MÉTODO DEL PROMEDIO ESFÉRICO EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE TIPO HIPERBÓLICO

RESUMEN
En este artículo se estudiará la solución de la ecuación del problema de Cauchy para la ecuación de onda de dimensión espacial mayor que uno.

PALABRAS CLAVES: Promedio esférico, ecuación de onda, Kirchhoff, Hadamard, Euler-Poisson-Darboux.

ABSTRACT
In this paper the application of classical analysis for the solution of a wave equation for more than one space dimension, the spherical means is investigated.

KEYWORDS: Spherical means, *The Cauchy problem for the wave equation for more than one space dimension, Kirchhof, Hadamard, Euler-Poisson-Darboux.*

JOSÉ RODRIGO GONZALEZ GRANADA
Matemático, Ph.D
Profesor Auxiliar
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

ABEL ENRIQUE POSSO AGUDELO
Matemático, Ph.D
Profesor Titular
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
possoa@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, EDPs, emerge en el siglo XVIII cuando las ecuaciones diferenciales ordinarias fallan al describir los principios físicos estudiados. Así, la importancia de estas ecuaciones es reconocida desde hace muchos años y el aumento de la complejidad de la tecnología actual requiere que los ingenieros y científicos conozcan el tema.

Las EDPs suelen ser útiles en el diseño y construcción y su estudio es una gran empresa que involucra grandes áreas de la matemática. En un extremo el principal interés está en la existencia y unicidad de las soluciones y el análisis funcional es una herramienta fundamental para este propósito. En el otro extremo se tiene el interés de hallar soluciones analíticas y numéricas a dichas ecuaciones y en esta tarea es fundamental el análisis numérico.

En la mayoría de los casos, el estudio de las EDPs se inicia con el caso unidimensional para después tratar de generalizar a dimensiones superiores, generalización que por lo general es difícil de realizar. En este artículo se estudia el método de los promedios esféricos, el cual permite la generalización a dimensiones superiores del método de D'alambert aplicado al problema de Cauchy de la ecuación de onda.

Fecha de Recepción: 31 Agosto de 2006
Fecha de Aceptación: 20 Noviembre de 2006

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos el problema de Cauchy para la ecuación La ecuación de onda

$$\Box u = c^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} - u_{tt} = 0\,, \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x)\,,\quad u_t(x,0) = g(x)\,, \tag{2}$$

donde $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$.

El operador "$\Box$" es conocido como el operador de D'alambert.

La ecuación (1) para el caso tridimensional puede representar ondas acústicas u ópticas, el caso bidimensional puede representar ondas sobre la superficie del agua y el caso unidimensional ondas de sonido en tubos (pipes) o vibraciones de una cuerda.

El problema unidimensional se puede resolver utilizando el método de D'alambert. Para dimensiones mayores que uno, utilicemos el método de los promedios esféricos el cual también es de gran utilidad para analizar las principales propiedades de funciones armónicas y los promedios esféricos de Gauss.

3. METODO DE LOS PROMEDIOS ESFÉRICOS.

El promedio esférico para la función $u(x,t)$, que satisface la ecuación (1), esta dado por

$$\mu_u(r,t) == \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u(y,t)dS ,$$

donde ω_n es el área de la superficie de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$, dada por la siguiente fórmula

$$\omega_n = \int_{|y-x|=1} d\omega = 2\pi^{\frac{n}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right)^{-1} ,$$

siendo Γ la función Gamma dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx , \text{ para } \alpha \geq 1.$$

De manera análoga podemos calcular los promedios esféricos de las funciones f y g respectivamente

$$\mu_f(r) = \mu_u(r,0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u(y,0)dS$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} fdS ,$$

$$\mu_g(r) = \left(\mu_u(r,0)\right)_t = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u_t(y,0)dS$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} gdS .$$

Consideremos el vector $r\xi$ de longitud r, que va desde x hasta y, es decir $y = x + r\xi$. Dado que $d\omega$ es el elemento de ángulo sólido generado por la esfera unitaria tenemos que

$$dS = r^{n-1} d\omega .$$

De esta forma,

$$\mu_u(r,t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) d\omega . \qquad (3)$$

Observando que la región de integración es independiente del radio r podemos hallar la función $u(x,t)$ como el límite del promedio esférico. Esto es,

$$u(x,t) = \lim_{r \to 0^+} \mu_u(x,t) .$$

Derivando (3) con respecto a r obtenemos

$$\left(\mu_u(x,t)\right)_r = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \sum_{j=1}^{n} u_{x_j}(x + r\xi, t)\xi_j d\omega$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} \sum_{j=1}^{n} u_{y_j} \xi_j dS ,$$

donde ξ_j es la componente j-ésima del vector ξ.

Utilizando el teorema de Ostrogradski-Gauss y asumiendo además que ξ es normal exterior se obtien

$$\left(\mu_u(x,t)\right)_r = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|\leq r} \sum_{j=1}^{n} u_{y_j y_j} dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} \sum_{j=1}^{n} u_{y_j} \xi_j dS .$$

Teniendo en cuenta (1) y pasando a coordenadas polares, obtenemos

$$\left(r^{n-1}\mu_u(x,t)\right)_r = \frac{1}{c^2\omega_n} \int_{|y-x|=r} u_{tt} dS$$

$$= \frac{r^{n-1}}{c^2} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=x} u_{tt} dS \right),$$

$$\frac{r^{n-1}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=x} udS \right) = \frac{r^{n-1}}{c^2} \left(\mu_u(r,t)\right)_{tt} .$$

Así,

$$\left(r^{n-1}\mu_u(r,t)_r\right)_r = c^{-2} r^{n-1} \left(\mu_u(r,t)\right)_{tt} .$$

Luego

$$\mu_u(r,t)_{rr} + \frac{n-1}{r} \mu_u(r,t)_r = c^{-2} \mu_u(r,t)_{tt} . \qquad (4).$$

La ecuación (4), conocida con el nombre de ecuación de Euler-Poisson-Darboux, es difícil de resolver para dimensiones pares. Para resolver un problema en dimensión espacial par se utiliza el método del descenso de Hadamard.

A modo de ejemplo resolvamos el problema de Cauchy en dimensión espacial tres.

4. APLICACIÓN DEL METODO

A partir de la función $g(x) \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ construyamos la función $\mu_g(x,t)$, $t > 0$,

$$\mu_g(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\xi-x|=ct} g(\xi) dS_\xi$$

$$= \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} g(x + ct\eta) dS_\eta . \qquad (6)$$

Para cualquier función $g(x) \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ se tiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mu_g(x,t) = c^2 \Delta \mu_g(x,t) ,\ t > 0 ,\ x \in \mathbb{R}^3 , \qquad (7)$$

$$\mu_g(x,0)=0 \tag{8}$$

$$\left(\mu_g(x,0)\right)_t = g(x) \tag{9}$$

La condición inicial (8) se deriva de (6). Además utilizando (6) encontramos que

$$\left(\mu_g(x,0)\right)_t = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} g(x+ct\eta)dS_\eta$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}\left(\nabla g\left(x+ct\eta\right),c\eta\right)dS_\eta\ . \tag{10}$$

Así

$$g(x)=\left(\mu_g(x,0)\right)_t = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} g(x)dS_\eta\ .$$

Transformemos la ecuación (10) de la forma

$$\left(\mu_g(x,t)\right)_t = \frac{\mu_g}{t}+\frac{ct}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}\left(\nabla g\left(x+ct\eta\right),\eta\right)dS_\eta$$

$$=\frac{\mu_g}{t}+\frac{1}{4\pi ct}\int\limits_{|\xi-x|=ct}\left(\nabla g\left(\xi\right),\eta\right)dS_\xi =$$

$$\frac{\mu_g}{t}+\frac{1}{4\pi ct}\int\limits_{|\xi-x|=ct}\nabla g\left(\xi\right)d\xi\ .$$

Si de nuevo regresamos a las variables $\xi = x+ct\eta$, y para después hallar $\nabla g\left(\xi\right)$ a través de la superficie de la esfera $|\xi - x| = ct$, con ayuda de la fórmula de Ostrogradski-Gauss, obtenemos que:

$$\left(\mu_g(x,t)\right)_{tt} = \frac{1}{4\pi ct}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\xi-x|<ct}\Delta g\left(\xi\right)d\xi\right), \tag{11}$$

ya que

$$\left(\mu_g(x,t)\right)_t = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_g\right)-\frac{\mu_g}{t^2}=$$

$$\frac{\mu_g}{t^2}+\frac{1}{4\pi ct^2}\int\limits_{|\xi-x|<ct}\Delta g\left(\xi\right)d\xi-\frac{\mu_g}{t^2}=$$

$$\frac{1}{4\pi ct^2}\int\limits_{|\xi-x|<ct}\Delta g\left(\xi\right)d\xi\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi ct}\int\limits_{|\xi-x|<ct}\Delta g\left(\xi\right)d\xi\right)=\frac{1}{4\pi ct^2}\int\limits_{|\xi-x|<ct}\Delta g\left(\xi\right)d\xi+$$

$$\frac{1}{4\pi ct}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\xi-x|<ct}\Delta g\left(\xi\right)d\xi\right).$$

La derivada en (11) es fácil de realizar en coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\xi-x|<ct}\Delta g\left(\xi\right)d\xi\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^{ct}\int\limits_{|\eta|=1}\Delta g\left(x+r\eta\right)r^2dS_\eta dr\right)$$

$$=c\int\limits_{|\eta|=1}\Delta g\left(x+ct\eta\right)(ct)^2dS_\eta = c(ct)^2\int\limits_{|\eta|=1}\Delta g\left(x+ct\eta\right)dS_\eta$$

de aquí obtenemos

$$\left(\mu_g(x,t)\right)_{tt} = \frac{c^2t}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}\Delta g\left(x+ct\eta\right)dS_\eta\ .$$

De otro lado de (6) tenemos:

$$\Delta\mu_g(x,t)=\frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}\Delta g\left(x+ct\eta\right)dS_\eta\ .$$

Ahora sea $\phi(x)\in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x)\in C^2(\mathbb{R}^3)$. Entonces la solución del problema de Cauchy $u_{tt}=c^2\Delta u(x,t)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^3$, $u(x,0)=\phi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$, está dada de la forma

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\mu_\phi(x,t)+\mu_\psi(x,t)\ . \tag{12}$$

Esta última ecuación representa la fórmula de Kirchhoff. Sea ahora el problema tridimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{13}$$

$$u\Big|_{t=0}=\phi_o(x,y,z),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\phi_1(x,y,z)\ . \tag{14}$$

Y asumamos que $\phi_o\in C^3$ y $\phi_1\in C^2$.

Primero observamos que

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi c}\iint\limits_{S_{ct}}\phi(\xi,\eta,\varsigma)d\sigma_r\ , \tag{15}$$

dónde S_{ct} es la superficie de la esfera con centro en el punto $M(x,y,z)$ y radio $r=ct$.

Escogemos ξ,η,ς de la siguiente manera $\xi = x+\alpha ct$, $\eta = y+\beta ct$, $\varsigma = z+\gamma ct$, donde α, β y γ son los cosenos directores de la esfera S_{ct}, los cuales podemos escribir como $\alpha = sen\theta\cos\psi$, $\beta = sen\theta sen\psi$, $\gamma = \cos\theta$.

$0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \psi \le 2\pi$.

Teniendo en cuenta que

$$d\sigma_r = r^2 d\sigma_1 = c^2t^2 d\sigma_1 = c^2t^2 sen\theta d\theta d\psi ,$$

de (15) obtenemos

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\phi(x+\alpha ct, y+\beta ct, z+\gamma ct)d\sigma_1$$

De aquí tenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\varsigma^2}\right)d\sigma_1$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{S_{ct}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\varsigma^2}\right)d\sigma_r .$$

Diferenciando $u(x,y,z,t)$ con respecto a t,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\phi(x+\alpha ct, y+\beta ct, z+\gamma ct)d\sigma_1$$

$$+\frac{ct}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\alpha\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\phi}{\partial\varsigma}\right)d\sigma_1 . \qquad (17)$$

Para hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, escribimos (17) así

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi ct}\iint_{S_{ct}}\left(\alpha\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\phi}{\partial\varsigma}\right)d\sigma_r .$$

Utilizando la fórmula de Ostrogradski-Gauss obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi ct}\iiint_{D_{ct}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\varsigma^2}\right)d\xi d\eta d\varsigma ,$$

Dónde D_{ct} es una esfera de radio $r = ct$ con centro en el punto $M(x,y,z)$.

Si denotamos a I como

$$I = \iiint_{D_{ct}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\varsigma^2}\right)d\xi d\eta d\varsigma$$

vemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t}+\frac{I}{4\pi ct}.$$

Diferenciando esta última expresión con respecto a t,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{u}{t}+\frac{I}{4\pi ct}\right)-\frac{I}{4\pi ct^2}+\frac{1}{4\pi ct}\frac{\partial I}{\partial t}$$

$$= \frac{I}{4\pi ct}\frac{\partial I}{\partial t}.$$

No es difícil observar que

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c\iint_{S_{ct}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\varsigma^2}\right)d\sigma_r .$$

Si ahora utilizamos el sistema de coordenadas esféricas para I y diferenciamos con respecto a t, obtenemos

$$I = \int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\varsigma^2}\right)\rho^2 sen\theta d\theta d\psi d\rho ,$$

diferenciando I con respecto a t, hallamos

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\varsigma^2}\right)c^2t^2 sen\theta d\psi$$

$$= \iint_{S_{ct}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\varsigma^2}\right)d\sigma_r .$$

Como vemos la función $u(x,y,z,t)$ es solución de la ecuación (13) y además, por (16) y (17), satisface las condiciones iniciales

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \phi(x,y,z). \qquad (18)$$

Como $u(x,y,z,t)$ es solución de (13) que satisface las condiciones iniciales (18), la función

$$w(x,y,z,t) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

también es solución de (13) y satisface las condiciones iniciales

$$w\big|_{t=0} = \phi(x,y,z),$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{t=0} = c^2\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

Si en (18) tomamos la función $\phi_1(x,y,z)$ en lugar de la función $\phi(x,y,z)$ y en (19) hacemos lo mismo con la función $\phi_o(x,y,z)$ y después sumamos estas soluciones obtenemos la solución de (13), que satisface las condiciones (14)

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{ct}}\frac{\phi_o(\xi,\eta,\varsigma)}{r}d\sigma_r + \frac{1}{4\pi c}\iint_{S_{ct}}\frac{\phi_1(\xi,\eta,\varsigma)}{r}d\sigma_r\,. \qquad (20)$$

(20) es denominada fórmula de Poisson y es una generalización de la fórmula de D'alembert para el caso tridimensional.
Para el caso bidimensional se resuelve el problema de Cauchy en dos dimensiones espaciales

$$u_{tt}(x_1,x_2,t)-c^2\Delta u(x_1,x_2,t)=0\,,$$
$$u(x_1,x_2,0)=f(x_1,x_2)\,,$$
$$u_t(x_1,x_2,0)=f(x_1,x_2)\,.$$

Ahora consideramos los datos iniciales como funciones definidas en $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$, pero independientes de x_3, así:

$$\tilde{f}(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2)\,,$$
$$\tilde{g}(x_1,x_2,x_3)=g(x_1,x_2)\,,$$

y calculamos la solución del problema de Cauchy en dimensión espacial tres como lo hicimos anteriormente, pero con los datos dados por las funciones $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ respectivamente.

5. CONCLUSIÓN GENERAL

Como hemos visto, el método de los promedios esféricos nos ayuda a la solución y posterior análisis de problemas clásicos de las ecuaciones diferenciales parciales en dimensiones espaciales mayores que uno.

Las funciones armónicas en una sola dimensión espacial son funciones lineales y el valor de la función lineal en el punto medio de un intervalo finito es el promedio de sus valores en sus puntos extremos. Para generalizar esta propiedad a dimensiones mayores que uno tenemos que mostrar que el valor de una función armónica en el centro η de una bola de radio r es el promedio de la función sobre la superficie de la esfera. Es decir, para una función armónica u,

$$u(x)=\frac{n}{r^n\omega_n}\int_{B_r(x)}u(y)dy=\frac{n}{\omega_n}\int_{B_1(0)}u(x+rz)dz\,,$$

donde
$B_r(\eta)=\{z:|z-\eta|<r\}\subset\Omega$, $u\in C^2(\Omega)$, $\eta\in\Omega$.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] John Fritz. Partial Differential Equations 4th ed., Springer-Verlag, New York, 1982.

[2] Robert C. McOwen Robert. Partial Differential Equations: methods and applications, Prentice Hall, New Jersey 1996.

[3] L. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[4] V.P. Mijaylov. Ecuaciones en derivadas parciales, Nauka, Moscú 1976.