáctica de la Matemática. Sin olvidar, por supuesto, que lo haremos *desde nuestra perspectiva de psicólogos*, asumiendo des-

de luego los inevitables sesgos que ello comporta y el riesgo de despertar ciertas «representaciones» o «fantasmas» más o menos dormidos en la mente de los didactas aquí presentes.

## APORTACIONES E INFLUENCIAS MUTUAS

### De dónde venimos

A pesar de lo dicho hasta aquí y de nuestra firme convicción de la existencia de esas «representaciones cruzadas» entre psicólogos y didactas que hacen a veces difícil la integración de las aportaciones mutuas, creemos que existen otro tipo de razones que influyen en esa difícil relación y que hacen referencia al papel que, históricamente, cada una de estas disciplinas ha jugado en relación a la otra.

En términos generales, podríamos decir que la Psicología, desde presupuestos más o menos generales sobre el desarrollo individual y el aprendizaje, ha pretendido ser prescriptiva con respecto a la forma en que hay que enseñar. Por otro lado, al centrarse más en dichos procesos de índole general y en dar orientaciones sobre cómo enseñar, no consideraba suficientemente, hasta hace poco, la importancia de conocer el contenido de la disciplina.

Por su parte la Didáctica, dada su vinculación a la acción y la necesidad de conseguir resultados inmediatos (que los alumnos aprendan), se orientaba más a generar técnicas y recursos para enseñar que no siempre estaban fundamentadas teóricamente, realizando una transposición directa de los principios teóricos y los instrumentos metodológicos de otras disciplinas, como la Psicología, a la práctica del aula. Dado que dichas disciplinas no aportaban, en general, elementos específicos de orientación para la enseñanza, dichos principios constituían, las más de las veces, un marco superestructural, superpuesto y desvinculado de la práctica, que seguía guiándose prioritariamente por la intuición y la experiencia acumulada.

Una manifestación clara de esta divergencia en los enfoques de psicólogos y didactas puede verse en las «críticas» que muchas veces hacían, y todavía hacen, los profesores a ambos colectivos: mientras que a los psicólogos se nos reprimina que hablemos de teorías generales sobre el aprendizaje, sin que demos orientaciones sobre cómo enseñar, se reprocha a los didactas que ofrezcan una colección de ejercicios y técnicas con poca o ninguna justificación psicopedagógica.

En cualquier caso, la psicología ha venido en muchas ocasiones a ofrecer la justificación teórica o científica sobre cómo enseñar los contenidos previamente seleccionados desde la disciplina.

Aunque este análisis, de carácter muy general, adopta matices distintos en función de las diferentes áreas de conocimiento, creemos que es especialmente pertinente en el caso concreto de las matemáticas.

Tradicionalmente los psicólogos se han interesado más por las matemáticas que los matemáticos por la psicología. No parece arriesgado afirmar que los cambios curriculares acaecidos en la enseñanza de las matemáticas han venido más determinados por los cambios habidos en la propia disciplina que por la influencia de la Psicología, que en muchas ocasiones se ha limitado a justificar o fundamentar dichos cambios.

Así por ejemplo, los cambios curriculares introducidos a principios de los sesenta («matemática moderna») vinieron fundamentalmente determinados por los cambios acaecidos en la propia disciplina (aparición de la teoría de conjuntos y de los postulados del grupo Bourbaki, auge del formalismo, etc.), por más que sabemos que algunos psicólogos, como Bruner, participaron en la famosa conferencia de Woods Hole.

En la actualidad, la crisis de los enfoques estructurales en la enseñanza de la matemática y la aparición de nuevas propuestas curriculares basadas en la resolución de problemas, la enseñanza significativa de números y operaciones, el incremento de la estadística, la geometría y el álgebra, el uso del ordenador, la matemática para todos, etc., vienen también acompañados de cambios en la conceptualización de la propia matemática y su función social (límites al formalismo, incremento de la tecnología, importancia creciente de la matemática aplicada a otras ciencias, etcétera).

No obstante, la Psicología ha tenido una influencia notable en la didáctica de las matemáticas porque, como hemos dicho anteriormente, un gran número de psicólogos han orientado su investigación hacia el estudio de los procesos de adquisición de la matemática. Thorndike, Gagné, la Gestalt, Piaget, Bruner, la moderna psicología cognitiva, etc., constituyen ejemplos claros de este hecho.

No nos extenderemos en relatar las aportaciones de estas corrientes porque ya nuestros compañeros provenientes del campo de la Didáctica de la Matemática han hecho una detallada y excelente descripción en su ponencia<sup>3</sup>.

Sin embargo, sí que nos gustaría señalar que las razones de este interés no son en general las de conocer cómo se aprenden y cómo se pueden enseñar los contenidos matemáticos. Las Matemáticas interesan a los psicólogos, en primer lugar, a causa de la identificación que todo el pensamiento occidental ha hecho entre inteligencia, racionalidad lógica y pensamiento abstracto. Los procesos cognitivos son estudiados a través del estudio de los procesos de adquisición del conocimiento matemático. No olvidemos que en nuestras sociedades occidentales las personas que tienen un buen dominio de las matemáticas son consideradas como más inteligentes.

Quizá los máximos exponentes de este fenómeno sean Piaget, que usó la lógica aritmética como modelo de la organización cognitiva, y la moderna ciencia cognitiva, que describe al ser humano como un «manipulador de símbolos», de acuerdo a un conjunto de reglas bien delimitadas y especificadas que tienen propiedades matemáticas.

Por otro lado, existen también otras razones, inherentes a la propia naturaleza de las matemáticas, que la convierten un contenido fácil de estudiar y atractivo para los psicólogos que están interesados por la enseñanza: poseen una estructura muy organizada, están mejor delimitadas y definidas que otros contenidos del currículum, su contenido es autosuficiente, etcétera.

Este hecho ha conllevado que en el caso de las matemáticas, más quizá que en ninguna otra disciplina, la psicología haya venido a dar pautas, teóricamente justificadas desde la misma psicología, de cómo enseñar.

Así por ejemplo, los trabajos de Thorndike en el terreno de la aritmética (*The psychology of arithmetic*, 1922), basados en los principios asociacionistas, vinieron a justificar la enseñanza algorítmica y el empleo de los ejercicios memorísticos y de práctica.

Los trabajos de Gagné pretendían abordar el problema de la transferencia

en el marco de las teorías asociacionistas. Pero a la vez las jerarquías de aprendizaje para tareas matemáticas vinieron a ofrecer una teoría de la secuenciación que pretendía explicar por qué el aprendizaje más sencillo justifica el más complejo.

A principios de los sesenta tanto desde las matemáticas como desde la psicología se habían adoptado perspectivas estructuralistas. La psicología (Gestalt, Piaget) consideraba que el conocimiento no consistía en una suma de contenidos aislados que se adquirían por mecanismos asociativos y memorísticos. Existían estructuras de carácter más general, cuya adquisición permitía «comprender y relacionar» diversos contenidos.

Desde las matemáticas, la teoría de conjuntos había puesto de manifiesto que los contenidos aislados de la matemática tradicional (aritmética, álgebra, geometría, teoría de las funciones, etc.) no eran contenidos independientes, sino que constituían partes interrelacionadas en el marco de una estructura más general.

La comprensión de esas estructuras más generales, y no el mero ejercicio rutinario del cálculo, debía constituir el objetivo de la enseñanza.

Una vez más la psicología, de la mano de Bruner y Piaget, vino a proponer cómo debían ser enseñadas dichas estructuras. Las ideas de:

- currículum en espiral,
  - aprendizaje por descubrimiento (de las estructuras) que desestimaba la enseñanza de contenidos concretos,
  - materiales estructurados que modelizaban las estructuras abstractas, etc.,
- presidieron la enseñanza de las matemáticas.

Evidentemente desde dichos planteamientos se hicieron aportaciones importantes a la enseñanza de las matemáticas. El más relevante, desde nuestro punto de vista, fue el intento de sustituir una matemática basada en la práctica y la rutina de carácter mecánico, por otra de carácter más conceptual y comprensiva.

Sin embargo, la aplicación de la teoría de Piaget a la educación es uno de los casos más claros de transposición de una teoría general del desarrollo, que no dice nada sobre el aprendizaje en general y mucho menos sobre el escolar, a la práctica educativa.

No deja de ser curioso que una teoría que describe el desarrollo cognitivo como un proceso evolutivo y necesario de construcción siempre creciente de competencias lógicas y que, consecuentemente, minimiza el papel de la educación, hay tenido tanta influencia educativa.

Creemos que es precisamente esta tendencia de psicólogos y didactas a «adaptar» o «transponer» a la enseñanza principios de teorías psicológicas, lo que conlleva que muchos de dichos principios teóricos se trivialicen y deformen:

- La teoría de los estadios pasa a ser una teoría de «las edades»: ¿a qué edad los niños poseen las estructuras necesarias para entender la suma?
- En las aulas se enseñan ejercicios de conservación, seriación, clasificación, en vez de enseñar a sumar y a restar.
- La teoría del «descubrimiento» se lleva a límites que hacen prácticamente «desaparecer» al maestro, pretendiéndose incluso que el alumno «descubra» conocimientos culturales tan convencionales como las letras o la notación numérica.
- El concepto de «génesis» piagetiano se deforma, planteándose como una jerarquía genética rígida en la que todos los alumnos han de pasar necesariamente por los mismos pasos para descubrir una noción.

— La teoría sobre los modos de representación —enactiva, icónica y simbólica— de Bruner se tradujo en prácticas rígidas y esquemáticas: cualquier noción u operación matemática debía ser introducida siguiendo la secuencia «acción-manipulación, dibujo-esquema, símbolo, etcétera».

### ¿Y ahora... qué?

Es evidente que en el momento actual las cosas están cambiando considerablemente. Por ejemplo, en estos momentos se están realizando, por ambas partes, estudios y aportaciones importantes sobre un objeto de estudio común: los procesos escolares de enseñanza y aprendizaje.

Por otra parte, la importancia de los contenidos es hoy un tema clave para toda la investigación en psicología de la instrucción. Como ya hemos dicho, para la psicología piagetiana el progreso cognitivo se explica a partir de un modelo basado en la creciente competencia lógica del sujeto que construye estructuras de carácter general y en el que los aspectos semánticos o de contenido no tienen un papel relevante. Sin embargo, la abundante investigación realizada en los últimos años sobre el papel de la representación del contenido en la construcción del pensamiento ha puesto de manifiesto, si más no, la importancia de los aspectos temáticos y su función constitutiva en la construcción del razonamiento.

En la actualidad la psicología cognitiva, y la psicología de la instrucción en particular, se han orientado hacia el estudio de los procesos de razonamiento y aprendizaje en el marco de tareas, contenidos y dominios específicos.

Por su parte, la investigación didáctica ha aumentado notablemente en los últimos años, incorporando muchos de los marcos teóricos y las aportaciones de la Psicología. Como sabemos, ha habido recientemente una abundante investigación didáctica orientada hacia el estudio de lo que se han venido llamando «ideas de los alumnos», concepciones alternativas, ideas previas, preconcepciones, etc. En el caso concreto de las matemáticas numerosos trabajos se han orientado hacia el estudio de los «errores» o procedimientos propios o no formales que utilizaban los alumnos al realizar cálculos y operaciones, así como a describir estrategias de resolución de problemas y estructuras específicas de conocimiento matemático (Brown, S. I., 1974; Brown, M., 1981; Ginsburg, 1977; Ginsburg y Baroody, 1983; Matz, 1982; Vergnaud, 1983, 1990; Bousseau, 1988; Sfard, 1991; Vinner 1983; Vinner y Dreyfus, 1991; etcétera).

Por otro lado, tanto unos como otros hemos adoptado el constructivismo como marco teórico de referencia. Aunque, con toda seguridad, existen entre los que estamos en esta sala concepciones distintas sobre lo que quiere decir una enseñanza constructivista.

Obviamente el hecho de que psicólogos y didactas hayan aproximado sus posturas coincidiendo en el interés por el estudio de los procesos de adquisición de los contenidos específicos del currículum, así como en la adopción de un marco de referencia común —el constructivismo— para orientar la investigación y la práctica de la enseñanza, constituye un logro importante.

Sin embargo, nos parece que si queremos seguir avanzando, el problema que nos debería preocupar no es tanto si psicólogos de la educación y didactas han aproximado más o menos su objeto de estudio, sino más bien si ese objeto de estudio y la forma de abordarlo son pertinentes o suficientes para entender los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Y en ese sentido, creemos que tanto psicólogos como didactas seguimos arrastrando una buena parte de nuestros antiguos condicionantes.

Por parte de la Didáctica sigue subsistiendo una tendencia a que ciertos principios y teorías de la Psicología se transfieran o adopten de manera más o menos acrítica por la investigación didáctica.

Por ejemplo, creemos que en muchos de los trabajos a los que aludíamos anteriormente, de nuevo se ha producido una cierta transposición superficial desde los postulados de la psicología, esta vez la psicología cognitiva y el procesamiento de la información, a la instrucción o la enseñanza, sin que se haya creado un marco teórico-práctico de referencia propio.

Desde nuestro punto de vista esto se pone de manifiesto en hechos como el carácter excesivamente descriptivo de muchos de estos trabajos, centrados más en describir las ideas de los alumnos que en explicar qué tienen en común dichas ideas, a qué son debidas o cómo se pueden cambiar. O su poca sensibilidad a las variables contextuales (variables de la tarea, dinámica del aula, interacción profesor-alumno, etc.), lo cual sorprende todavía más si se tiene en cuenta su orientación didáctica.

Así, por ejemplo, sabemos que uno de los mayores problemas con que se enfrenta el enfoque de las concepciones alternativas es el del cambio conceptual. Las concepciones o las estrategias que usan los alumnos son muy persistentes y resistentes al cambio. El hecho, sin embargo, de que tengamos una abundante información sobre las estrategias y procedimientos que utilizan los alumnos para resolver problemas aditivos o multiplicativos, para representar gráficas o ecuaciones, etc., no nos dice gran cosa acerca de cómo proceder para cambiar dichas estrategias, la mayoría de las veces de carácter intuitivo, por conocimiento y lenguaje verdaderamente matemático.

Por su parte, la investigación psicológica sigue considerando que su objeto de estudio prioritario es el sujeto individual y los procesos de aprendizaje que éste realiza frente a tareas y contenidos específicos, olvidándose de los aspectos contextuales y de que todo proceso de aprendizaje tiene lugar en un contexto cultural y socialmente organizado.

En efecto, en los últimos años la psicología cognitiva y la psicología de la instrucción ha realizado un notable progreso en el análisis de tareas específicas y en el conocimiento de estructuras y procedimientos cognitivos (en el caso de las matemáticas cabría citar autores como Anderson, Greeno, Riley, Resnick, Vergnaud, Karplus, etc.). Pero, por contra, sabemos muy poco sobre capacidades de tipo general y no se ha avanzado mucho en la explicación de cómo se produce el cambio cognitivo y el pensamiento productivo, crítico y creativo.

Desde nuestro punto de vista, los enfoques cognitivos no pueden aportar por sí solos explicaciones en este sentido porque se basan en dos supuestos que necesitan ser modificados:

a. El de que el conocimiento y las destrezas que se construyen en un contexto se descontextualizan y se transfieren o generalizan fácilmente a otros contextos.

Así se supone que la matemática normativa aprendida en la escuela se traslada a cualquier situación. El conocimiento matemático de los sujetos se evalúa según los modelos normativos de la ciencia establecida sin que se valoren otros tipos de conocimiento matemático.

Sin embargo, numerosos trabajos muestran, por ejemplo, que los conocimientos

no se transfieren fácilmente de unos contextos a otros y que un mismo alumno puede recurrir a estrategias más o menos elaboradas en función de que cambien las condiciones de la tarea, la estructura semántica del problema, etcétera.

Es decir, tal y como se apunta en algunos de estos trabajos (Holland et al., 1986; Gómez-Granel, 1987; Pozo et al., 1992) dichas representaciones o estrategias tendrían un carácter implícito y se actualizarían o no en función de las características de la tarea o del contexto. Ello nos llevaría a pensar que tan importante o más que conocer qué representaciones tienen los alumnos, es conocer cómo las usan.

b. El de que, siguiendo la metáfora computacional, el conocimiento es el resultado de las representaciones y operaciones que el sujeto realiza sobre el mundo físico, más que de la interacción entre un sujeto y un contexto físico y social culturalmente organizado.

El enfoque cognitivo, al igual que hizo Piaget, ha despreciado siempre la influencia de la variable contextual y social o, lo que es lo mismo, la importancia del papel constitutivo de la cultura.

En su último libro denominado «Actos de significado», Bruner realiza un lucido análisis de este problema:

«el objetivo de esta revolución, la cognitiva, era recuperar la mente en las ciencias humanas después de un prolongado y frío invierno de objetivismo..., pero actualmente esa revolución se ha desviado hacia problemas que son marginales en relación con el impulso que originariamente la desencadenó..., creíamos que se trataba de un decidido esfuerzo por instaurar el significado como el concepto fundamental de la psicología..., muy pronto la computación se convirtió en el modelo de la mente y en el lugar que ocupaba el concepto de significado se instaló el concepto de computabilidad..., de manera que actualmente la acción basada en creencias, deseos o compromisos morales es considerada por los científicos cognitivos bienpensantes como algo que hay que evitar a toda costa. No cabe ninguna duda de que la ciencia cognitiva ha contribuido a nuestra comprensión de cómo se hace circular la información y cómo se procesa..., como tampoco le puede haber dado alguna a nadie de que ha dejado de explicar precisamente los problemas fundamentales..., los procesos mediante los cuales se crean y se negocian los significados dentro de una comunidad.

«Si la revolución cognitiva hizo erupción en 1956, la revolución contextual, al menos en psicología, se está produciendo ahora (Bruner, 1990).»

## UN ESPACIO DE CONVERGENCIA MUTUA: LA IMPORTANCIA DEL CONTEXTO

En los últimos años una buena parte de la investigación transcultural se ha orientado hacia el estudio de cómo las personas usan su conocimiento matemático en situaciones de la vida cotidiana (Saxe, 1987; Lave, 1988; Saxe, 1990; Rogoff y Lave, 1984; Scribner, 1984, etc.). Dichos trabajos han puesto de manifiesto que personas que fracasan en las tareas y pruebas de matemática formal y escolar pueden ser, sin embargo, extraordinariamente competentes en situaciones de actividad cotidiana que implican cálculos matemáticos (venta ambulante, compras en supermercados, repartos de mercancías en las fábricas, etcétera).

Así, por ejemplo, los trabajos que S. Scribner (1984) realizó sobre la práctica aritmética con los trabajadores de una central lechera o los de Lave (1988) en un supermercado o los de Carraher y Slicheman (1985) con niños vendedores de un mercado brasileño han mostrado lo siguiente:

a. Existen diferencias consistentes en los resultados de los individuos entre las situaciones de trabajo y las de examen. Los trabajadores de la central lechera, que no cometían fallos en su trabajo, acertaban una media del 64% en la prueba formal.

b. Las personas que iban a comprar, trabajaban en la central lechera o los vendedores del mercado, eran capaces de generar complicados y eficaces procedimientos de cálculo para resolver sus problemas, diferentes de los que se enseñan en la escuela.

Carreher y Schlieman (1985), por ejemplo, muestran cómo una joven calcula el precio de 10 cocos, cada uno de los cuales costaba 35 cruzeiros, sumando mentalmente 105 cruzeiros tres veces y agregando 35 más, en vez de multiplicar por 10.

En un trabajo reciente, Saxe (1990) muestra algunos ejemplos de cálculos realizados por vendedores callejeros de las calles de Brasil. Para calcular la diferencia  $46 - 18$ , uno de los vendedores dice: «Primero quito 6 de este número (46) y después quito 12 más. Así he quitado 18 en total. La respuesta es 28.» O veamos la siguiente forma de sumar  $790 + 470$ : «Cero más cero igual a cero. Nueve (de 790) menos 3 igual a 6, y 3 más 7 (de 470) es 10 y 10 más 6 igual a 16. Cuatro menos 1 es 3, y 3 más 7 es 10. Diez más 1 más 1 es 12.»

En su libro «La cognición en la práctica», J. Lave hace un análisis comparativo entre los trabajos de Capon y Khun (1979) sobre resolución de problemas de proporcionalidad en una situación de simulación de compra y venta (se trataba de buscar cuál era la mejor oferta) y su propio trabajo realizado en el contexto de un supermercado y en él aparecían el mismo tipo de problemas, pero de forma natural.

El primer resultado sorprendente es que mientras que en las tareas de Capon y Khun sólo un 44% de sujetos resolvía los problemas, en la situación del supermercado el porcentaje de éxitos era del 93%.

La dimensión explicativa de estos hechos hace referencia a las relaciones entre los problemas y la persona que los resuelve. En las situaciones de la vida cotidiana los problemas existen en el entorno de forma concreta, pueden asignárseles una formulación matemática y son matemáticamente isomorfos a los escolares. Pero a diferencia de lo que ocurre en la escuela, el hecho de si la persona lo reconoce o no como problema, es cosa suya; y si un problema debe ser reconocido como condición para existir, no es posible situarlo sólo en el entorno o en el proceso cognitivo, sino que parece que ambos están implicados.

En la vida cotidiana los individuos se viven a sí mismos como controlando sus actividades, interactuando con el entorno, generando problemas en relación al medio y controlando los procesos de resolución de los mismos. Por contra, la escuela y los experimentos crean contextos en que los niños y los sujetos se viven a sí mismos como objetos sin control sobre los problemas ni elección sobre los procesos de resolución.

Si se plantea el problema de ir a la tienda en una clase de matemáticas, la mayoría de los alumnos tratarán el enunciado como si careciera de significado sustantivo: sólo está ahí para dar una presentación disfrazada a una serie de variables y relaciones matemáticas.

Quienes hacen la compra en el supermercado suelen ser eficaces a la hora de resolver los problemas de ofertas y usan flexiblemente una variedad de estrategias en relación a las propiedades aritméticas de cocientes concretos de precios y cantidades.

En sus trabajos sobre la proporcionalidad, Capon y Khun afirman, por ejemplo, que la estrategia unidad/precio es superior a otras porque es universal, es decir, se puede aplicar para comparar cualquier producto.

Sin embargo, los compradores del supermercado no utilizan esta estrategia, sino que realizan comparaciones aproximativas entre productos del mismo tipo: «me dan dos onzas más de espagueti por seis centavos». Para Capon y Khun, dicha estrategia es sólo incipientemente inferencial y por tanto menos evolucionada.

Sin embargo, como afirma Lave, esta fórmula está simplemente menos estructurada en términos matemáticos y más con otros aspectos de la actividad en transcurso. La capacidad para hacer comparaciones universales es irrelevante en el supermercado.

En los últimos años se han realizado numerosos trabajos que, utilizando pruebas de evaluación definidas desde la matemática normativa, muestran que la mayoría de las personas corrientes no saben matemáticas.

A la luz de las aportaciones de la investigación transcultural, ¿no podríamos pensar más bien que las mismas personas no se comportan de la misma manera en situaciones diferentes, que implican metas diferentes?

Los resultados de todos estos trabajos apoyan la idea de que el conocimiento se construye a través de la interacción entre el sujeto y las situaciones, los contextos socioculturalmente organizados en los que actúa. Dichos trabajos muestran que las mismas personas que no parecen poseer una determinada habilidad en un contexto pueden ser perfectamente capaces de demostrarla en otro. O lo que es lo mismo, muestran que el funcionamiento cognitivo no puede seguir explicándose en términos de la posesión o no de determinadas habilidades.

Desde nuestro punto de vista, lo fundamental de este enfoque reside en la concepción del conocimiento como resultado de una actividad, realizada en un contexto cultural, histórica e institucionalmente definido, con el que interactúa un sujeto.

Desde la perspectiva del procesamiento de la información y la ciencia cognitiva, el conocimiento consiste en un conjunto de representaciones simbólicas conceptuales y procedimentales referidas a un dominio específico. Se construyen estructuras cognitivas que representan conceptos y reglas, y razonar consiste en activar y relacionar dichas representaciones.

Lo que la perspectiva sociohistórica aportaría a esta concepción es que para conocer no es suficiente con poseer representaciones. Los conocimientos se construyen «usándolos» en contextos y situaciones sociales y comunicativas. Tan importante es poseer representaciones de conceptos y procedimientos como de las habilidades y condiciones necesarias para su uso en un contexto determinado.

En un reciente artículo, James G. Greeno (1991) ha sugerido la idea de considerar los diferentes dominios conceptuales como «entornos» en los que la gente puede aprender cómo vivir; y el que las personas aprendan a vivir en un entorno depende fundamentalmente de sus actividades en él. Por ejemplo, el conocimiento numérico, que en un nivel de conocimiento experto incluiría importantes capacidades de computación, estimación y cuantificación, resultaría para Greeno de «una extensa actividad en un dominio, a través de la cual las personas aprenden a interactuar con éxito con los diferentes recursos del dominio, incluyendo el conocimiento del tipo de recursos que el dominio ofrece, cómo encontrar y usar dichos recursos en sus actividades, la comprensión y per-

cepción de ciertos patrones sutiles, resolviendo de forma rutinaria problemas ordinarios y generando nuevas ideas» (p. 170).

Tal y como Wertsch (1991) afirma, se darían diferentes formas de conceptualizar la realidad que serían el resultado de diferentes formas de actividad, de forma que se puede hablar de pensamiento cotidiano, científico, artístico, etc. Aunque ciertas formas de pensamiento se adquieren en estadios de desarrollo posteriores, ello no implica que sean más poderosas. En palabras de Wertsch (1991): «Algunas (de estas formas) son más poderosas y eficaces para ciertas actividades o esferas de vida y otras son más poderosas y eficaces para otras.»

Ello explicaría que estas diferentes formas pudieran coexistir en un mismo individuo, que manifestaría unas u otras en función del contexto.

A lo largo de toda esta exposición hemos defendido la idea de que en la actualidad se había producido un proceso de aproximación entre la Psicología y la Didáctica, ya que ambas estaban tomando como objeto de estudio los procesos de enseñanza y aprendizaje en contenidos específicos, dentro de un mismo enfoque constructivista.

Pero también hemos afirmado que dicha aproximación e integración de aportaciones mutuas debía ir más allá, aportando información sobre cómo se produce el cambio del alumno en las situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Se hagan desde donde se hagan (la psicología de la instrucción o de la educación, o la didáctica) la mayoría de los estudios y trabajos de investigación actuales siguen centrados en una perspectiva estrictamente individual que presta muy poca o ninguna importancia a la influencia del contexto.

Sin embargo, creemos que la inclusión de las variables contextuales en todas sus variedades es una necesidad para la investigación psicológica y didáctica si queremos conocer realmente cómo se producen los procesos de *enseñanza y aprendizaje* conjuntamente, en vez de seguir centrados, como hasta ahora, unos más en el *aprendizaje* y otros más en la *enseñanza*.

Y en este sentido creemos que una vía de colaboración importante entre psicólogos y didactas —no la única, por supuesto— estaría en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos del currículum sin desvincularlos del contexto en el que se están produciendo. Es decir, en el contexto del aula y de la institución escolar.

## Notas

(1) Aunque utilizaremos los términos genéricos Psicología y Didáctica por razones de agilidad, debe entenderse que nos referimos a aquella psicología que se interesa por los procesos de enseñanza-aprendizaje en la escuela y a las diversas didácticas específicas sobre las que se habla en este encuentro.

(2) Psicología y Didáctica: una relación a debate. César Coll.

## Referencias

- BROUSSEAU, G. (1986). «Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques.» *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, n.º 2, 33-115.
- BROUSSEAU, G. (1988). «Le contrat didactique: le milieu.» *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9, n.º 3, 309-336.
- BRUNER, J. (1990). *Actos de Significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Madrid: Alianza Editorial.

- CAPON, N., y KUHN, D. (1979). Logical reasoning in the supermarket: adult females use of a proportional reasoning strategy in an everyday context. *Developmental Psychology*, 15 (4), 45-452.
- CAREY, S. (1985). «Conceptual change in childhood.» Cambridge, Mass: M. I. T. Press.
- CARRAHER, T.; CARRAHER, D., y SCHLIEMANN, A. (1982). Na vida dez, na escola, zero: Os contextos culturais da aprendizagem da matemática. Sao Paulo: Caderna de Pesquisa, 42, 79-86.
- COLL, C., y SOLÉ, I. (1990). «La interacción profesor/alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje». En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (eds.). *Desarrollo Psicológico y Educación*, II Psicología y Educación. Madrid: Alianza.
- GINSBURG, H. P., y BAROODY, A. J. (1983). «The test of early mathematics ability.» Austin, TX: Pro-ed.
- GÓMEZ CRESPO, M. A.; POZO, J. I., y SANZ, A. (1992). Students' conceptions about conservation of matter (enviado para publicación).
- GÓMEZ GRANELL, C. (1985). «La representación gráfica de la multiplicación aritmética: una experiencia de aprendizaje.» *Infancia y Aprendizaje*, 31-32, 229-249.
- GÓMEZ GRANELL, C. (1988). «Representación y simbolización en el marco de problemas multiplicativos.» Tesis doctoral no publicada.
- GREENO, J. G. (1991). «Number sense as situated knowing in a conceptual domain.» *Journal for Research in mathematics education*. Vol. 22, n.º 3, may 1991, 170-218.
- HOWSON, G.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J. (1981). «Curriculum development in Mathematics.» Cambridge: Cambridge University Press.
- LAVE, J. (1991). «La cognición en la práctica.» Barcelona; Paidós.
- LAVE, J., y WENGER, E. (1991). *Situated learning*. Cambridge, Mass.: Cambridge University Press.
- MATZ, M. (1982). «Towards a process model for high school algebra errors. En D. Sleemand and J. S. Brown, *Intelligent Tutoring systems*. pp. 25-50. Nueva York, Academi Press.
- NESHER, P., y KILPATRICK, J. (ed.). (1990). «Mathematics and cognition.» Cambridge: Cambridge University Press.
- POZO, J. I.; GÓMEZ CRESPO, M. A.; LIMÓN, M., y SANZ, A. (1991a). Procesos cognitivos en la comprensión de la ciencia: idas de los alumnos sobre la química. Madrid: Servicio de Publicaciones del M. E. C.
- POZO, J. I.; PÉREZ ECHEVERRÍA, M. P.; SANZ, A., y LIMÓN, M. (1992). Las ideas de los alumnos sobre la ciencia como teorías implícitas. *Infancia y Aprendizaje*, 57, 3-22.
- RESNICK, L. (1988). Introducción. En L. Resnick (Ed.), *Knowing learning and instruction*. Hillsdale, N. J.: LEA.
- RESNICK, L.; CAUXINILLE-MARMECHE, MATHIEU, J. (1987). «Understanding algebra.» En: A. Sloboda Thon and Don Rogers (Eds.): *Cognitive Processes in Mathematics*. Oxford Science Publications.
- RESNICK, L. B., y FORD, W. W. (1991). «La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos.» Barcelona: Paidós.
- RIVIÈRE, A. (1990). «Problemas y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas: una perspectiva cognitiva», en C. Cool, J. Palacios y A. Marchesi (Eds.). *Desarrollo psicológico y Educación*, vol. 3. Madrid; Alianza Editorial.
- ROGOFF, B., y LAVE, J. (Eds.) (1984). *Everiday Cognition: its development in social context*. Cambridge, MA, Harvard University Press.
- SAXE, G. B.; GUBERMAN, S. R.; GEARHART, M. (1987).; «Social processes in early number development.» *Monographs in the Society for Research in Child Development*, 52 (Serial n.º 216).
- SAXE, G. B. (1990). *Culture and cognitive development; Studies in mathematical understanding*. Hillsdale, N. J., LEA.
- SCHLIEMAN, A.; PEREIRA DE MAGALHAES, V. (1990). «Proportional reasoning: from shopping to kitchens, laboratories, and, hopefully, schools.» En *Proceedings of fifteenth P. M. E. Conferency*. 67-73.
- SPARD, D. (1991). «On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin», *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, 1-36.
- TALL, D., y VINNER, S. (1981). «Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity». *Educational Studies in Mathematics*, n.º 12, 151-169.
- VERGNAUD, G. (1990a). «Epistemology and psychology of mathematics education.» En P. Beshar y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition*. Cambridge. Cambridge University Press, 96-112.
- VERGNAUD, G. (1990b). «La théorie des champs conceptuels», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, n.º 2.3, 133-170.
- VINNER, S. (1983). «Concept definition, concept image and notion of funtion», *International Journal for Mathematical education in Science and Technology*, n.º 14, 293-305.
- VINNER, S., y DREYFUS, T. (1989). «Images and definitions for the concept of function.» *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, 356-366.
- WALKERDINE, V. (1988). *The mastery of reason*. Londres: Routledge.
- WERTSCH, J. W. (1991). *Voices of the mind. A sociocultural approach to mediated action*. Cambridge, MA, Harvard University Press.
- ZIMMERMANN, W., y CUNNINGHAM, S. (Ed.) (1991). «Visualization in teaching and learning Mathematics.» Mathematics Association of America.

---

## *Extended Summary*

The relationships between Psychology and Mathematic Didactics are reviewed in this article. Traditionally, numerous psychologists have been interested in studying mathematical reasoning, and these studies have greatly influenced Maths teaching. However, this interest on the part of Psychology was directed towards analysing general and individual knowledge processes, rather than towards the processes involved in teaching and learning mathematical content itself. Didactics has also traditionally been more interested in looking for teaching methods and techniques than in providing them with a psychological basis.

This has led Psychology, from more or less general presuppositions about how the mind works and about learning, to attempt to be prescriptive with regard to the way to teach. For its part, didactics has often incorporated psychological principles somewhat superficially, without the existence of a specific and consistent theoretical-practical framework on which to base mathematics teaching.

At present, the evolution of both Psychology and Didactics has led the former to become interested in specific contents, and the latter to give greater importance to students' characteristics (studies on preconcepts, previous ideas, etc.). Both disciplines, however, have adopted the constructivist theory as a framework for common reference. This fact opens up important perspectives for collaboration in order to find an answer to a joint problem: the study of teaching-learning school processes.

Nevertheless, to be able to advance along these lines it is first necessary for both psychological and didactical investigation to overcome certain trends and points of view. On the one hand, a large part of current didactic investigation suffers from being excessively descriptive: We know about students' ideas but we know little about how they appear and even less about how to change them. Psychological investigation, for its part, continues to focus on studying individual processes of knowledge acquisition. Very little work has taken an interest in studying how these situations are produced in school learning contexts.

Both perspectives seem to have forgotten about the importance of the context and its constitutive function in building knowledge. This article contends that it is essential to incorporate the contextual perspective in all its forms (context of assignment, social context, etc.) if we wish to move forward in learning about teaching-learning processes.

In this sense, a line of investigation that should be encouraged between psychologists and educators is the study of teaching-learning processes of specific contents in the classroom context.